

Лекция 7.  
Решение модели Тирринга методом анзаца Бете:  
построение собственных состояний

Михаил Лашкевич

Действие

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \left( \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m_0)\psi - \frac{\pi g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 \right) \quad (1)$$

с

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} = \sigma^2, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix} = i\sigma^1. \quad (2)$$

Действие

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \left( \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m_0)\psi - \frac{\pi g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 \right) \quad (1)$$

с

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} = \sigma^2, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix} = i\sigma^1. \quad (2)$$

Гамильтониан

$$H = \int dx \left( -i\psi^+ \sigma^3 \partial_x \psi + m_0 \psi^+ \sigma^2 \psi + 2g\psi_+^+ \psi_+ \psi_-^+ \psi_- \right) \quad (3)$$

Действие

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \left( \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m_0)\psi - \frac{\pi g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 \right) \quad (1)$$

с

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} = \sigma^2, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix} = i\sigma^1. \quad (2)$$

Гамильтониан

$$H = \int dx \left( -i\psi^+ \sigma^3 \partial_x \psi + m_0 \psi^+ \sigma^2 \psi + 2g\psi_+^+ \psi_+ \psi_-^+ \psi_- \right) \quad (3)$$

с коммутационными соотношениями

$$\psi_{\alpha'}^+(x')\psi_\alpha(x) + \psi_\alpha(x)\psi_{\alpha'}^+(x') = \delta_{\alpha'\alpha}\delta(x' - x). \quad (4)$$

Действие

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \left( \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m_0)\psi - \frac{\pi g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 \right) \quad (1)$$

с

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} = \sigma^2, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix} = i\sigma^1. \quad (2)$$

Гамильтониан

$$H = \int dx \left( -i\psi^+ \sigma^3 \partial_x \psi + m_0 \psi^+ \sigma^2 \psi + 2g\psi_+^+ \psi_+ \psi_-^+ \psi_- \right) \quad (3)$$

с коммутационными соотношениями

$$\psi_{\alpha'}^+(x')\psi_\alpha(x) + \psi_\alpha(x)\psi_{\alpha'}^+(x') = \delta_{\alpha'\alpha}\delta(x' - x). \quad (4)$$

Сохраняющиеся заряды: импульс  $P$  и оператор числа частиц  $Q$  имеют вид

$$P = -i \int dx \psi^+ \partial_x \psi, \quad Q = \int dx \psi^+ \psi. \quad (5)$$

# Свободный фермион. Картина Дирака

Рассмотрим случай  $g = 0$ : свободный дираковский фермион.

## Свободный фермион. Картина Дирака

Рассмотрим случай  $g = 0$ : свободный дираковский фермион.  
Определим «реперное» состояние  $|\Omega\rangle$ :

$$\psi_\alpha(x)|\Omega\rangle = 0, \quad \langle\Omega|\psi_\alpha^\dagger(x) = 0. \quad (6)$$

# Свободный фермион. Картина Дирака

Рассмотрим случай  $g = 0$ : свободный дираковский фермион.  
Определим «реперное» состояние  $|\Omega\rangle$ :

$$\psi_\alpha(x)|\Omega\rangle = 0, \quad \langle\Omega|\psi_\alpha^\dagger(x) = 0. \quad (6)$$

« $N$ -частичное» состояние:

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\alpha_1}^\dagger(x_1) \dots \psi_{\alpha_N}^\dagger(x_N) |\Omega\rangle. \quad (7)$$



# Свободный фермион. Картина Дирака

Рассмотрим случай  $g = 0$ : свободный дираковский фермион.  
Определим «реперное» состояние  $|\Omega\rangle$ :

$$\psi_\alpha(x)|\Omega\rangle = 0, \quad \langle\Omega|\psi_\alpha^\dagger(x) = 0. \quad (6)$$

« $N$ -частичное» состояние:

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\alpha_1}^\dagger(x_1) \dots \psi_{\alpha_N}^\dagger(x_N) |\Omega\rangle. \quad (7)$$

$$Q|\chi_N\rangle = N|\chi_N\rangle \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} \simeq \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N, \quad \mathcal{H}_N = \{v \in \mathcal{H} \mid Qv = Nv\}. \quad (8)$$

# Свободный фермион. Картина Дирака

Рассмотрим случай  $g = 0$ : свободный дираковский фермион.  
Определим «реперное» состояние  $|\Omega\rangle$ :

$$\psi_\alpha(x)|\Omega\rangle = 0, \quad \langle\Omega|\psi_\alpha^+(x) = 0. \quad (6)$$

« $N$ -частичное» состояние:

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\alpha_1}^+(x_1) \dots \psi_{\alpha_N}^+(x_N) |\Omega\rangle. \quad (7)$$

$$Q|\chi_N\rangle = N|\chi_N\rangle \Rightarrow \mathcal{H} \simeq \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N, \quad \mathcal{H}_N = \{v \in \mathcal{H} \mid Qv = Nv\}. \quad (8)$$

