Лекция 9. Интегрируемые возмущения минимальных моделей двумерной конформной теории поля

Михаил Лашкевич

Конформная теория поля содержит бесконечную алгебру симметрий — две копии алгебры Вирасоро:

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}, \\
[\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m-n)\bar{L}_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Конформная теория поля содержит бесконечную алгебру симметрий — две копии алгебры Вирасоро:

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}, \\
[\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m-n)\bar{L}_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Алгебра Вирасоро порождается токами $T(x) = -2\pi T_{zz}$ и $\bar{T}(x) = -2\pi T_{\bar{z}\bar{z}}$:

$$L_n = \oint_{C_0} \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} T(w), \quad \bar{L}_n = \oint_{C_0} \frac{d\bar{w}}{2\pi i} \bar{w}^{n+1} T(\bar{w}),$$

где контуры обходят точку 0.

Конформная теория поля содержит бесконечную алгебру симметрий — две копии алгебры Вирасоро:

$$\begin{aligned}[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0},\\ [\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m-n)\bar{L}_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}.\end{aligned} \tag{1}$$

Алгебра Вирасоро порождается токами $T(x) = -2\pi T_{zz}$ и $\bar{T}(x) = -2\pi T_{\bar{z}\bar{z}}$:

$$L_n = \oint_{C_0} \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} T(w), \quad \bar{L}_n = \oint_{C_0} \frac{d\bar{w}}{2\pi i} \bar{w}^{n+1} T(\bar{w}),$$

где контуры обходят точку 0. Нас будет интересовать действие алгебры Вирасоро на операторы:

$$(\mathcal{L}_n\Phi)(x) = \oint_z \frac{dw}{2\pi i}(w-z)^{n+1} T(w)\Phi(x), \quad (\bar{\mathcal{L}}_n\Phi)(x) = \oint_{C_{\bar{z}}} \frac{d\bar{w}}{2\pi i}(\bar{w}-\bar{z})^{n+1} \bar{T}(\bar{w})\Phi(x),$$

где контуры обходят точку x.

Конформная теория поля содержит бесконечную алгебру симметрий — две копии алгебры Вирасоро:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}, \\ [\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m-n)\bar{L}_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}. \end{aligned} \tag{1}$$

Алгебра Вирасоро порождается токами $T(x) = -2\pi T_{zz}$ и $\bar{T}(x) = -2\pi T_{\bar{z}\bar{z}}$:

$$L_n = \oint_{C_0} \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} T(w), \quad \bar{L}_n = \oint_{C_0} \frac{d\bar{w}}{2\pi i} \bar{w}^{n+1} T(\bar{w}),$$

где контуры обходят точку 0. Нас будет интересовать действие алгебры Вирасоро на операторы:

$$(\mathcal{L}_n \Phi)(x) = \oint_z \frac{dw}{2\pi i}(w-z)^{n+1} T(w)\Phi(x), \quad (\bar{\mathcal{L}}_n \Phi)(x) = \oint_{C_{\bar{z}}} \frac{d\bar{w}}{2\pi i}(\bar{w}-\bar{z})^{n+1} \bar{T}(\bar{w})\Phi(x),$$

где контуры обходят точку x.
Пусть $\Lambda \in U(Vir)$. Мы можем определить операторы

$$\Lambda(x) = (\Lambda 1)(x), \quad \bar{\Lambda}(x) = (\bar{\Lambda} 1)(x)$$

как действие этих элементов на единичный оператор.

Конформная теория поля содержит бесконечную алгебру симметрий — две копии алгебры Вирасоро:

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}, \\
[\bar L_m, \bar L_n] &= (m-n)\bar L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Алгебра Вирасоро порождается токами $T(x) = -2\pi T_{zz}$ и $\bar T(x) = -2\pi T_{\bar z\bar z}$:

$$L_n = \oint_{C_0} \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} T(w), \quad \bar L_n = \oint_{C_0} \frac{d\bar w}{2\pi i} \bar w^{n+1} T(\bar w),$$

где контуры обходят точку 0. Нас будет интересовать действие алгебры Вирасоро на операторы:

$$(\mathcal{L}_n\Phi)(x) = \oint_z \frac{dw}{2\pi i}(w-z)^{n+1}T(w)\Phi(x), \quad (\bar{\mathcal{L}}_n\Phi)(x) = \oint_{C_{\bar z}} \frac{d\bar w}{2\pi i}(\bar w-\bar z)^{n+1}\bar T(\bar w)\Phi(x),$$

где контуры обходят точку x.
Пусть $\Lambda \in U(Vir)$. Мы можем определить операторы

$$\Lambda(x) = (\Lambda 1)(x), \quad \bar\Lambda(x) = (\bar\Lambda 1)(x)$$

как действие этих элементов на единичный оператор. Например,

$$(\mathcal{L}_{-1}1)(x) = \partial 1 = 0, \qquad (\mathcal{L}_{-2}1)(x) = T(x), \qquad (\mathcal{L}_{-3}1)(x) = (\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2}1)(x) = \partial T(x),$$

$$(\mathcal{L}_{-2}^2 1)(x) = {}^\times_\times T^2(x){}^\times_\times, \qquad (\mathcal{L}_{-4}1)(x) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-3}1)(x) = \frac{1}{2}\partial^2 T(x) \quad \text{и т.д.}$$

Операторы Λ, $\bar{\Lambda}$ удовлетворяют уравнениям

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = 0, \qquad \partial\bar{\Lambda}(x) = 0. \tag{2}$$

Среди этих операторов есть несколько семейств коммутативных интегралов движения, обеспечивающих интегрируемость минимальных моделей конформной теории поля. Теперь перейдем к возмущенной теории.

Операторы Λ, $\bar\Lambda$ удовлетворяют уравнениям

$$\bar\partial\Lambda(x) = 0, \qquad \partial\bar\Lambda(x) = 0. \tag{2}$$

Среди этих операторов есть несколько семейств коммутативных интегралов движения, обеспечивающих интегрируемость минимальных моделей конформной теории поля. Теперь перейдем к возмущенной теории.
Пусть $\mathcal{S}_0$ — формальное (эвклидово) действие некоторой конформной теории поля. Рассмотрим теорию с действием

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \lambda \int d^2x\, \Phi_{\mathrm{p}}(x), \tag{3}$$

где $\Phi_{\mathrm{p}}(x)$ — примарный оператор нулевого спина и размерности $\Delta_{\mathrm{p}} < 1$.

Операторы Λ, $\bar{\Lambda}$ удовлетворяют уравнениям

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = 0, \qquad \partial\bar{\Lambda}(x) = 0. \tag{2}$$

Среди этих операторов есть несколько семейств коммутативных интегралов движения, обеспечивающих интегрируемость минимальных моделей конформной теории поля. Теперь перейдем к возмущенной теории.
Пусть $\mathcal{S}_0$ — формальное (эвклидово) действие некоторой конформной теории поля. Рассмотрим теорию с действием

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \lambda \int d^2x \, \Phi_{\mathrm{p}}(x), \tag{3}$$

где $\Phi_{\mathrm{p}}(x)$ — примарный оператор нулевого спина и размерности $\Delta_{\mathrm{p}} < 1$.
Интегрируемость $\stackrel{?}{=}$ интегралы движения.

