

Лекция 13. Заряженные и вращающиеся черные дыры

Михаил Лашкевич

Получим центрально-симметричное решение системы уравнений Эйнштейна—Максвелла в вакууме:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(-F_{\mu\lambda} F_{\nu}{}^{\lambda} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \right), \quad F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (1)$$

Под вакуумом мы понимаем отсутствие каких-либо других полей и частиц. Мы учли бесследовость тензора энергии-импульса электромагнитного поля.

Получим центрально-симметричное решение системы уравнений Эйнштейна—Максвелла в вакууме:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(-F_{\mu\lambda} F_{\nu}{}^{\lambda} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \right), \quad F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (1)$$

Под вакуумом мы понимаем отсутствие каких-либо других полей и частиц. Мы учли бесследовость тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Будем искать решение для метрики в знакомом нам виде

$$ds^2 = e^{2k(t,r)} dt^2 - e^{2h(t,r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2. \quad (2)$$

Получим центрально-симметричное решение системы уравнений Эйнштейна—Максвелла в вакууме:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(-F_{\mu\lambda} F_{\nu}{}^{\lambda} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \right), \quad F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (1)$$

Под вакуумом мы понимаем отсутствие каких-либо других полей и частиц. Мы учли бесследовость тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Будем искать решение для метрики в знакомом нам виде

$$ds^2 = e^{2k(t,r)} dt^2 - e^{2h(t,r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2. \quad (2)$$

По теореме Гаусса получаем для электромагнитного поля

$$E_r \equiv F_{tr} = -F_{rt} = e^{k+h} \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad E_{\vartheta} = E_{\varphi} = 0, \quad H_i = 0. \quad (3)$$

Получим центрально-симметричное решение системы уравнений Эйнштейна—Максвелла в вакууме:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(-F_{\mu\lambda} F_{\nu}{}^{\lambda} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \right), \quad F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (1)$$

Под вакуумом мы понимаем отсутствие каких-либо других полей и частиц. Мы учли бесследовость тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Будем искать решение для метрики в знакомом нам виде

$$ds^2 = e^{2k(t,r)} dt^2 - e^{2h(t,r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2. \quad (2)$$

По теореме Гаусса получаем для электромагнитного поля

$$E_r \equiv F_{tr} = -F_{rt} = e^{k+h} \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad E_{\vartheta} = E_{\varphi} = 0, \quad H_i = 0. \quad (3)$$

Тогда тензор энергии-импульса равен

$$T_t^t = T_r^r = -T_{\vartheta}^{\vartheta} = -T_{\varphi}^{\varphi} = \frac{Q^2}{32\pi^2 r^4}. \quad (4)$$

Подставляя в уравнения Эйнштейна, получаем **решение Рейснера—Нордстрёма**:

$$e^{2k} = e^{-2h} = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}, \quad r_g = 2GM, \quad r_Q^2 = \frac{GQ^2}{4\pi}, \quad (5)$$

Подставляя в уравнения Эйнштейна, получаем **решение Рейснера—Нордстрёма**:

$$e^{2k} = e^{-2h} = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}, \quad r_g = 2GM, \quad r_Q^2 = \frac{GQ^2}{4\pi}, \quad (5)$$

то есть

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (6)$$

Подставляя в уравнения Эйнштейна, получаем **решение Рэйснера—Нёрдстрёма**:

$$e^{2k} = e^{-2h} = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}, \quad r_g = 2GM, \quad r_Q^2 = \frac{GQ^2}{4\pi}, \quad (5)$$

то есть

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (6)$$

Компонента g_{tt} как функция r^{-1} является полиномом **второго порядка**, и может обратиться в нуль в двух точках:

$$r_{\pm} = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_Q^2} = G \left(M \pm \sqrt{M^2 - \frac{Q^2}{4\pi G}} \right), \quad \text{если } \frac{Q^2}{4\pi} \leq GM^2. \quad (7)$$

Подставляя в уравнения Эйнштейна, получаем **решение Рэйснера—Нёрдстрёма**:

$$e^{2k} = e^{-2h} = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}, \quad r_g = 2GM, \quad r_Q^2 = \frac{GQ^2}{4\pi}, \quad (5)$$

то есть

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (6)$$

Компонента g_{tt} как функция r^{-1} является полиномом **второго порядка**, и может обратиться в нуль в двух точках:

$$r_{\pm} = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_Q^2} = G \left(M \pm \sqrt{M^2 - \frac{Q^2}{4\pi G}} \right), \quad \text{если } \frac{Q^2}{4\pi} \leq GM^2. \quad (7)$$

- При $r_Q = 0$ имеем $r_- = 0$, $r_+ = r_g$ (метрика Шварцшильда).