Определим действие  $\hat{H}_N$  оператора  $H$  на волновых функциях:

$$H|\chi_N\rangle = \int d^N x (\hat{H}_N \chi)^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\alpha_1}^+(x_1) \dots \psi_{\alpha_N}^+(x_N) |\Omega\rangle.$$

# Свободный фермион. Картина Дирака

Рассмотрим случай  $g = 0$ : свободный дираковский фермион.  
Определим «реперное» состояние  $|\Omega\rangle$ :

$$\psi_\alpha(x)|\Omega\rangle = 0, \quad \langle\Omega|\psi_\alpha^+(x) = 0. \quad (6)$$

« $N$ -частичное» состояние:

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\alpha_1}^+(x_1) \dots \psi_{\alpha_N}^+(x_N) |\Omega\rangle. \quad (7)$$

$$Q|\chi_N\rangle = N|\chi_N\rangle \Rightarrow \mathcal{H} \simeq \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N, \quad \mathcal{H}_N = \{v \in \mathcal{H} \mid Qv = Nv\}. \quad (8)$$

Определим действие  $\hat{H}_N$  оператора  $H$  на волновых функциях:

$$H|\chi_N\rangle = \int d^N x (\hat{H}_N \chi)^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\alpha_1}^+(x_1) \dots \psi_{\alpha_N}^+(x_N) |\Omega\rangle.$$

Явно имеем

$$\hat{H}_N = \sum_{k=1}^N (-i\sigma_k^3 \partial_{x_k} + m_0 \sigma_k^2),$$

где  $\sigma_k^i$  действует на пространствах  $k$ -й частицы:

$$(\sigma_k^i \chi)^{\alpha_1 \dots \alpha_k \dots \alpha_N} = \sum_{\alpha'_k} (\sigma_k^i)_{\alpha'_k}^{\alpha_k} \chi^{\alpha_1 \dots \alpha'_k \dots \alpha_N}$$

При  $N = 1$  волновая функция имеет вид

$$\chi_\lambda(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda/2} \\ ie^{-\lambda/2} \end{pmatrix} e^{ixm_0 \operatorname{sh} \lambda}. \quad (9)$$

При  $N = 1$  волновая функция имеет вид

$$\chi_\lambda(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda/2} \\ ie^{-\lambda/2} \end{pmatrix} e^{ixm_0 \operatorname{sh} \lambda}. \quad (9)$$

Для общих  $N$  волновая функция дается слэтеровским детерминантом

$$\chi_{\lambda_1 \dots \lambda_N}^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \prod_{k=1}^N \chi_{\lambda_k}^{\alpha_{\sigma k}}(x_{\sigma k}). \quad (10)$$

Энергия  $N$ -частичного состояния равна

$$E_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \sum_{k=1}^N \epsilon(\lambda_k), \quad \epsilon(\lambda) = m_0 \operatorname{ch} \lambda. \quad (11)$$

При  $N = 1$  волновая функция имеет вид

$$\chi_\lambda(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda/2} \\ ie^{-\lambda/2} \end{pmatrix} e^{ixm_0 \operatorname{sh} \lambda}. \quad (9)$$

Для общих  $N$  волновая функция дается слэтеровским детерминантом

$$\chi_{\lambda_1 \dots \lambda_N}^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \prod_{k=1}^N \chi_{\lambda_k}^{\alpha_{\sigma k}}(x_{\sigma k}). \quad (10)$$

Энергия  $N$ -частичного состояния равна

$$E_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \sum_{k=1}^N \epsilon(\lambda_k), \quad \epsilon(\lambda) = m_0 \operatorname{ch} \lambda. \quad (11)$$

Периодическое граничное условие

$$\chi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N}(x_1 + L, x_2, \dots, x_N) = \chi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N}(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

приводит к уравнению

$$e^{im_0 L \operatorname{sh} \lambda_k} = 1, \quad k = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Прологарифмируем последнее уравнение:

$$\text{sh } \lambda_k = \frac{2\pi n_k}{m_0 L}, \quad n_k \in \mathbb{Z}.$$

Прологарифмируем последнее уравнение:

$$\operatorname{sh} \lambda_k = \frac{2\pi n_k}{m_0 L}, \quad n_k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно

$$\lambda_k \in \begin{cases} \mathbb{R} & \Rightarrow \epsilon(\lambda_k) > 0; \\ \mathbb{R} + i\pi & \Rightarrow \epsilon(\lambda_k) < 0. \end{cases}$$

В основном состоянии одночастичные состояния с  $\epsilon(\lambda_k) < 0$  должны быть заполнены.