Операторы Λ, $\bar\Lambda$ удовлетворяют уравнениям

$$\bar\partial\Lambda(x) = 0, \qquad \partial\bar\Lambda(x) = 0. \tag{2}$$

Среди этих операторов есть несколько семейств коммутативных интегралов движения, обеспечивающих интегрируемость минимальных моделей конформной теории поля. Теперь перейдем к возмущенной теории.
Пусть $\mathcal{S}_0$ — формальное (эвклидово) действие некоторой конформной теории поля. Рассмотрим теорию с действием

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \lambda \int d^2x\, \Phi_{\mathrm{p}}(x), \tag{3}$$

где $\Phi_{\mathrm{p}}(x)$ — примарный оператор нулевого спина и размерности $\Delta_{\mathrm{p}} < 1$.
Интегрируемость $\stackrel{?}{=}$ интегралы движения. Мы будем искать локальные интегралы движения, то есть интегралы движения вида

$$I_s = \begin{cases} \int dz\, T_{s+1} + \int d\bar z\, \Theta_{s-1}, & \text{если } s > 0; \\ \int d\bar z\, T_{s-1} + \int dz\, \Theta_{s+1}, & \text{если } s < 0, \end{cases} \tag{4}$$

Операторы Λ, $\bar{\Lambda}$ удовлетворяют уравнениям

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = 0, \qquad \partial\bar{\Lambda}(x) = 0. \tag{2}$$

Среди этих операторов есть несколько семейств коммутативных интегралов движения, обеспечивающих интегрируемость минимальных моделей конформной теории поля. Теперь перейдем к возмущенной теории.
Пусть $\mathcal{S}_0$ — формальное (эвклидово) действие некоторой конформной теории поля. Рассмотрим теорию с действием

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \lambda \int d^2x\, \Phi_{\mathrm{p}}(x), \tag{3}$$

где $\Phi_{\mathrm{p}}(x)$ — примарный оператор нулевого спина и размерности $\Delta_{\mathrm{p}} < 1$.
Интегрируемость $\stackrel{?}{=}$ интегралы движения. Мы будем искать локальные интегралы движения, то есть интегралы движения вида

$$I_s = \begin{cases} \int dz\, T_{s+1} + \int d\bar{z}\, \Theta_{s-1}, & \text{если } s > 0; \\ \int d\bar{z}\, T_{s-1} + \int dz\, \Theta_{s+1}, & \text{если } s < 0, \end{cases} \tag{4}$$

где токи $T_{s\pm1} \in [1]$, $\Theta_{s\mp1} \in [\Phi_{\mathrm{p}}]$ удовлетворяют уравнениям непрерывности:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}T_{s+1} &= \partial\Theta_{s-1}, \qquad &\text{если } s > 0; \\ \partial T_{s-1} &= \bar{\partial}\Theta_{s+1}, \qquad &\text{если } s < 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Нам будет удобно рассматривать операторы в эвклидовом пространстве, но результаты легко переносятся в пространство Минковского.

Поправки к законам сохранения

В конформной теории поля любой оператор $\Lambda(x)$ является сохраняющимся током: $\bar\partial\Lambda(x) = 0$. В возмущенной теории в первом порядке имеем

$$\bar\partial\Lambda(x) = -\lambda \int d^2y\, \Phi_{\mathrm{p}}(y)\, \bar\partial\Lambda(x)\Big|_{\mathrm{CFT}} . \tag{6}$$

В конформной теории поля любой оператор $\Lambda(x)$ является сохраняющимся током: $\bar\partial\Lambda(x) = 0$. В возмущенной теории в первом порядке имеем

$$\bar\partial\Lambda(x) = -\lambda \int d^2y\, \Phi_{\mathrm{p}}(y)\, \bar\partial\Lambda(x)\Big|_{\mathrm{CFT}}. \tag{6}$$

Будем вычислять правую часть. Пусть $\Lambda(x)$ — оператор размерности s. Тогда имеет место разложение

$$\Lambda(x')\Phi_\Delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(z'-z)^{k-s}(\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)(x). \tag{7}$$

Здесь $(\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)$ — некоторый правый (киральный) потомок оператора Φ_Δ уровня k.

Поправки к законам сохранения

В конформной теории поля любой оператор $\Lambda(x)$ является сохраняющимся током: $\bar\partial\Lambda(x) = 0$. В возмущенной теории в первом порядке имеем

$$\bar\partial\Lambda(x) = -\lambda \int d^2y\, \Phi_{\mathrm{p}}(y)\, \bar\partial\Lambda(x)\Big|_{\mathrm{CFT}}. \tag{6}$$

Будем вычислять правую часть. Пусть $\Lambda(x)$ — оператор размерности s. Тогда имеет место разложение

$$\Lambda(x')\Phi_\Delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(z'-z)^{k-s}(\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)(x). \tag{7}$$

Здесь $(\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)$ — некоторый правый (киральный) потомок оператора Φ_Δ уровня k. Используя $\bar\partial z^{-1} = \pi\delta(x)$, находим ($x = (z, \bar z)$, $y = (w, \bar w)$)

$$\Phi_{\mathrm{p}}(y)\,\bar\partial\Lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar\partial_z (z-w)^{k-s}(\Lambda_{-k}\Phi_{\mathrm{p}})(y) = \pi \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(-1)^k}{k!}\,\partial_z^k \delta(y-x)(\Lambda_{k-s+1}\Phi_{\mathrm{p}})(y).$$

В конформной теории поля любой оператор $\Lambda(x)$ является сохраняющимся током: $\bar\partial\Lambda(x)=0$. В возмущенной теории в первом порядке имеем

$$\bar\partial\Lambda(x) = -\lambda \int d^2y\, \Phi_{\mathrm{p}}(y)\, \bar\partial\Lambda(x)\Big|_{\mathrm{CFT}} . \tag{6}$$

Будем вычислять правую часть. Пусть $\Lambda(x)$ — оператор размерности s. Тогда имеет место разложение

$$\Lambda(x')\Phi_\Delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(z'-z)^{k-s}(\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)(x). \tag{7}$$

Здесь $(\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)$ — некоторый правый (киральный) потомок оператора Φ_Δ уровня k. Используя $\bar\partial z^{-1}=\pi\delta(x)$, находим $(x=(z,\bar z),\ y=(w,\bar w))$

$$\Phi_{\mathrm{p}}(y)\,\bar\partial\Lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\bar\partial_z(z-w)^{k-s}(\Lambda_{-k}\Phi_{\mathrm{p}})(y) = \pi\sum_{k=0}^{s-1}\frac{(-1)^k}{k!}\,\partial_z^k\delta(y-x)(\Lambda_{k-s+1}\Phi_{\mathrm{p}})(y).$$

Берем интеграл по d^2y:

$$\bar\partial\Lambda(x) = \pi\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\,\partial^k(\Lambda_{k-s+1}\Phi_{\mathrm{p}})(x).$$

Мы продолжили сумму до бесконечности, поскольку слагаемые с $k\ge s$ равны нулю.

Поправки к законам сохранения

Воспользуемся разложением (7) в обратную сторону:

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\,\partial^k \oint \frac{dw}{2\pi i}\,(w-z)^k \Lambda(y)\Phi_{\mathrm{p}}(x).$$

Поправки к законам сохранения

Воспользуемся разложением (7) в обратную сторону:

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\, \partial^k \oint \frac{dw}{2\pi i}\, (w-z)^k \Lambda(y) \Phi_{\mathrm{p}}(x).$$

Теперь сделаем замену переменных $w \to z - u$. Имеем

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda \oint_{C_0} \frac{du}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}\, \partial_z^k (\Lambda(z-u)\Phi_{\mathrm{p}}(z,\bar{z})).$$

Воспользуемся разложением (7) в обратную сторону:

$$\bar\partial\Lambda(x)=\pi\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\,\partial^k\oint\frac{dw}{2\pi i}\,(w-z)^k\Lambda(y)\Phi_{\mathrm{p}}(x).$$

Теперь сделаем замену переменных $w\to z-u$. Имеем

$$\bar\partial\Lambda(x)=\pi\lambda\oint_{C_0}\frac{du}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{k!}\,\partial_z^k(\Lambda(z-u)\Phi_{\mathrm{p}}(z,\bar z)).$$

Суммирование ряда дает в голоморфном секторе замену $z\to z+u$:

$$\bar\partial\Lambda(x)=\pi\lambda\oint_{C_0}\frac{du}{2\pi i}\,\Lambda(z)\Phi_{\mathrm{p}}(z+u,\bar z)).$$

Воспользуемся разложением (7) в обратную сторону:

$$\bar\partial\Lambda(x) = \pi\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\,\partial^k \oint \frac{dw}{2\pi i}\,(w-z)^k \Lambda(y)\Phi_{\mathrm{p}}(x).$$

Теперь сделаем замену переменных $w \to z - u$. Имеем

$$\bar\partial\Lambda(x) = \pi\lambda \oint_{C_0} \frac{du}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}\,\partial_z^k (\Lambda(z-u)\Phi_{\mathrm{p}}(z,\bar z)).$$