Подставляя в уравнения Эйнштейна, получаем **решение Рэйснера—Нёрдстрёма**:

$$e^{2k} = e^{-2h} = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}, \quad r_g = 2GM, \quad r_Q^2 = \frac{GQ^2}{4\pi}, \quad (5)$$

то есть

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (6)$$

Компонента g_{tt} как функция r^{-1} является полиномом **второго порядка**, и может обратиться в нуль в двух точках:

$$r_{\pm} = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_Q^2} = G \left(M \pm \sqrt{M^2 - \frac{Q^2}{4\pi G}} \right), \quad \text{если } \frac{Q^2}{4\pi} \leq GM^2. \quad (7)$$

- При $r_Q = 0$ имеем $r_- = 0$, $r_+ = r_g$ (метрика Шварцшильда).
- При $0 < r_Q < r_g/2$ имеется два положительных корня r_{\pm} , удовлетворяющих условиям $0 < r_- < r_g/2 < r_+ < r_g$.

Подставляя в уравнения Эйнштейна, получаем **решение Рэйснера—Нёрдстрёма**:

$$e^{2k} = e^{-2h} = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}, \quad r_g = 2GM, \quad r_Q^2 = \frac{GQ^2}{4\pi}, \quad (5)$$

то есть

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (6)$$

Компонента g_{tt} как функция r^{-1} является полиномом **второго порядка**, и может обратиться в нуль в двух точках:

$$r_{\pm} = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_Q^2} = G \left(M \pm \sqrt{M^2 - \frac{Q^2}{4\pi G}} \right), \quad \text{если } \frac{Q^2}{4\pi} \leq GM^2. \quad (7)$$

- При $r_Q = 0$ имеем $r_- = 0$, $r_+ = r_g$ (метрика Шварцшильда).
- При $0 < r_Q < r_g/2$ имеется два положительных корня r_{\pm} , удовлетворяющих условиям $0 < r_- < r_g/2 < r_+ < r_g$.
- При $r_Q = r_g/2$ имеем $r_+ = r_- = r_g/2$.

Подставляя в уравнения Эйнштейна, получаем **решение Рэйснера—Нёрдстрёма**:

$$e^{2k} = e^{-2h} = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}, \quad r_g = 2GM, \quad r_Q^2 = \frac{GQ^2}{4\pi}, \quad (5)$$

то есть

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (6)$$

Компонента g_{tt} как функция r^{-1} является полиномом **второго порядка**, и может обратиться в нуль в двух точках:

$$r_{\pm} = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_Q^2} = G \left(M \pm \sqrt{M^2 - \frac{Q^2}{4\pi G}} \right), \quad \text{если } \frac{Q^2}{4\pi} \leq GM^2. \quad (7)$$

- При $r_Q = 0$ имеем $r_- = 0$, $r_+ = r_g$ (метрика Шварцшильда).
- При $0 < r_Q < r_g/2$ имеется два положительных корня r_{\pm} , удовлетворяющих условиям $0 < r_- < r_g/2 < r_+ < r_g$.
- При $r_Q = r_g/2$ имеем $r_+ = r_- = r_g/2$.
- При $r_Q > r_g/2$ корней нет («голая сингулярность»).

Решим уравнения

$$dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}} = \pm \frac{r^2 dr}{(r - r_+)(r - r_-)}. \quad (8)$$

Решим уравнения

$$dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}} = \pm \frac{r^2 dr}{(r - r_+)(r - r_-)}. \quad (8)$$

Интегрируя, получаем

$$t = \pm r^*(r) + \text{const},$$

где

(9)

Решим уравнения

$$dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}} = \pm \frac{r^2 dr}{(r - r_+)(r - r_-)}. \quad (8)$$

Интегрируя, получаем

$$t = \pm r^*(r) + \text{const},$$

где

$$r^* = r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \log \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \log \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right| \quad \text{при } r_Q < \frac{r_g}{2};$$

(9)

Решим уравнения

$$dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}} = \pm \frac{r^2 dr}{(r - r_+)(r - r_-)}. \quad (8)$$

Интегрируя, получаем

$$t = \pm r^*(r) + \text{const},$$

где

$$r^* = r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \log \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \log \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right| \quad \text{при } r_Q < \frac{r_g}{2};$$

$$r^* = r + r_g \log \left| \frac{2r}{r_g} - 1 \right| - \frac{r_g r}{2r - r_g} \quad \text{при } r_Q = \frac{r_g}{2};$$