Прологарифмируем последнее уравнение:

$$\operatorname{sh} \lambda_k = \frac{2\pi n_k}{m_0 L}, \quad n_k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно

$$\lambda_k \in \begin{cases} \mathbb{R} & \Rightarrow \epsilon(\lambda_k) > 0; \\ \mathbb{R} + i\pi & \Rightarrow \epsilon(\lambda_k) < 0. \end{cases}$$

В основном состоянии одночастичные состояния с  $\epsilon(\lambda_k) < 0$  должны быть заполнены. Положим

$$\lambda_k = i\pi + \xi_k, \quad \xi_k \in \mathbb{R}.$$

Мы должны ограничить зону снизу

$$\epsilon(\lambda_k) \geq -\Lambda \quad \Rightarrow \quad -\Theta < \xi_k < \Theta, \quad \Theta \simeq \log \frac{\Lambda}{m_0}. \quad (13)$$

Прологарифмируем последнее уравнение:

$$\operatorname{sh} \lambda_k = \frac{2\pi n_k}{m_0 L}, \quad n_k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно

$$\lambda_k \in \begin{cases} \mathbb{R} & \Rightarrow \epsilon(\lambda_k) > 0; \\ \mathbb{R} + i\pi & \Rightarrow \epsilon(\lambda_k) < 0. \end{cases}$$

В основном состоянии одночастичные состояния с  $\epsilon(\lambda_k) < 0$  должны быть заполнены. Положим

$$\lambda_k = i\pi + \xi_k, \quad \xi_k \in \mathbb{R}.$$

Мы должны ограничить зону снизу

$$\epsilon(\lambda_k) \geq -\Lambda \quad \Rightarrow \quad -\Theta < \xi_k < \Theta, \quad \Theta \simeq \log \frac{\Lambda}{m_0}. \quad (13)$$

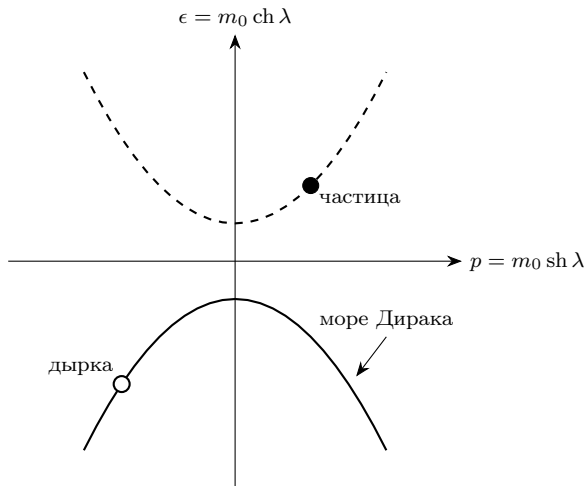
В термодинамическом пределе  $L \rightarrow \infty$  вакуумная энергия равна

$$E_0 = -L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} \rho(\xi) m_0 \operatorname{ch} \xi, \quad \rho(\xi) = \frac{2\pi}{L} \left| \frac{dn}{d\xi} \right| = m_0 \operatorname{ch} \xi.$$

Здесь  $\rho(\xi)$  — **спектральная плотность состояний** валентной зоны.

Имеется два типа возбуждений:

- Частицы:  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ ;
- Античастицы или дырки: отсутствие корня  $\lambda_k = i\pi + \xi_k$ .



# Взаимодействие: гамильтониан и разрывная волновая функция

При  $g \neq 0$  имеем

$$\hat{H}_N = \sum_{k=1}^N (-i\sigma_k^3 \partial_{x_k} + m_0 \sigma_k^2) + \pi g \sum_{k < l}^N \delta(x_k - x_l) (1 - \sigma_k^3 \sigma_l^3). \quad (14)$$

# Взаимодействие: гамильтониан и разрывная волновая функция

При  $g \neq 0$  имеем

$$\hat{H}_N = \sum_{k=1}^N (-i\sigma_k^3 \partial_{x_k} + m_0 \sigma_k^2) + \pi g \sum_{k < l}^N \delta(x_k - x_l) (1 - \sigma_k^3 \sigma_l^3). \quad (14)$$

Здесь

$$\frac{1}{2} (1 \otimes 1 - \sigma^3 \otimes \sigma^3)_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha'_1 \alpha'_2} = \delta_{\alpha_1}^{\alpha'_1} \delta_{\alpha_2}^{\alpha'_2} \delta_{\alpha_1, -\alpha_2}. \quad (15)$$

# Взаимодействие: гамильтониан и разрывная волновая функция

При  $g \neq 0$  имеем

$$\hat{H}_N = \sum_{k=1}^N (-i\sigma_k^3 \partial_{x_k} + m_0 \sigma_k^2) + \pi g \sum_{k < l}^N \delta(x_k - x_l) (1 - \sigma_k^3 \sigma_l^3). \quad (14)$$

Здесь

$$\frac{1}{2} (1 \otimes 1 - \sigma^3 \otimes \sigma^3)_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha'_1 \alpha'_2} = \delta_{\alpha_1}^{\alpha'_1} \delta_{\alpha_2}^{\alpha'_2} \delta_{\alpha_1, -\alpha_2}. \quad (15)$$

Член взаимодействия в гамильтониане (14) плохо определен. В самом деле, волновая функция **разрывна** при  $x_k = x_l$  потому что уравнение Шрёдингера здесь является уравнением **первого порядка**.