Суммирование ряда дает в голоморфном секторе замену $z \to z + u$:

$$\bar\partial\Lambda(x) = \pi\lambda \oint_{C_0} \frac{du}{2\pi i}\,\Lambda(z)\Phi_{\mathrm{p}}(z+u,\bar z)).$$

После этого, заменяя $u \to w - z$, получаем окончательно

$$\bar\partial\Lambda(x) = \pi\lambda \oint \frac{dw}{2\pi i}\,\Phi_{\mathrm{p}}(w,\bar z)\Lambda(z,\bar z). \qquad (8)$$

Операторы $\mathcal{D}_n$

Этот ответ удобно записать в виде

$$\bar\partial\Lambda(x)=\pi\lambda(\mathcal{D}_1\Lambda)(x),\quad (\mathcal{D}_n\Lambda)(z,\bar z)=\oint\frac{dw}{2\pi i}\,(w-z)^{n-1}\Phi_{\mathrm{p}}(w,\bar z)\Lambda(z,\bar z). \tag{9}$$

Операторы $\mathcal{D}_n$

Этот ответ удобно записать в виде

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda(\mathcal{D}_1\Lambda)(x), \quad (\mathcal{D}_n\Lambda)(z,\bar{z}) = \oint \frac{dw}{2\pi i}\,(w-z)^{n-1}\Phi_{\mathrm{p}}(w,\bar{z})\Lambda(z,\bar{z}). \tag{9}$$

Операторы $\mathcal{D}_n$ просто коммутируют с $\mathcal{L}_m$. Из стандартного соотношения

$$[L_n, \Phi_\Delta(x)] = z^{n+1}\partial\Phi_\Delta(x) + (n+1)\Delta z^n\Phi_\Delta(x) \tag{10}$$

Этот ответ удобно записать в виде

$$\bar\partial\Lambda(x) = \pi\lambda(\mathcal{D}_1\Lambda)(x), \quad (\mathcal{D}_n\Lambda)(z,\bar z) = \oint \frac{dw}{2\pi i}\,(w-z)^{n-1}\Phi_{\mathrm{p}}(w,\bar z)\Lambda(z,\bar z). \tag{9}$$

Операторы $\mathcal{D}_n$ просто коммутируют с $\mathcal{L}_m$. Из стандартного соотношения

$$[L_n, \Phi_\Delta(x)] = z^{n+1}\partial\Phi_\Delta(x) + (n+1)\Delta z^n\Phi_\Delta(x) \tag{10}$$

находим

$$[\mathcal{L}_m, \mathcal{D}_n] = -((1-\Delta_{\mathrm{p}})(m+1) + n - 1)\mathcal{D}_{m+n}. \tag{11}$$

Этот ответ удобно записать в виде

$$\bar\partial\Lambda(x)=\pi\lambda(\mathcal{D}_1\Lambda)(x),\quad (\mathcal{D}_n\Lambda)(z,\bar z)=\oint\frac{dw}{2\pi i}\,(w-z)^{n-1}\Phi_{\mathrm{p}}(w,\bar z)\Lambda(z,\bar z). \tag{9}$$

Операторы $\mathcal{D}_n$ просто коммутируют с $\mathcal{L}_m$. Из стандартного соотношения

$$[L_n,\Phi_\Delta(x)]=z^{n+1}\partial\Phi_\Delta(x)+(n+1)\Delta z^n\Phi_\Delta(x) \tag{10}$$

находим

$$[\mathcal{L}_m,\mathcal{D}_n]=-((1-\Delta_{\mathrm{p}})(m+1)+n-1)\mathcal{D}_{m+n}. \tag{11}$$

Кроме того, из определения имеем

$$(\mathcal{D}_{-n}1)(x)=\frac{1}{n!}(\mathcal{L}_{-1}^n\Phi_{\mathrm{p}})(x),\quad n\ge 0. \tag{12}$$

Из этих двух соотношений мы можем получать $\bar\partial\Lambda$ для любых конечных Λ.

Этот ответ удобно записать в виде

$$\bar\partial\Lambda(x) = \pi\lambda(\mathcal{D}_1\Lambda)(x), \quad (\mathcal{D}_n\Lambda)(z,\bar z) = \oint \frac{dw}{2\pi i}\,(w-z)^{n-1}\Phi_{\mathrm{p}}(w,\bar z)\Lambda(z,\bar z). \tag{9}$$

Операторы $\mathcal{D}_n$ просто коммутируют с $\mathcal{L}_m$. Из стандартного соотношения

$$[L_n, \Phi_\Delta(x)] = z^{n+1}\partial\Phi_\Delta(x) + (n+1)\Delta z^n\Phi_\Delta(x) \tag{10}$$

находим

$$[\mathcal{L}_m, \mathcal{D}_n] = -((1-\Delta_{\mathrm{p}})(m+1)+n-1)\mathcal{D}_{m+n}. \tag{11}$$

Кроме того, из определения имеем

$$(\mathcal{D}_{-n}1)(x) = \frac{1}{n!}(\mathcal{L}_{-1}^n\Phi_{\mathrm{p}})(x), \quad n \geq 0. \tag{12}$$

Из этих двух соотношений мы можем получать $\bar\partial\Lambda$ для любых конечных Λ. Простой пример:

$$\bar\partial T = \pi\lambda\mathcal{D}_1\mathcal{L}_{-2}1 = -\pi\lambda(1-\Delta_{\mathrm{p}})\mathcal{D}_{-1}1 = -\pi\lambda(1-\Delta_{\mathrm{p}})\mathcal{L}_{-1}\Phi_{\mathrm{p}} = -\pi\lambda(1-\Delta_{\mathrm{p}})\partial\Phi_{\mathrm{p}}. \tag{13}$$

Этот ответ удобно записать в виде

$$\bar\partial\Lambda(x) = \pi\lambda(\mathcal{D}_1\Lambda)(x), \quad (\mathcal{D}_n\Lambda)(z,\bar z) = \oint \frac{dw}{2\pi i}\,(w-z)^{n-1}\Phi_{\mathrm{p}}(w,\bar z)\Lambda(z,\bar z). \tag{9}$$

Операторы $\mathcal{D}_n$ просто коммутируют с $\mathcal{L}_m$. Из стандартного соотношения

$$[L_n,\Phi_\Delta(x)] = z^{n+1}\partial\Phi_\Delta(x) + (n+1)\Delta z^n\Phi_\Delta(x) \tag{10}$$

находим

$$[\mathcal{L}_m,\mathcal{D}_n] = -((1-\Delta_{\mathrm{p}})(m+1)+n-1)\mathcal{D}_{m+n}. \tag{11}$$

Кроме того, из определения имеем

$$(\mathcal{D}_{-n}1)(x) = \frac{1}{n!}(\mathcal{L}_{-1}^n\Phi_{\mathrm{p}})(x), \quad n\ge 0. \tag{12}$$

Из этих двух соотношений мы можем получать $\bar\partial\Lambda$ для любых конечных Λ. Простой пример:

$$\bar\partial T = \pi\lambda\mathcal{D}_1\mathcal{L}_{-2}1 = -\pi\lambda(1-\Delta_{\mathrm{p}})\mathcal{D}_{-1}1 = -\pi\lambda(1-\Delta_{\mathrm{p}})\mathcal{L}_{-1}\Phi_{\mathrm{p}} = -\pi\lambda(1-\Delta_{\mathrm{p}})\partial\Phi_{\mathrm{p}}. \tag{13}$$

Отсюда получаем стандартное выражение

$$T_2 = \mathcal{L}_{-2}1, \quad \Theta_0 = -\pi\lambda(1-\Delta_{\mathrm{p}})\Phi_{\mathrm{p}}. \tag{14}$$

Примеры высших интегралов движения

Мы не будем рассматривать $\Lambda(x)$ нечетных уровней, потому что они сводятся к полным производным: $\Lambda(x) = \mathcal{L}_{-1}\Lambda_1(x) = \partial\Lambda_1(x)$.