(9)

Решим уравнения

$$dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}} = \pm \frac{r^2 dr}{(r - r_+)(r - r_-)}. \quad (8)$$

Интегрируя, получаем

$$t = \pm r^*(r) + \text{const},$$

где

$$\begin{aligned} r^* &= r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \log \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \log \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right| && \text{при } r_Q < \frac{r_g}{2}; \\ r^* &= r + r_g \log \left| \frac{2r}{r_g} - 1 \right| - \frac{r_g r}{2r - r_g} && \text{при } r_Q = \frac{r_g}{2}; \\ r^* &= r + \frac{r_g}{2} \log \frac{r^2 - r_g r + r_Q^2}{r_Q^2} - \frac{r_Q^2 - r_g^2/2}{\sqrt{r_Q^2 - r_g^2/4}} \arctg \frac{r - r_g/2}{\sqrt{r_Q^2 - r_g^2/4}} && \text{при } r_Q > \frac{r_g}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Решим уравнения

$$dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}} = \pm \frac{r^2 dr}{(r - r_+)(r - r_-)}. \quad (8)$$

Интегрируя, получаем

$$t = \pm r^*(r) + \text{const},$$

где

$$r^* = r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \log \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \log \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right| \quad \text{при } r_Q < \frac{r_g}{2};$$

$$r^* = r + r_g \log \left| \frac{2r}{r_g} - 1 \right| - \frac{r_g r}{2r - r_g} \quad \text{при } r_Q = \frac{r_g}{2};$$

$$r^* = r + \frac{r_g}{2} \log \frac{r^2 - r_g r + r_Q^2}{r_Q^2} - \frac{r_Q^2 - r_g^2/2}{\sqrt{r_Q^2 - r_g^2/4}} \arctg \frac{r - r_g/2}{\sqrt{r_Q^2 - r_g^2/4}} \quad \text{при } r_Q > \frac{r_g}{2}. \quad (9)$$

Введем переменные

$$x^\pm = t \pm r^*. \quad (10)$$

Получим координаты Эддингтона—Финкельштейна x^+ , r , ϑ , φ для метрики Рейснера—Нордстрема:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr - r^2 d\Omega^2 \\
 &= \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right) (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr - r^2 d\Omega^2.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Получим координаты Эддингтона—Финкельштейна x^+ , r , ϑ , φ для метрики Рейснера—Нордстрема:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr - r^2 d\Omega^2 \\ &= \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right) (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr - r^2 d\Omega^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Сингулярность осталась только на линии $r = 0$. Поверхности $r = r_{\pm}$ являются горизонтами и на них нет особенностей.

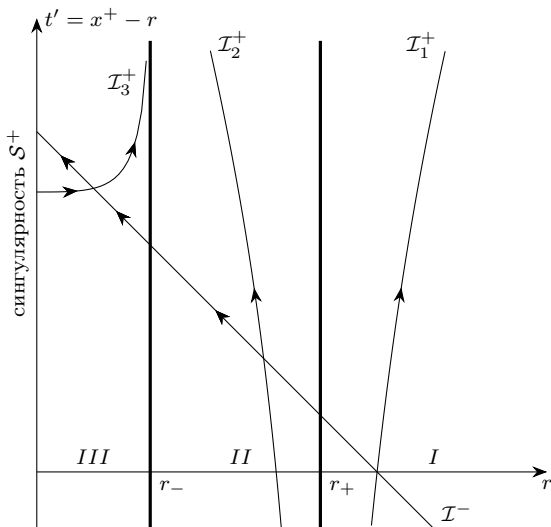


Рис.: Изотропные геодезические в координатах Эддингтона—Финкельштейна для метрики Рейснера—Нордстрема при $2r_Q < r_g$.

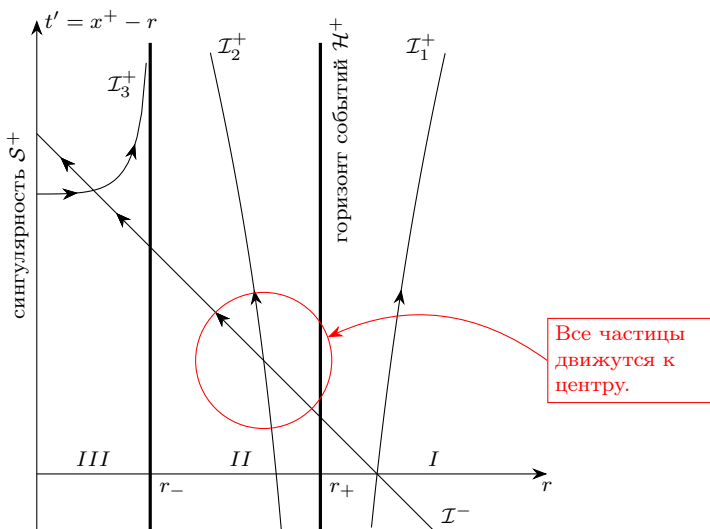


Рис.: Изотропные геодезические в координатах Эддингтона—Финкельштейна для метрики Рейснера—Нордстрема при $2r_Q < r_g$.