# Взаимодействие: гамильтониан и разрывная волновая функция

При  $g \neq 0$  имеем

$$\hat{H}_N = \sum_{k=1}^N (-i\sigma_k^3 \partial_{x_k} + m_0 \sigma_k^2) + \pi g \sum_{k < l}^N \delta(x_k - x_l) (1 - \sigma_k^3 \sigma_l^3). \quad (14)$$

Здесь

$$\frac{1}{2} (1 \otimes 1 - \sigma^3 \otimes \sigma^3)_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha'_1 \alpha'_2} = \delta_{\alpha_1}^{\alpha'_1} \delta_{\alpha_2}^{\alpha'_2} \delta_{\alpha_1, -\alpha_2}. \quad (15)$$

Член взаимодействия в гамильтониане (14) плохо определен. В самом деле, волновая функция **разрывна** при  $x_k = x_l$  потому что уравнение Шрёдингера здесь является уравнением **первого порядка**. Рассмотрим простое уравнение

$$f'(x) - c\delta(x)f(x) = g(x, f(x))$$

# Взаимодействие: гамильтониан и разрывная волновая функция

При  $g \neq 0$  имеем

$$\hat{H}_N = \sum_{k=1}^N (-i\sigma_k^3 \partial_{x_k} + m_0 \sigma_k^2) + \pi g \sum_{k < l}^N \delta(x_k - x_l) (1 - \sigma_k^3 \sigma_l^3). \quad (14)$$

Здесь

$$\frac{1}{2} (1 \otimes 1 - \sigma^3 \otimes \sigma^3)_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha'_1 \alpha'_2} = \delta_{\alpha_1}^{\alpha'_1} \delta_{\alpha_2}^{\alpha'_2} \delta_{\alpha_1, -\alpha_2}. \quad (15)$$

Член взаимодействия в гамильтониане (14) плохо определен. В самом деле, волновая функция **разрывна** при  $x_k = x_l$  потому что уравнение Шрёдингера здесь является уравнением **первого порядка**. Рассмотрим простое уравнение

$$f'(x) - c\delta(x)f(x) = g(x, f(x))$$

Давайте как-нибудь регуляризуем дельта-функцию:

$$f'(x) - c\delta_a(x)f(x) = g(x, f(x)), \quad \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x) = \delta(x), \quad \text{supp } \delta_a = [-a, a]. \quad (16)$$



При  $g \neq 0$  имеем

$$\hat{H}_N = \sum_{k=1}^N (-i\sigma_k^3 \partial_{x_k} + m_0 \sigma_k^2) + \pi g \sum_{k < l}^N \delta(x_k - x_l) (1 - \sigma_k^3 \sigma_l^3). \quad (14)$$

Здесь

$$\frac{1}{2} (1 \otimes 1 - \sigma^3 \otimes \sigma^3)_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha'_1 \alpha'_2} = \delta_{\alpha_1}^{\alpha'_1} \delta_{\alpha_2}^{\alpha'_2} \delta_{\alpha_1, -\alpha_2}. \quad (15)$$

Член взаимодействия в гамильтониане (14) плохо определен. В самом деле, волновая функция **разрывна** при  $x_k = x_l$  потому что уравнение Шрёдингера здесь является уравнением **первого порядка**. Рассмотрим простое уравнение

$$f'(x) - c\delta(x)f(x) = g(x, f(x))$$

Давайте как-нибудь регуляризуем дельта-функцию:

$$f'(x) - c\delta_a(x)f(x) = g(x, f(x)), \quad \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x) = \delta(x), \quad \text{supp } \delta_a = [-a, a]. \quad (16)$$

Пусть  $\delta_a(x) = \epsilon'_a(x)$ . Then

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = c\epsilon'_a(x) + \frac{g(x, f(x))}{f(x)} \Rightarrow f(x) = \text{const } e^{c\epsilon_a(x)}.$$

# Взаимодействие: гамильтониан и разрывная волновая функция

При  $g \neq 0$  имеем

$$\hat{H}_N = \sum_{k=1}^N (-i\sigma_k^3 \partial_{x_k} + m_0 \sigma_k^2) + \pi g \sum_{k < l}^N \delta(x_k - x_l) (1 - \sigma_k^3 \sigma_l^3). \quad (14)$$

Здесь

$$\frac{1}{2} (1 \otimes 1 - \sigma^3 \otimes \sigma^3)_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha'_1 \alpha'_2} = \delta_{\alpha_1}^{\alpha'_1} \delta_{\alpha_2}^{\alpha'_2} \delta_{\alpha_1, -\alpha_2}. \quad (15)$$