Примеры высших интегралов движения

Мы не будем рассматривать $\Lambda(x)$ нечетных уровней, потому что они сводятся к полным производным: $\Lambda(x) = \mathcal{L}_{-1}\Lambda_1(x) = \partial\Lambda_1(x)$.
Нетрудно получить на уровне 4:

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-2}^2 1 = \pi\lambda\mathcal{D}_1\mathcal{L}_{-2}^2 1 = -\pi\lambda(1-\Delta_{\mathrm{p}})\left(2\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1} - \frac{3-\Delta_{\mathrm{p}}}{6}\mathcal{L}_{-1}^3\right)\Phi_{\mathrm{p}}, \tag{15}$$

Мы не будем рассматривать $\Lambda(x)$ нечетных уровней, потому что они сводятся к полным производным: $\Lambda(x) = \mathcal{L}_{-1}\Lambda_1(x) = \partial\Lambda_1(x)$.
Нетрудно получить на уровне 4:

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-2}^2 1 = \pi\lambda\mathcal{D}_1\mathcal{L}_{-2}^2 1 = -\pi\lambda(1-\Delta_\mathrm{p})\left(2\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1} - \frac{3-\Delta_\mathrm{p}}{6}\mathcal{L}_{-1}^3\right)\Phi_\mathrm{p}, \tag{15}$$

И на уровне 6:

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-2}^3 1 = -\pi\lambda(1-\Delta_\mathrm{p})\left(3\mathcal{L}_{-2}^2\mathcal{L}_{-1} - \frac{3-\Delta_\mathrm{p}}{2}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}^3 + \frac{(3-\Delta_\mathrm{p})(5-\Delta_\mathrm{p})}{120}\mathcal{L}_{-1}^5\right)\Phi_\mathrm{p}, \tag{16}$$

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-3}^2 1 = -2\pi\lambda(1-\Delta_\mathrm{p})\left(\mathcal{L}_{-3}\mathcal{L}_{-1}^2 - \frac{5-2\Delta_\mathrm{p}}{120}\mathcal{L}_{-1}^5\right)\Phi_\mathrm{p}. \tag{17}$$

Мы не будем рассматривать $\Lambda(x)$ нечетных уровней, потому что они сводятся к полным производным: $\Lambda(x) = \mathcal{L}_{-1}\Lambda_1(x) = \partial\Lambda_1(x)$.
Нетрудно получить на уровне 4:

$$\bar\partial\mathcal{L}_{-2}^2 1 = \pi\lambda\mathcal{D}_1\mathcal{L}_{-2}^2 1 = -\pi\lambda(1-\Delta_{\mathrm{p}})\left(2\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1} - \frac{3-\Delta_{\mathrm{p}}}{6}\mathcal{L}_{-1}^3\right)\Phi_{\mathrm{p}}, \tag{15}$$

И на уровне 6:

$$\bar\partial\mathcal{L}_{-2}^3 1 = -\pi\lambda(1-\Delta_{\mathrm{p}})\left(3\mathcal{L}_{-2}^2\mathcal{L}_{-1} - \frac{3-\Delta_{\mathrm{p}}}{2}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}^3 + \frac{(3-\Delta_{\mathrm{p}})(5-\Delta_{\mathrm{p}})}{120}\mathcal{L}_{-1}^5\right)\Phi_{\mathrm{p}}, \tag{16}$$

$$\bar\partial\mathcal{L}_{-3}^2 1 = -2\pi\lambda(1-\Delta_{\mathrm{p}})\left(\mathcal{L}_{-3}\mathcal{L}_{-1}^2 - \frac{5-2\Delta_{\mathrm{p}}}{120}\mathcal{L}_{-1}^5\right)\Phi_{\mathrm{p}}. \tag{17}$$

Вообще говоря, правые части этих выражений, не сводятся к выражениям вида $\mathcal{L}_{-1}(\cdots) = \partial(\cdots)$. Они могут принимать такой вид, если в модуле $[\Phi_p]$ имеются нуль-векторы уровня 2 или 3. Рассмотрим сначала случай уровня 3.

Мы не будем рассматривать $\Lambda(x)$ нечетных уровней, потому что они сводятся к полным производным: $\Lambda(x) = \mathcal{L}_{-1}\Lambda_1(x) = \partial\Lambda_1(x)$.
Нетрудно получить на уровне 4:

$$\bar\partial\mathcal{L}_{-2}^2 1 = \pi\lambda\mathcal{D}_1\mathcal{L}_{-2}^2 1 = -\pi\lambda(1-\Delta_{\mathrm{p}})\left(2\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1} - \frac{3-\Delta_{\mathrm{p}}}{6}\mathcal{L}_{-1}^3\right)\Phi_{\mathrm{p}}, \tag{15}$$

И на уровне 6:

$$\bar\partial\mathcal{L}_{-2}^3 1 = -\pi\lambda(1-\Delta_{\mathrm{p}})\left(3\mathcal{L}_{-2}^2\mathcal{L}_{-1} - \frac{3-\Delta_{\mathrm{p}}}{2}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}^3 + \frac{(3-\Delta_{\mathrm{p}})(5-\Delta_{\mathrm{p}})}{120}\mathcal{L}_{-1}^5\right)\Phi_{\mathrm{p}}, \tag{16}$$

$$\bar\partial\mathcal{L}_{-3}^2 1 = -2\pi\lambda(1-\Delta_{\mathrm{p}})\left(\mathcal{L}_{-3}\mathcal{L}_{-1}^2 - \frac{5-2\Delta_{\mathrm{p}}}{120}\mathcal{L}_{-1}^5\right)\Phi_{\mathrm{p}}. \tag{17}$$

Вообще говоря, правые части этих выражений, не сводятся к выражениям вида $\mathcal{L}_{-1}(\cdots) = \partial(\cdots)$. Они могут принимать такой вид, если в модуле $[\Phi_p]$ имеются нуль-векторы уровня 2 или 3. Рассмотрим сначала случай уровня 3. Если $\Delta = \Delta_{31}, \Delta_{13}$, в неприводимом представлении имеется соотношение:

$$\left(\mathcal{L}_{-3} - \frac{2}{\Delta+2}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2} + \frac{1}{(\Delta+1)(\Delta+2)}\mathcal{L}_{-1}^3\right)\Phi_\Delta(x) = 0, \qquad \Delta = \Delta_{13}, \Delta_{31}. \tag{18}$$

Но $\Delta_{31} > 1$ при $c < 1$, так что остается случай $\Delta_{\rm p} = \Delta_{13}$, $\Phi_{\rm p} = \Phi_{13}$. В этом случае $\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}$ выражается через $\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2}$ и $\mathcal{L}_{-1}^3$, так что имеем

$$\begin{aligned} T_4 &= \mathcal{L}_{-2}^2 1, \\ \Theta_2 &= -\pi\lambda \frac{1-\Delta_{13}}{2+\Delta_{13}} \left(2\Delta_{13}\mathcal{L}_{-2} + \frac{(1-\Delta_{13})(2-\Delta_{13})(3+\Delta_{13})}{6(1+\Delta_{13})} \right) \Phi_{13}. \end{aligned} \tag{19}$$

Но $\Delta_{31} > 1$ при $c < 1$, так что остается случай $\Delta_{\mathrm{p}} = \Delta_{13}$, $\Phi_{\mathrm{p}} = \Phi_{13}$. В этом случае $\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}$ выражается через $\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2}$ и $\mathcal{L}^3_{-1}$, так что имеем

$$\begin{aligned} &T_4 = \mathcal{L}^2_{-2}1, \\ &\Theta_2 = -\pi\lambda\frac{1-\Delta_{13}}{2+\Delta_{13}}\left(2\Delta_{13}\mathcal{L}_{-2} + \frac{(1-\Delta_{13})(2-\Delta_{13})(3+\Delta_{13})}{6(1+\Delta_{13})}\right)\Phi_{13}. \end{aligned} \tag{19}$$

На уровне 6 нужно найти комбинацию $\mathcal{L}^3_{-2}$ и $\mathcal{L}^2_{-3}$. Оказывается, она равна

$$T_6 = \mathcal{L}^3_{-2}1 + \frac{c+2}{2}\mathcal{L}^2_{-3}1. \tag{20}$$

Но $\Delta_{31} > 1$ при $c < 1$, так что остается случай $\Delta_{\mathrm{p}} = \Delta_{13}$, $\Phi_{\mathrm{p}} = \Phi_{13}$. В этом случае $\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}$ выражается через $\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2}$ и $\mathcal{L}^3_{-1}$, так что имеем

$$\begin{aligned} &T_4 = \mathcal{L}^2_{-2}1, \\ &\Theta_2 = -\pi\lambda\frac{1-\Delta_{13}}{2+\Delta_{13}}\left(2\Delta_{13}\mathcal{L}_{-2} + \frac{(1-\Delta_{13})(2-\Delta_{13})(3+\Delta_{13})}{6(1+\Delta_{13})}\right)\Phi_{13}. \end{aligned} \tag{19}$$