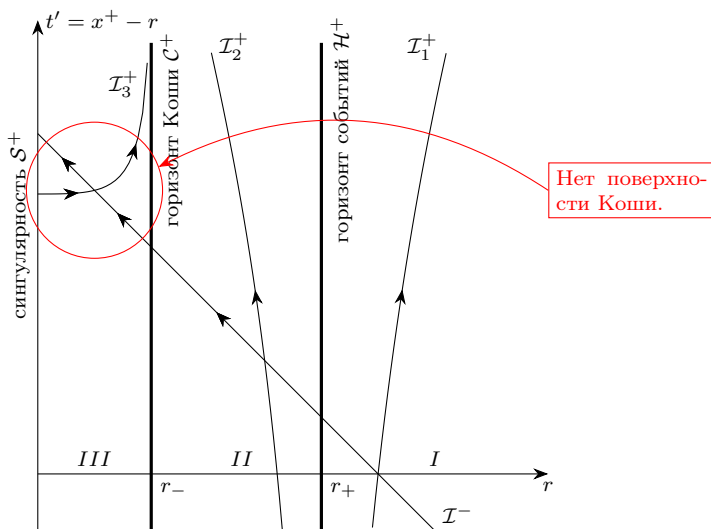


Рис.: Изотропные геодезические в координатах Эддингтона—Финкельштейна для метрики Рейснера—Нордстрема при $2r_Q < r_g$.

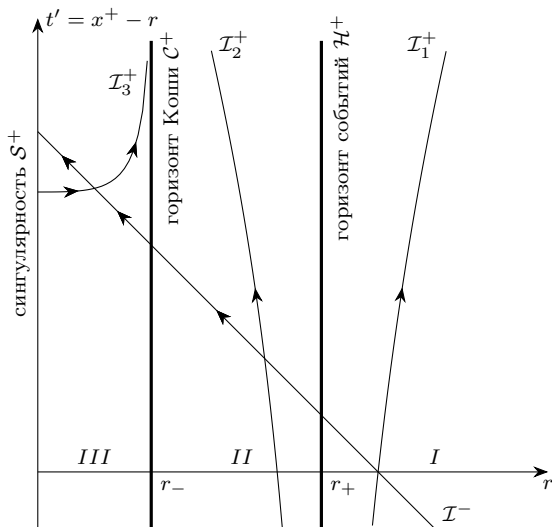


Рис.: Изотропные геодезические в координатах Эддингтона—Финкельштейна для метрики Рейснера—Нордстрема при $2r_Q < r_g$.

Перейдем к координатам светового конуса:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_+}{r(x^-, x^+)}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r(x^-, x^+)}\right) dx^- dx^+ - r^2(x^-, x^+) d\Omega^2, \quad (12)$$

Функция $r(x^-, x^+)$ определяется уравнением $x^+ - x^- = 2r^*(r)$. При $r > r_+$ (область I) координаты хорошо определены.

Перейдем к координатам светового конуса:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_+}{r(x^-, x^+)}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r(x^-, x^+)}\right) dx^- dx^+ - r^2(x^-, x^+) d\Omega^2, \quad (12)$$

Функция $r(x^-, x^+)$ определяется уравнением $x^+ - x^- = 2r^*(r)$. При $r > r_+$ (область I) координаты хорошо определены. Но при $r = r_+$ снова возникает особенность, отвечающая $x^- \rightarrow +\infty$ или $x^+ \rightarrow -\infty$.