Член взаимодействия в гамильтониане (14) плохо определен. В самом деле, волновая функция **разрывна** при  $x_k = x_l$  потому что уравнение Шрёдингера здесь является уравнением **первого порядка**. Рассмотрим простое уравнение

$$f'(x) - c\delta(x)f(x) = g(x, f(x))$$

Давайте как-нибудь регуляризуем дельта-функцию:

$$f'(x) - c\delta_a(x)f(x) = g(x, f(x)), \quad \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x) = \delta(x), \quad \text{supp } \delta_a = [-a, a]. \quad (16)$$

Пусть  $\delta_a(x) = \epsilon'_a(x)$ . Then

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = c\epsilon'_a(x) + \frac{\cancel{g(x, f(x))}}{\cancel{f(x)}} \Rightarrow f(x) = \text{const } e^{c\epsilon_a(x)}.$$

$$f(+a) = e^c f(-a) \xrightarrow{a \rightarrow 0} f(+0) = e^c f(-0). \quad (17)$$

Пусть

$$\chi_{\lambda_1 \lambda_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12} \chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{21} \chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{for } x_1 < x_2, \\ A_{21} \chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{12} \chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{for } x_1 > x_2. \end{cases} \quad (18)$$

Пусть

$$\chi_{\lambda_1 \lambda_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12} \chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{21} \chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{for } x_1 < x_2, \\ A_{21} \chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{12} \chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{for } x_1 > x_2. \end{cases} \quad (18)$$

Эта функция антисимметрична

$$\chi_{\lambda_1 \lambda_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2) = -\chi_{\lambda_1 \lambda_2}^{\alpha_2 \alpha_1}(x_2, x_1).$$

Пусть

$$\chi_{\lambda_1 \lambda_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12} \chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{21} \chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{for } x_1 < x_2, \\ A_{21} \chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{12} \chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{for } x_1 > x_2. \end{cases} \quad (18)$$

Эта функция антисимметрична

$$\chi_{\lambda_1 \lambda_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2) = -\chi_{\lambda_1 \lambda_2}^{\alpha_2 \alpha_1}(x_2, x_1).$$

Применив правило с предыдущего слайда, получим

$$\frac{A_{21}}{A_{12}} = R(\lambda_1 - \lambda_2), \quad R(\lambda) = e^{i\Phi(\lambda)} = \frac{\text{ch } \frac{\lambda - i\pi g}{2}}{\text{ch } \frac{\lambda + i\pi g}{2}}. \quad (19)$$

Пусть

$$\chi_{\lambda_1 \lambda_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12} \chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{21} \chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{for } x_1 < x_2, \\ A_{21} \chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{12} \chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{for } x_1 > x_2. \end{cases} \quad (18)$$

Эта функция антисимметрична

$$\chi_{\lambda_1 \lambda_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2) = -\chi_{\lambda_1 \lambda_2}^{\alpha_2 \alpha_1}(x_2, x_1).$$

Применив правило с предыдущего слайда, получим

$$\frac{A_{21}}{A_{12}} = R(\lambda_1 - \lambda_2), \quad R(\lambda) = e^{i\Phi(\lambda)} = \frac{\text{ch } \frac{\lambda - i\pi g}{2}}{\text{ch } \frac{\lambda + i\pi g}{2}}. \quad (19)$$

Эта функция периодична по  $g$  с периодом 2. Положим

$$-1 < g < 1. \quad (20)$$

Пусть

$$\chi_{\lambda_1 \lambda_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12} \chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{21} \chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{for } x_1 < x_2, \\ A_{21} \chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{12} \chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{for } x_1 > x_2. \end{cases} \quad (18)$$

Эта функция антисимметрична

$$\chi_{\lambda_1 \lambda_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2) = -\chi_{\lambda_1 \lambda_2}^{\alpha_2 \alpha_1}(x_2, x_1).$$

Применив правило с предыдущего слайда, получим

$$\frac{A_{21}}{A_{12}} = R(\lambda_1 - \lambda_2), \quad R(\lambda) = e^{i\Phi(\lambda)} = \frac{\text{ch } \frac{\lambda - i\pi g}{2}}{\text{ch } \frac{\lambda + i\pi g}{2}}. \quad (19)$$

Эта функция периодична по  $g$  с периодом 2. Положим

$$-1 < g < 1. \quad (20)$$

Функцию  $\Phi(\lambda)$  будем считать нечетной

$$\Phi(-\lambda) = -\Phi(\lambda), \quad (21)$$

и имеющей разрезы  $(i(1 - |g|), i\infty)$ ,  $(-i(1 - |g|), -i\infty)$ .