На уровне 6 нужно найти комбинацию $\mathcal{L}^3_{-2}$ и $\mathcal{L}^2_{-3}$. Оказывается, она равна

$$T_6 = \mathcal{L}^3_{-2}1 + \frac{c+2}{2}\mathcal{L}^2_{-3}1. \tag{20}$$

В случае $\Delta_{\mathrm{p}} = \Delta_{21}, \Delta_{12}$ величина $\bar\partial(\mathcal{L}^2_{-2}1)$ не является полной производной по z. Но можно найти ток на уровне 6:

$$T'_6 = \mathcal{L}^3_{-2}1 + \left(\frac{18}{2\Delta+1} + \Delta - 2\right)\mathcal{L}^2_{-3}, \quad \text{для } \Delta_{\mathrm{p}} = \Delta_{12}, \Delta_{21}. \tag{21}$$

Но $\Delta_{31} > 1$ при $c < 1$, так что остается случай $\Delta_{\rm p} = \Delta_{13}$, $\Phi_{\rm p} = \Phi_{13}$. В этом случае $\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}$ выражается через $\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2}$ и $\mathcal{L}^3_{-1}$, так что имеем

$$\begin{aligned} T_4 &= \mathcal{L}^2_{-2}1, \\ \Theta_2 &= -\pi\lambda\frac{1-\Delta_{13}}{2+\Delta_{13}}\left(2\Delta_{13}\mathcal{L}_{-2} + \frac{(1-\Delta_{13})(2-\Delta_{13})(3+\Delta_{13})}{6(1+\Delta_{13})}\right)\Phi_{13}. \end{aligned} \tag{19}$$

На уровне 6 нужно найти комбинацию $\mathcal{L}^3_{-2}$ и $\mathcal{L}^2_{-3}$. Оказывается, она равна

$$T_6 = \mathcal{L}^3_{-2}1 + \frac{c+2}{2}\mathcal{L}^2_{-3}1. \tag{20}$$

В случае $\Delta_{\rm p} = \Delta_{21}, \Delta_{12}$ величина $\bar\partial(\mathcal{L}^2_{-2}1)$ не является полной производной по z. Но можно найти ток на уровне 6:

$$T'_6 = \mathcal{L}^3_{-2}1 + \left(\frac{18}{2\Delta+1} + \Delta - 2\right)\mathcal{L}^2_{-3}, \quad \text{для } \Delta_{\rm p} = \Delta_{12}, \Delta_{21}. \tag{21}$$

Таким образом, высшие интегралы движения имеются в случаях

$$\Delta_{\rm p} = \Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{21}. \tag{22}$$

Но $\Delta_{31} > 1$ при $c < 1$, так что остается случай $\Delta_{\rm p} = \Delta_{13}$, $\Phi_{\rm p} = \Phi_{13}$. В этом случае $\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}$ выражается через $\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2}$ и $\mathcal{L}^3_{-1}$, так что имеем

$$\begin{aligned} T_4 &= \mathcal{L}^2_{-2}1, \\ \Theta_2 &= -\pi\lambda\frac{1-\Delta_{13}}{2+\Delta_{13}}\left(2\Delta_{13}\mathcal{L}_{-2} + \frac{(1-\Delta_{13})(2-\Delta_{13})(3+\Delta_{13})}{6(1+\Delta_{13})}\right)\Phi_{13}. \end{aligned} \tag{19}$$

На уровне 6 нужно найти комбинацию $\mathcal{L}^3_{-2}$ и $\mathcal{L}^2_{-3}$. Оказывается, она равна

$$T_6 = \mathcal{L}^3_{-2}1 + \frac{c+2}{2}\mathcal{L}^2_{-3}1. \tag{20}$$

В случае $\Delta_{\rm p} = \Delta_{21}, \Delta_{12}$ величина $\bar\partial(\mathcal{L}^2_{-2}1)$ не является полной производной по z. Но можно найти ток на уровне 6:

$$T'_6 = \mathcal{L}^3_{-2}1 + \left(\frac{18}{2\Delta+1} + \Delta - 2\right)\mathcal{L}^2_{-3}, \quad \text{для } \Delta_{\rm p} = \Delta_{12}, \Delta_{21}. \tag{21}$$

Таким образом, высшие интегралы движения имеются в случаях

$$\Delta_{\rm p} = \Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{21}. \tag{22}$$

Можно ли доказать существование интегралов движения на более высоких уровнях? Можно, но трудно. Я здесь приведу технический прием (А. Замолодчиков, 1989), позволяющий показать это для нескольких нижних уровней.

Пусть $\mathcal{H}_{mn}$ — неприводимое представление алгебры Вирасоро со старшим весом Δ_{mn}, а $(\mathcal{H}_{mn})_s$ — подпространство уровня s. Из размерности даются характерами

$$\chi_{mn}(q) = \sum_{s=0}^{\infty} q^s \dim(\mathcal{H}_{mn})_s, \tag{23}$$

вид которых известен из конформной теории поля.

Пусть $\mathcal{H}_{mn}$ — неприводимое представление алгебры Вирасоро со старшим весом Δ_{mn}, а $(\mathcal{H}_{mn})_s$ — подпространство уровня s. Из размерности даются характерами

$$\chi_{mn}(q) = \sum_{s=0}^{\infty} q^s \dim(\mathcal{H}_{mn})_s, \tag{23}$$

вид которых известен из конформной теории поля. Размерность пространств операторов, из которых мы можем построить T_{s+1} есть

$$k_s = \dim(\mathcal{H}_{11})_{s+1} - \dim(\mathcal{H}_{11})_s + \delta_{s0}. \tag{24}$$

Вычитание $\dim(\mathcal{H}_{11})_s$ исключает операторы вида $\mathcal{L}_{-1}(\cdots)$.

Пусть $\mathcal{H}_{mn}$ — неприводимое представление алгебры Вирасоро со старшим весом Δ_{mn}, а $(\mathcal{H}_{mn})_s$ — подпространство уровня s. Из размерности даются характерами

$$\chi_{mn}(q) = \sum_{s=0}^{\infty} q^s \dim(\mathcal{H}_{mn})_s, \tag{23}$$

вид которых известен из конформной теории поля. Размерность пространств операторов, из которых мы можем построить T_{s+1} есть

$$k_s = \dim(\mathcal{H}_{11})_{s+1} - \dim(\mathcal{H}_{11})_s + \delta_{s0}. \tag{24}$$

Вычитание $\dim(\mathcal{H}_{11})_s$ исключает операторы вида $\mathcal{L}_{-1}(\cdots)$. Для величин k_s имеем характер

$$\chi_0(q) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} k_s q^s = q^{-1}((1-q)\chi_{11}(q) + q - 1). \tag{25}$$

Пусть $\mathcal{H}_{mn}$ — неприводимое представление алгебры Вирасоро со старшим весом Δ_{mn}, а $(\mathcal{H}_{mn})_s$ — подпространство уровня s. Из размерности даются характерами

$$\chi_{mn}(q) = \sum_{s=0}^{\infty} q^s \dim(\mathcal{H}_{mn})_s, \tag{23}$$

вид которых известен из конформной теории поля. Размерность пространств операторов, из которых мы можем построить T_{s+1} есть

$$k_s = \dim(\mathcal{H}_{11})_{s+1} - \dim(\mathcal{H}_{11})_s + \delta_{s0}. \tag{24}$$

Вычитание $\dim(\mathcal{H}_{11})_s$ исключает операторы вида $\mathcal{L}_{-1}(\cdots)$. Для величин k_s имеем характер

$$\chi_0(q) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} k_s q^s = q^{-1}((1-q)\chi_{11}(q) + q - 1). \tag{25}$$

Теперь найдем количество уравнений, которые накладываются на коэффициенты в операторе T_{s+1}:

$$l_s = \dim(\mathcal{H}_{\mathrm{p}})_s - \dim(\mathcal{H}_{\mathrm{p}})_{s-1}. \tag{26}$$

Здесь мы снова количество операторов вида $\mathcal{L}_{-1}(\cdots)$. Эти величины заведомо завышены, потому что уравнения могут быть не независимы.