$N$ -частичное решение (анзац Бете):

$$\chi_{\lambda_1 \dots \lambda_N}^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\tau} (-1)^{\sigma_{\tau}} A_{\tau} \prod_{k=1}^N \chi_{\lambda_{\tau k}}^{\alpha_{\sigma k}}(x_{\sigma k}) \quad \text{for } x_{\sigma_1} < \dots < x_{\sigma_N}. \quad (22)$$



$N$ -частичное решение (анзац Бете):

$$\chi_{\lambda_1 \dots \lambda_N}^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\tau} (-1)^{\sigma_{\tau}} A_{\tau} \prod_{k=1}^N \chi_{\lambda_{\tau k}}^{\alpha_{\sigma k}}(x_{\sigma k}) \quad \text{for } x_{\sigma_1} < \dots < x_{\sigma_N}. \quad (22)$$

Коэффициенты  $A$  удовлетворяют соотношениям

$$A_{\dots, i+1, i, \dots} = R(\lambda_i - \lambda_{i+1}) A_{\dots, i, i+1, \dots}. \quad (23)$$

$N$ -частичное решение (анзац Бете):

$$\chi_{\lambda_1 \dots \lambda_N}^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\tau} (-1)^{\sigma_{\tau}} A_{\tau} \prod_{k=1}^N \chi_{\lambda_{\tau k}}^{\alpha_{\sigma k}}(x_{\sigma k}) \quad \text{for } x_{\sigma_1} < \dots < x_{\sigma_N}. \quad (22)$$

Коэффициенты  $A$  удовлетворяют соотношениям

$$A_{\dots, i+1, i, \dots} = R(\lambda_i - \lambda_{i+1}) A_{\dots, i, i+1, \dots}. \quad (23)$$

Периодическое граничное условие

$$\chi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N}(x_1 + L, x_2, \dots, x_N) = \chi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N}(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

накладывает на  $\lambda_k$  систему уравнений Бете:

$$e^{im_0 L \operatorname{sh} \lambda_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N R(\lambda_k - \lambda_l) = 1. \quad (24)$$

$N$ -частичное решение (анзац Бете):

$$\chi_{\lambda_1 \dots \lambda_N}^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\tau} (-1)^{\sigma_{\tau}} A_{\tau} \prod_{k=1}^N \chi_{\lambda_{\tau k}}^{\alpha_{\sigma k}}(x_{\sigma k}) \quad \text{for } x_{\sigma_1} < \dots < x_{\sigma_N}. \quad (22)$$

Коэффициенты  $A$  удовлетворяют соотношениям

$$A_{\dots, i+1, i, \dots} = R(\lambda_i - \lambda_{i+1}) A_{\dots, i, i+1, \dots}. \quad (23)$$

Периодическое граничное условие

$$\chi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N}(x_1 + L, x_2, \dots, x_N) = \chi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N}(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

накладывает на  $\lambda_k$  систему уравнений Бете:

$$e^{im_0 L \operatorname{sh} \lambda_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N R(\lambda_k - \lambda_l) = 1. \quad (24)$$

Множество  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  удовлетворяющее системе (24) называют решением уравнений Бете, а каждый элемент этого множества называют корнем уравнений Бете. Все корни различны:

$$\lambda_k \neq \lambda_l, \quad \text{if } k \neq l. \quad (25)$$

Прологарифмируем уравнения Бете:

$$m_0 L \operatorname{sh} \lambda_k + \sum_{l=1}^N \Phi(\lambda_k - \lambda_l) = 2\pi n_k, \quad n_k \in \mathbb{Z}. \quad (26)$$

Прологарифмируем уравнения Бете:

$$m_0 L \operatorname{sh} \lambda_k + \sum_{l=1}^N \Phi(\lambda_k - \lambda_l) = 2\pi n_k, \quad n_k \in \mathbb{Z}. \quad (26)$$

Энергия и импульс состояний:

$$E_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_0 \sum_{i=1}^N \operatorname{ch} \lambda_i, \quad P_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_0 \sum_{i=1}^N \operatorname{sh} \lambda_i. \quad (27)$$

Прологарифмируем уравнения Бете:

$$m_0 L \operatorname{sh} \lambda_k + \sum_{l=1}^N \Phi(\lambda_k - \lambda_l) = 2\pi n_k, \quad n_k \in \mathbb{Z}. \quad (26)$$

Энергия и импульс состояний:

$$E_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_0 \sum_{i=1}^N \operatorname{ch} \lambda_i, \quad P_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_0 \sum_{i=1}^N \operatorname{sh} \lambda_i. \quad (27)$$

**Гипотеза:** в основном (вакуумном) состоянии все одночастичные состояния отрицательной энергии заполнены. Тогда

$$\lambda_k = i\pi + \xi_k, \quad n_k = k_0 - k.$$

Прологарифмируем уравнения Бете:

$$m_0 L \operatorname{sh} \lambda_k + \sum_{l=1}^N \Phi(\lambda_k - \lambda_l) = 2\pi n_k, \quad n_k \in \mathbb{Z}. \quad (26)$$