Пусть $\mathcal{H}_{mn}$ — неприводимое представление алгебры Вирасоро со старшим весом Δ_{mn}, а $(\mathcal{H}_{mn})_s$ — подпространство уровня s. Из размерности даются характерами

$$\chi_{mn}(q) = \sum_{s=0}^{\infty} q^s \dim(\mathcal{H}_{mn})_s, \tag{23}$$

вид которых известен из конформной теории поля. Размерность пространств операторов, из которых мы можем построить T_{s+1} есть

$$k_s = \dim(\mathcal{H}_{11})_{s+1} - \dim(\mathcal{H}_{11})_s + \delta_{s0}. \tag{24}$$

Вычитание $\dim(\mathcal{H}_{11})_s$ исключает операторы вида $\mathcal{L}_{-1}(\cdots)$. Для величин k_s имеем характер

$$\chi_0(q) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} k_s q^s = q^{-1}((1-q)\chi_{11}(q) + q - 1). \tag{25}$$

Теперь найдем количество уравнений, которые накладываются на коэффициенты в операторе T_{s+1}:

$$l_s = \dim(\mathcal{H}_{\mathrm{p}})_s - \dim(\mathcal{H}_{\mathrm{p}})_{s-1}. \tag{26}$$

Здесь мы снова количество операторов вида $\mathcal{L}_{-1}(\cdots)$. Эти величины заведомо завышены, потому что уравнения могут быть не независимы.
Соответствующий характер:

$$\chi_1(q) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} l_s q^s = (1-q)\chi_{\mathrm{p}}(q). \tag{27}$$

Найдем величины $\delta_s = k_s - l_s$, которые ограничивают количество интегралов движения снизу.

Найдем величины $\delta_s = k_s - l_s$, которые ограничивают количество интегралов движения снизу.
Для точек общего положения по c имеем

$$\chi_{mn}(q) = (1 - q^{mn}) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k}. \tag{28}$$

Найдем величины $\delta_s = k_s - l_s$, которые ограничивают количество интегралов движения снизу.
Для точек общего положения по c имеем

$$\chi_{mn}(q) = (1 - q^{mn}) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k}. \tag{28}$$

Тогда для $\Delta_{\mathrm{p}} = \Delta_{13}$ получаем

$$\chi_0(q) - \chi_1(q) = -1 + q - q^2 + q^3 - 2q^4 + q^5 - 3q^6 + q^7 - 4q^8 - 6q^{10} - 10q^{12} - 2q^{13} + O(q^{14}). \tag{29}$$

Мы видим, что $\delta_1 = \delta_3 = \delta_5 = \delta_7 = 1$, а все остальные $\delta_s \leq 0$. Значит, в модели есть по крайней мере восемь интегралов движения спинов $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7$.

Найдем величины $\delta_s = k_s - l_s$, которые ограничивают количество интегралов движения снизу.
Для точек общего положения по c имеем

$$\chi_{mn}(q) = (1 - q^{mn}) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k}. \tag{28}$$

Тогда для $\Delta_{\mathrm{p}} = \Delta_{13}$ получаем

$$\chi_0(q) - \chi_1(q) = -1 + q - q^2 + q^3 - 2q^4 + q^5 - 3q^6 + q^7 - 4q^8 - 6q^{10} - 10q^{12} - 2q^{13} + O(q^{14}). \tag{29}$$

Мы видим, что $\delta_1 = \delta_3 = \delta_5 = \delta_7 = 1$, а все остальные $\delta_s \leq 0$. Значит, в модели есть по крайней мере восемь интегралов движения спинов $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7$.
Для $\Delta_{\mathrm{p}} = \Delta_{12}, \Delta_{21}$ имеем

$$\chi_0(q) - \chi_1(q) = -1 + q - q^4 + q^5 - 2q^6 + q^7 - 2q^8 - 3q^10 + q^{11} - 6q^{12} - 6q^{14} - 3q^{15} + O(q^{16}). \tag{30}$$

Мы получаем $\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_{11} = 1$, то есть опять имеется по крайней мере восемь интегралов движения.

Система на цилиндре

Обсудим другой подход. Пусть система живет на цилиндре окружности R: $x^1 \sim x^1 + R$. Пусть $C_\perp$ — замкнутый контур вдоль оси x^1. Определим «невозмущенный» интеграл движения

$$I_s^{(0)} = \int_{C_\perp} dz\, T_{s+1}. \tag{31}$$

Обсудим другой подход. Пусть система живет на цилиндре окружности R: $x^1 \sim x^1 + R$. Пусть $C_\perp$ — замкнутый контур вдоль оси x^1. Определим «невозмущенный» интеграл движения

$$I_s^{(0)} = \int_{C_\perp} dz\, T_{s+1}. \tag{31}$$

Гамильтониан возмущения

$$H_{\mathrm{p}} = \lambda \int_0^R dx^1\, \Phi_{\mathrm{p}}(x). \tag{32}$$

Система на цилиндре

Обсудим другой подход. Пусть система живет на цилиндре окружности R: $x^1 \sim x^1 + R$. Пусть $C_\perp$ — замкнутый контур вдоль оси x^1. Определим «невозмущенный» интеграл движения

$$I_s^{(0)} = \int_{C_\perp} dz\, T_{s+1}. \tag{31}$$

Гамильтониан возмущения

$$H_{\mathrm{p}} = \lambda \int_0^R dx^1\, \Phi_{\mathrm{p}}(x). \tag{32}$$

Теперь перейдем к квантованию в координатах светового конуса: $\bar{z}$ будем рассматривать как время и зафиксируем: $\bar{z} = \bar{z}_0$. Тогда полный гамильтониан системы имеет вид

$$H_{\mathrm{p}}^{+}(\bar{z}_0) = \lambda \int_{C_\perp} dz\, \Phi_{\mathrm{p}}(z, \bar{z}_0). \tag{33}$$

Обсудим другой подход. Пусть система живет на цилиндре окружности R: $x^1 \sim x^1 + R$. Пусть $C_\perp$ — замкнутый контур вдоль оси x^1. Определим «невозмущенный» интеграл движения

$$I_s^{(0)} = \int_{C_\perp} dz\, T_{s+1}. \tag{31}$$

Гамильтониан возмущения

$$H_{\mathrm{p}} = \lambda \int_0^R dx^1\, \Phi_{\mathrm{p}}(x). \tag{32}$$

Теперь перейдем к квантованию в координатах светового конуса: $\bar{z}$ будем рассматривать как время и зафиксируем: $\bar{z} = \bar{z}_0$. Тогда полный гамильтониан системы имеет вид

$$H_{\mathrm{p}}^{+}(\bar{z}_0) = \lambda \int_{C_\perp} dz\, \Phi_{\mathrm{p}}(z, \bar{z}_0). \tag{33}$$

Условие $\mathcal{D}_1 T_s = \partial(\cdots)$ эквивалентно коммутативности невозмущенного интеграла движения с гамильтонианом

$$[I_s^{(0)}, H_{\mathrm{p}}^{+}] = 0. \tag{34}$$

Это уравнение можно решать в правом (голоморфном) секторе.