Энергия и импульс состояний:

$$E_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_0 \sum_{i=1}^N \operatorname{ch} \lambda_i, \quad P_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_0 \sum_{i=1}^N \operatorname{sh} \lambda_i. \quad (27)$$

**Гипотеза:** в основном (вакуумном) состоянии все одночастичные состояния отрицательной энергии заполнены. Тогда

$$\lambda_k = i\pi + \xi_k, \quad n_k = k_0 - k.$$

Отсюда имеем

$$m_0 L \operatorname{sh} \xi_k = 2\pi(k - k_0) + \sum_{l=1}^N \Phi(\xi_k - \xi_l). \quad (28)$$

Возьмем разность этих уравнений при соседних значениях  $k$  и поделим ее на  $L(\xi_{k+1} - \xi_k)$ :

$$m_0 \frac{\text{sh } \xi_{k+1} - \text{sh } \xi_k}{\xi_{k+1} - \xi_k} = \frac{2\pi}{L(\xi_{k+1} - \xi_k)} + \frac{1}{L} \sum_{l=1}^N \frac{\Phi(\xi_{k+1} - \xi_l) - \Phi(\xi_k - \xi_l)}{\xi_{k+1} - \xi_k}.$$



Возьмем разность этих уравнений при соседних значениях  $k$  и поделим ее на  $L(\xi_{k+1} - \xi_k)$ :

$$m_0 \frac{\text{sh } \xi_{k+1} - \text{sh } \xi_k}{\xi_{k+1} - \xi_k} = \frac{2\pi}{L(\xi_{k+1} - \xi_k)} + \frac{1}{L} \sum_{l=1}^N \frac{\Phi(\xi_{k+1} - \xi_l) - \Phi(\xi_k - \xi_l)}{\xi_{k+1} - \xi_k}.$$

В пределе  $L \rightarrow \infty$  значения  $\xi_k$  **сгущаются**. Определим величину

$$\rho(\xi) = \frac{2\pi}{L(\xi_{k+1} - \xi_k)} = \frac{1}{L} \frac{dk}{d\xi}. \quad (29)$$

Возьмем разность этих уравнений при соседних значениях  $k$  и поделим ее на  $L(\xi_{k+1} - \xi_k)$ :

$$m_0 \frac{\text{sh } \xi_{k+1} - \text{sh } \xi_k}{\xi_{k+1} - \xi_k} = \frac{2\pi}{L(\xi_{k+1} - \xi_k)} + \frac{1}{L} \sum_{l=1}^N \frac{\Phi(\xi_{k+1} - \xi_l) - \Phi(\xi_k - \xi_l)}{\xi_{k+1} - \xi_k}.$$

В пределе  $L \rightarrow \infty$  значения  $\xi_k$  **сгущаются**. Определим величину

$$\rho(\xi) = \frac{2\pi}{L(\xi_{k+1} - \xi_k)} = \frac{1}{L} \frac{dk}{d\xi}. \quad (29)$$

Заменяя сумму интегралом, получим

$$m_0 \text{ch } \xi = \rho(\xi) + \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi} \Phi'(\xi - \xi') \rho(\xi'). \quad (30)$$

Нам опять пригодилось ультрафиолетовое обрезание  $\Theta$ .

Возьмем разность этих уравнений при соседних значениях  $k$  и поделим ее на  $L(\xi_{k+1} - \xi_k)$ :

$$m_0 \frac{\text{sh } \xi_{k+1} - \text{sh } \xi_k}{\xi_{k+1} - \xi_k} = \frac{2\pi}{L(\xi_{k+1} - \xi_k)} + \frac{1}{L} \sum_{l=1}^N \frac{\Phi(\xi_{k+1} - \xi_l) - \Phi(\xi_k - \xi_l)}{\xi_{k+1} - \xi_k}.$$

В пределе  $L \rightarrow \infty$  значения  $\xi_k$  **сгущаются**. Определим величину

$$\rho(\xi) = \frac{2\pi}{L(\xi_{k+1} - \xi_k)} = \frac{1}{L} \frac{dk}{d\xi}. \quad (29)$$

Заменяя сумму интегралом, получим

$$m_0 \text{ch } \xi = \rho(\xi) + \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi} \Phi'(\xi - \xi') \rho(\xi'). \quad (30)$$

Нам опять пригодилось ультрафиолетовое обрезание  $\Theta$ .