Чтобы определить действие генераторов алгебры Вирасоро на цилиндре, перейдем от цилиндра к плоскости:

$$\zeta = e^{-2\pi i\frac{z}{R}}, \qquad \bar{\zeta} = e^{2\pi i\frac{\bar{z}}{R}}. \tag{35}$$

Чтобы определить действие генераторов алгебры Вирасоро на цилиндре, перейдем от цилиндра к плоскости:

$$\zeta = e^{-2\pi i \frac{z}{R}}, \qquad \bar{\zeta} = e^{2\pi i \frac{\bar{z}}{R}}. \tag{35}$$

Тогда

$$\mathbb{L}_n = \oint \frac{d\zeta}{2\pi i} \zeta^{n+1} \tilde{T}(\zeta). \tag{36}$$

Генераторы алгебры Вирасоро на цилиндре

Чтобы определить действие генераторов алгебры Вирасоро на цилиндре, перейдем от цилиндра к плоскости:

$$\zeta = e^{-2\pi i \frac{z}{R}}, \qquad \bar{\zeta} = e^{2\pi i \frac{\bar{z}}{R}}. \tag{35}$$

Тогда

$$\mathbb{L}_n = \oint \frac{d\zeta}{2\pi i} \zeta^{n+1} \tilde{T}(\zeta). \tag{36}$$

В силу закона преобразования

$$T(z) \to (f'(z))^2 T(f(z)) + \frac{c}{12}\{f(z), z\}, \qquad \{f(z), z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2, \tag{37}$$

Чтобы определить действие генераторов алгебры Вирасоро на цилиндре, перейдем от цилиндра к плоскости:

$$\zeta = e^{-2\pi i \frac{z}{R}}, \qquad \bar{\zeta} = e^{2\pi i \frac{\bar{z}}{R}}. \tag{35}$$

Тогда

$$\mathbb{L}_n = \oint \frac{d\zeta}{2\pi i}\, \zeta^{n+1} \tilde{T}(\zeta). \tag{36}$$

В силу закона преобразования

$$T(z) \to (f'(z))^2 T(f(z)) + \frac{c}{12}\{f(z), z\}, \qquad \{f(z), z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2, \tag{37}$$

имеем

$$T(z) = \left(\frac{2\pi i}{R}\right)^2 \left(\zeta^2 \tilde{T}(\zeta) - \frac{c}{24}\right). \tag{38}$$

Чтобы определить действие генераторов алгебры Вирасоро на цилиндре, перейдем от цилиндра к плоскости:

$$\zeta = e^{-2\pi i \frac{z}{R}}, \qquad \bar{\zeta} = e^{2\pi i \frac{\bar{z}}{R}}. \tag{35}$$

Тогда

$$\mathbb{L}_n = \oint \frac{d\zeta}{2\pi i}\, \zeta^{n+1} \tilde{T}(\zeta). \tag{36}$$

В силу закона преобразования

$$T(z) \to (f'(z))^2 T(f(z)) + \frac{c}{12}\{f(z), z\}, \qquad \{f(z), z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2, \tag{37}$$

имеем

$$T(z) = \left(\frac{2\pi i}{R}\right)^2 \left(\zeta^2 \tilde{T}(\zeta) - \frac{c}{24}\right). \tag{38}$$

Следовательно,

$$\mathbb{T}_n \equiv \int_{C_\perp} dz\, e^{-2\pi i n \frac{z}{R}} T(z) = -\frac{(2\pi)^2}{R}\left(\mathbb{L}_n - \frac{c}{24}\delta_{n0}\right). \tag{39}$$

Чтобы определить действие генераторов алгебры Вирасоро на цилиндре, перейдем от цилиндра к плоскости:

$$\zeta = e^{-2\pi i \frac{z}{R}}, \qquad \bar{\zeta} = e^{2\pi i \frac{\bar{z}}{R}}. \tag{35}$$

Тогда

$$\mathbb{L}_n = \oint \frac{d\zeta}{2\pi i}\, \zeta^{n+1} \tilde{T}(\zeta). \tag{36}$$

В силу закона преобразования

$$T(z) \to (f'(z))^2 T(f(z)) + \frac{c}{12}\{f(z), z\}, \qquad \{f(z), z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2, \tag{37}$$

имеем

$$T(z) = \left(\frac{2\pi i}{R}\right)^2 \left(\zeta^2 \tilde{T}(\zeta) - \frac{c}{24}\right). \tag{38}$$

Следовательно,

$$\mathbb{T}_n \equiv \int_{C_\perp} dz\, e^{-2\pi i n \frac{z}{R}} T(z) = -\frac{(2\pi)^2}{R}\left(\mathbb{L}_n - \frac{c}{24}\delta_{n0}\right). \tag{39}$$

Преобразуя коммутационное соотношение для $[L_n, \Phi_\Delta]$, находим

$$[\mathbb{L}_n, \Phi_\Delta(x)] = \zeta^n \left(\frac{iR}{2\pi}\partial\Phi(x) + n\Delta\Phi_\Delta(x)\right). \tag{40}$$

Простейший интеграл движения легко найти:

$$I_1^{(0)} = \mathbb{T}_0 = -\frac{(2\pi)^2}{R}\left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24}\right). \tag{41}$$

Невозмущенные интегралы движения на цилиндре

Простейший интеграл движения легко найти:

$$I_1^{(0)} = \mathbb{T}_0 = -\frac{(2\pi)^2}{R}\left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24}\right). \tag{41}$$

Действительно,

$$[\mathbb{T}_0, H_{\mathrm{p}}^+] = -2\pi i\lambda \int_{C_\perp} dz\, \partial\Phi_{\mathrm{p}}(z,\bar{z}_0) = 0.$$

Простейший интеграл движения легко найти:

$$I_1^{(0)} = \mathbb{T}_0 = -\frac{(2\pi)^2}{R}\left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24}\right). \tag{41}$$

Действительно,

$$[\mathbb{T}_0, H_{\mathrm{p}}^{+}] = -2\pi i\lambda \int_{C_\perp} dz\, \partial\Phi_{\mathrm{p}}(z, \bar{z}_0) = 0.$$

Рассмотрим следующий интеграл движения

$$I_3^{(0)} = \mathcal{L}_{-2}^2 1 = \int_{C_\perp} dz\, \mathcal{L}_{-2} T(z) = \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} \frac{T(w)T(z)}{w - z} \tag{42}$$

Простейший интеграл движения легко найти:

$$I_1^{(0)} = \mathbb{T}_0 = -\frac{(2\pi)^2}{R}\left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24}\right). \tag{41}$$

Действительно,

$$[\mathbb{T}_0, H_\mathrm{p}^+] = -2\pi i\lambda \int_{C_\perp} dz\, \partial\Phi_\mathrm{p}(z,\bar{z}_0) = 0.$$

Рассмотрим следующий интеграл движения

$$I_3^{(0)} = \mathcal{L}_{-2}^2 1 = \int_{C_\perp} dz\, \mathcal{L}_{-2}T(z) = \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i}\,\frac{T(w)T(z)}{w-z} \tag{42}$$

Довольно громоздким вычислением можно получить

$$\begin{aligned} I_3^{(0)} &= \frac{1}{R}\left(\mathbb{T}_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{T}_{-n}\mathbb{T}_n\right) + \frac{2\pi}{3R^2}\mathbb{T}_0 + \frac{\pi^4 c}{90R^3} \\ &= \frac{(2\pi)^4}{R^3}\left(\left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24}\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{L}_{-n}\mathbb{L}_n - \frac{1}{6}\left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24}\right) + \frac{c}{1440}\right). \end{aligned} \tag{43}$$

Простейший интеграл движения легко найти:

$$I_1^{(0)} = \mathbb{T}_0 = -\frac{(2\pi)^2}{R}\left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24}\right). \tag{41}$$

Действительно,

$$[\mathbb{T}_0, H_\mathrm{p}^+] = -2\pi i\lambda \int_{C_\perp} dz\, \partial\Phi_\mathrm{p}(z, \bar{z}_0) = 0.$$

Рассмотрим следующий интеграл движения

$$I_3^{(0)} = \mathcal{L}_{-2}^2 1 = \int_{C_\perp} dz\, \mathcal{L}_{-2} T(z) = \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i}\, \frac{T(w)T(z)}{w - z} \tag{42}$$

Довольно громоздким вычислением можно получить

$$\begin{aligned} I_3^{(0)} &= \frac{1}{R}\left(\mathbb{T}_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{T}_{-n}\mathbb{T}_n\right) + \frac{2\pi}{3R^2}\mathbb{T}_0 + \frac{\pi^4 c}{90R^3} \\ &= \frac{(2\pi)^4}{R^3}\left(\left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24}\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{L}_{-n}\mathbb{L}_n - \frac{1}{6}\left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24}\right) + \frac{c}{1440}\right). \end{aligned} \tag{43}$$

В этом подходе не совсем просто вывести, что $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{L}_{-n}\mathbb{L}_n, H_\mathrm{p}^+\right] = 0$, зато $[I_3^{(0)}, I_1^{(0)}] = 0$ получается мгновенно.

Далее можно строить серию коммутирующих между собой интегралов движения вида

$$I_s^{(0)} = \int_{C_\perp} dz \left(\mathcal{L}_{-2}^{\frac{s+1}{2}} + \cdots \right) 1$$

$$\sim \sum_{n_1+\cdots+n_s=0} :\mathbb{L}_{n_1}\cdots\mathbb{L}_{n_s}: + \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{n_1+\cdots+n_k=0} A_{n_1\ldots n_k} :\mathbb{L}_{n_1}\cdots\mathbb{L}_{n_k}:,$$

Существование такой серии доказано разными способами Фейгиным и Френкелем (1993) и Бажановым, Лукьяновым и А. Замолодчиковым (1996). Коммутация их с H_p^+ следует из невырожденности спектра этого оператора и $I_s^{(0)}$ с $s > 3$. Из этой коммутации уже следует существование I_s.

Сводка интегралов движения для минимальных моделей

В точках общего положения имеются по одному интегралу I_s со спинами

$$\begin{aligned} & s=2n-1, \quad n\in\mathbb{Z} \quad \text{для } \Phi_{\mathrm{p}}=\Phi_{13}; \\ & s=6n\pm 1, \quad n\in\mathbb{Z} \quad \text{для } \Phi_{\mathrm{p}}=\Phi_{12},\Phi_{21}. \end{aligned} \tag{44}$$

В частности, эти ответы верны для унитарных моделей с $c=1-6/p(p+1)$ для $p\geq 3$ в случае возмущения Φ_{13} и для $p\geq 6$ в случае возмущений Φ_{12},Φ_{21}.

В точках общего положения имеются по одному интегралу I_s со спинами

$$\begin{aligned} s &= 2n-1, \quad n\in\mathbb{Z} \quad \text{для } \Phi_{\mathrm{p}} = \Phi_{13}; \\ s &= 6n\pm 1, \quad n\in\mathbb{Z} \quad \text{для } \Phi_{\mathrm{p}} = \Phi_{12}, \Phi_{21}. \end{aligned} \tag{44}$$

В частности, эти ответы верны для унитарных моделей с $c = 1 - 6/p(p+1)$ для $p \geq 3$ в случае возмущения Φ_{13} и для $p \geq 6$ в случае возмущений Φ_{12}, Φ_{21}. В случае Φ_{12} для моделей с $p = 3, 4, 5$ имеется особый набор интегралов движения:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathrm{p}} = \Phi_{12} \quad & p = 3: \quad s = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \pmod{30}; \\ & p = 4: \quad s = 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17 \pmod{18}; \\ & p = 5: \quad s = 1, 4, 5, 7, 8, 11 \pmod{12}. \end{aligned} \tag{45}$$

В точках общего положения имеются по одному интегралу I_s со спинами

$$\begin{aligned} s &= 2n-1, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{для } \Phi_{\mathrm{p}} = \Phi_{13}; \\ s &= 6n \pm 1, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{для } \Phi_{\mathrm{p}} = \Phi_{12}, \Phi_{21}. \end{aligned} \tag{44}$$

В частности, эти ответы верны для унитарных моделей с $c = 1 - 6/p(p+1)$ для $p \geq 3$ в случае возмущения Φ_{13} и для $p \geq 6$ в случае возмущений Φ_{12}, Φ_{21}. В случае Φ_{12} для моделей с $p = 3, 4, 5$ имеется особый набор интегралов движения:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathrm{p}} = \Phi_{12} \quad & p = 3: \quad s = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \pmod{30}; \\ & p = 4: \quad s = 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17 \pmod{18}; \\ & p = 5: \quad s = 1, 4, 5, 7, 8, 11 \pmod{12}. \end{aligned} \tag{45}$$

Нас будут также интересовать неунитарные модели $c = 1 - 6(p' - p)^2/pp'$ с $p = 2$, $p' = 2N + 1$. Для них

$$c = 1 - \frac{3(2N-1)^2}{(2N+1)}, \ \Phi_{\mathrm{p}} = \Phi_{13}: \quad s \in (2\mathbb{Z} + 1) \setminus ((2N-1)\mathbb{Z}). \tag{46}$$

Задача 1. Используя разложение

$$\frac{1}{z} - \operatorname{cth} z = \frac{z}{3} + \frac{z^3}{45} + O(z^5),$$

запишите

$$I_3^{(0)} = \frac{\pi}{iR} \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} \frac{T(w)T(z)}{w - z}$$

на цилиндре в виде, уважающем периодичность с периодом R.

Задача 1. Используя разложение

$$\frac{1}{z} - \operatorname{cth} z = \frac{z}{3} + \frac{z^3}{45} + O(z^5),$$

запишите

$$I_3^{(0)} = \frac{\pi}{iR} \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} \frac{T(w)T(z)}{w-z}$$

на цилиндре в виде, уважающем периодичность с периодом R.

$$\begin{aligned}
I_3^{(0)} &= \frac{\pi}{iR} \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} T(w)T(z) \left(\operatorname{cth} \frac{\pi}{iR}(w-z) + \frac{i\pi}{3R}(w-z) + \frac{i\pi^3}{45R^3}(w-z)^3 \right) \\
&= \frac{\pi}{iR} \int_{C_\perp} dz \left(\oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR}(w-z) + \frac{2i\pi}{3R} T(z) + \frac{i\pi^3 c}{90R^3} \right) \\
&= \frac{\pi}{iR} \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR}(w-z) + \frac{2\pi}{3R^2} \mathbb{T}_0 + \frac{\pi^4 c}{90R^3}.
\end{aligned}$$

Задача 2. Выразите интеграл по C_z через интегралы по $C_\perp$.

Задача 2. Выразите интеграл по C_z через интегралы по $C_\perp$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2R}\int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw\, [T(w), T(z)] \operatorname{cth}\frac{\pi}{iR}(w-z) \\
&= \frac{1}{2R}\int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw\, \left(T(w)T(z) \operatorname{cth}\frac{\pi}{iR}(w-z) + T(z)T(w) \operatorname{cth}\frac{\pi}{iR}(z-w)\right) \\
&\qquad = \frac{1}{R}\int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw\, T(w)T(z) \operatorname{cth}\frac{i\pi}{R}(z-w).
\end{aligned}
$$

Задача 2. Выразите интеграл по C_z через интегралы по $C_\perp$.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2R}\int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw\,[T(w),T(z)]\,\mathrm{cth}\,\frac{\pi}{iR}(w-z)\\
&= \frac{1}{2R}\int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw\,\left(T(w)T(z)\,\mathrm{cth}\,\frac{\pi}{iR}(w-z) + T(z)T(w)\,\mathrm{cth}\,\frac{\pi}{iR}(z-w)\right)\\
&\qquad\qquad = \frac{1}{R}\int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw\,T(w)T(z)\,\mathrm{cth}\,\frac{i\pi}{R}(z-w).
\end{aligned}$$

Задача 3. Разложите получившееся подынтегральное выражение по степеням $e^{\pm\frac{2\pi i}{R}(z-w)}$ и выразите ответ через операторы $\mathbb{T}_n$.

Задача 2. Выразите интеграл по C_z через интегралы по $C_\perp$.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2R}\int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw\, [T(w), T(z)] \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR}(w-z)\\ &= \frac{1}{2R}\int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw\, \left(T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR}(w-z) + T(z)T(w) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR}(z-w)\right)\\ &\qquad\qquad = \frac{1}{R}\int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw\, T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{i\pi}{R}(z-w).\end{aligned}$$

Задача 3. Разложите получившееся подынтегральное выражение по степеням $e^{\pm\frac{2\pi i}{R}(z-w)}$ и выразите ответ через операторы $\mathbb{T}_n$.

Из

$$\operatorname{cth} z = \frac{1+e^{-2z}}{1-e^{-2z}} = (1+e^{-2z})\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nz} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nz}.$$

получаем

$$I_3^{(0)} = \frac{1}{R}\left(\mathbb{T}_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{T}_{-n}\mathbb{T}_n\right) + \frac{2\pi}{3R^2}\mathbb{T}_0 + \frac{\pi^4 c}{90R^3}$$