Мы потеряли одно уравнение. Заменяем его на условие нормировки

$$\int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} \rho(\xi) = \frac{N}{L}. \quad (31)$$

## Основное состояние: решение

Чтобы понять, как устроено решение, рассмотрим случай  $\Theta = \infty$  и сделаем преобразование Фурье:

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} X(\xi) e^{i\omega\xi}.$$

## Основное состояние: решение

Чтобы понять, как устроено решение, рассмотрим случай  $\Theta = \infty$  и сделаем преобразование Фурье:

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} X(\xi) e^{i\omega\xi}.$$

Тогда уравнение (30) формально примет вид

$$m_0 \tilde{\text{ch}}(\omega) = (1 + \tilde{\Phi}'(\omega)) \tilde{\rho}(\omega), \quad \tilde{\Phi}'(\omega) = -\frac{\text{sh } \pi g \omega}{\text{sh } \pi \omega}.$$

## Основное состояние: решение

Чтобы понять, как устроено решение, рассмотрим случай  $\Theta = \infty$  и сделаем преобразование Фурье:

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} X(\xi) e^{i\omega\xi}.$$

Тогда уравнение (30) формально примет вид

$$m_0 \tilde{\text{ch}}(\omega) = (1 + \tilde{\Phi}'(\omega)) \tilde{\rho}(\omega), \quad \tilde{\Phi}'(\omega) = -\frac{\text{sh } \pi g \omega}{\text{sh } \pi \omega}.$$

Ни левая, ни правая часть уравнения, строго говоря, не определены. Но мы можем понять качественную картину.

## Основное состояние: решение

Чтобы понять, как устроено решение, рассмотрим случай  $\Theta = \infty$  и сделаем преобразование Фурье:

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} X(\xi) e^{i\omega\xi}.$$

Тогда уравнение (30) формально примет вид

$$m_0 \tilde{\text{ch}}(\omega) = (1 + \tilde{\Phi}'(\omega)) \tilde{\rho}(\omega), \quad \tilde{\Phi}'(\omega) = -\frac{\text{sh } \pi g \omega}{\text{sh } \pi \omega}.$$

Ни левая, ни правая часть уравнения, строго говоря, не определены. Но мы можем понять качественную картину. Левая часть формально не равна нулю при  $\omega = \pm i$ . Но в этих точках  $\tilde{\Phi}'(\omega)$  имеет особенность, поэтому осмысленный ответ может быть только если  $m_0 = 0$ , когда левая часть вообще не важна, либо если  $m_0 = \infty$ .

## Основное состояние: решение

Чтобы понять, как устроено решение, рассмотрим случай  $\Theta = \infty$  и сделаем преобразование Фурье:

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} X(\xi) e^{i\omega\xi}.$$

Тогда уравнение (30) формально примет вид

$$m_0 \tilde{\text{ch}}(\omega) = (1 + \tilde{\Phi}'(\omega)) \tilde{\rho}(\omega), \quad \tilde{\Phi}'(\omega) = -\frac{\text{sh } \pi g \omega}{\text{sh } \pi \omega}.$$

Ни левая, ни правая часть уравнения, строго говоря, не определены. Но мы можем понять качественную картину. Левая часть формально не равна нулю при  $\omega = \pm i$ . Но в этих точках  $\tilde{\Phi}'(\omega)$  имеет особенность, поэтому осмысленный ответ может быть только если  $m_0 = 0$ , когда левая часть вообще не важна, либо если  $m_0 = \infty$ . Мы рассмотрим первый случай. Тогда ненулевые значения  $\tilde{\rho}(\omega)$  могут отвечать нулям функции  $2\pi + \tilde{\Phi}'(\omega)$ . Ближайшие к вещественной оси нули находятся в точках  $\omega = \pm i/(1 + g)$ .



## Основное состояние: решение

Чтобы понять, как устроено решение, рассмотрим случай  $\Theta = \infty$  и сделаем преобразование Фурье:

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} X(\xi) e^{i\omega\xi}.$$

Тогда уравнение (30) формально примет вид

$$m_0 \tilde{\text{ch}}(\omega) = (1 + \tilde{\Phi}'(\omega)) \tilde{\rho}(\omega), \quad \tilde{\Phi}'(\omega) = -\frac{\text{sh } \pi g \omega}{\text{sh } \pi \omega}.$$

Ни левая, ни правая часть уравнения, строго говоря, не определены. Но мы можем понять качественную картину. Левая часть формально не равна нулю при  $\omega = \pm i$ . Но в этих точках  $\tilde{\Phi}'(\omega)$  имеет особенность, поэтому осмысленный ответ может быть только если  $m_0 = 0$ , когда левая часть вообще не важна, либо если  $m_0 = \infty$ . Мы рассмотрим первый случай. Тогда ненулевые значения  $\tilde{\rho}(\omega)$  могут отвечать нулям функции  $2\pi + \tilde{\Phi}'(\omega)$ . Ближайшие к вещественной оси нули находятся в точках  $\omega = \pm i/(1+g)$ .

Поэтому постулируем пробное решение

$$\rho(\xi) = M \text{ch } \frac{\xi}{1+g}. \quad (32)$$

Более аккуратный анализ (см. задачу 4) показывает, что

$$M \sim m_0 e^{\frac{g\Theta}{\pi+g}}.$$

Коэффициент  $M$  конечен  $\Rightarrow m_0$  **перенормируется**:  $m_0 \rightarrow 0$  при  $g > 0$  и  $m_0 \rightarrow \infty$  при  $g < 0$ .