Перейдем к координатам светового конуса:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_+}{r(x^-, x^+)}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r(x^-, x^+)}\right) dx^- dx^+ - r^2(x^-, x^+) d\Omega^2, \quad (12)$$

Функция $r(x^-, x^+)$ определяется уравнением $x^+ - x^- = 2r^*(r)$. При $r > r_+$ (область I) координаты хорошо определены. Но при $r = r_+$ снова возникает особенность, отвечающая $x^- \rightarrow +\infty$ или $x^+ \rightarrow -\infty$. Чтобы избавиться от нее, снова «подождем» координаты:

$$\begin{aligned} u &= -\alpha_+^{-1} e^{-\alpha_+ x^-} = -\alpha_+^{-1} e^{\alpha_+(r-t)} \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{-\beta_+/2}, \\ v &= \alpha_+^{-1} e^{\alpha_+ x^+} = \alpha_+^{-1} e^{\alpha_+(r+t)} \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{-\beta_+/2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\alpha_{\pm} = \frac{r_+ - r_-}{2r_{\pm}^2}, \quad \beta_{\pm} = \left(\frac{r_-}{r_+}\right)^{\pm 2}. \quad (14)$$

Перейдем к координатам светового конуса:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_+}{r(x^-, x^+)}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r(x^-, x^+)}\right) dx^- dx^+ - r^2(x^-, x^+) d\Omega^2, \quad (12)$$

Функция $r(x^-, x^+)$ определяется уравнением $x^+ - x^- = 2r^*(r)$. При $r > r_+$ (область I) координаты хорошо определены. Но при $r = r_+$ снова возникает особенность, отвечающая $x^- \rightarrow +\infty$ или $x^+ \rightarrow -\infty$. Чтобы избавиться от нее, снова «подождем» координаты:

$$\begin{aligned} u &= -\alpha_+^{-1} e^{-\alpha_+ x^-} = -\alpha_+^{-1} e^{\alpha_+(r-t)} \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{-\beta_+/2}, \\ v &= \alpha_+^{-1} e^{\alpha_+ x^+} = \alpha_+^{-1} e^{\alpha_+(r+t)} \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{-\beta_+/2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\alpha_{\pm} = \frac{r_+ - r_-}{2r_{\pm}^2}, \quad \beta_{\pm} = \left(\frac{r_-}{r_+}\right)^{\pm 2}. \quad (14)$$

Здесь показатели α_{\pm} подобраны так, чтобы сократить особенность при $r = r_+$:

$$ds^2 = \frac{r_Q^2}{r^2} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{1-\beta_+} e^{-2\alpha_+ r} du dv - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (15)$$

Перейдем к координатам светового конуса:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_+}{r(x^-, x^+)}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r(x^-, x^+)}\right) dx^- dx^+ - r^2(x^-, x^+) d\Omega^2, \quad (12)$$

Функция $r(x^-, x^+)$ определяется уравнением $x^+ - x^- = 2r^*(r)$. При $r > r_+$ (область I) координаты хорошо определены. Но при $r = r_+$ снова возникает особенность, отвечающая $x^- \rightarrow +\infty$ или $x^+ \rightarrow -\infty$. Чтобы избавиться от нее, снова «подождем» координаты:

$$\begin{aligned} u &= -\alpha_+^{-1} e^{-\alpha_+ x^-} = -\alpha_+^{-1} e^{\alpha_+(r-t)} \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{-\beta_+/2}, \\ v &= \alpha_+^{-1} e^{\alpha_+ x^+} = \alpha_+^{-1} e^{\alpha_+(r+t)} \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{-\beta_+/2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\alpha_{\pm} = \frac{r_+ - r_-}{2r_{\pm}^2}, \quad \beta_{\pm} = \left(\frac{r_-}{r_+}\right)^{\pm 2}. \quad (14)$$

Здесь показатели α_{\pm} подобраны так, чтобы сократить особенность при $r = r_+$:

$$ds^2 = \frac{r_Q^2}{r^2} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{1-\beta_+} e^{-2\alpha_+ r} du dv - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (15)$$

Функция $r = r(u, v)$ есть решение уравнения

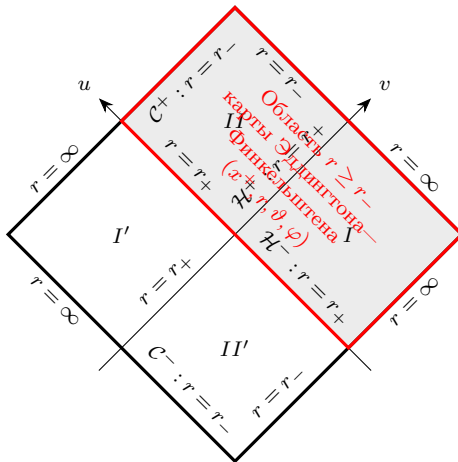
$$uv = -\alpha_+^{-2} e^{2\alpha_+ r} \left(\frac{r}{r_+} - 1\right) \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{-\beta_+}. \quad (16)$$

Координаты Крускала (u, v)

Заменой переменных $u = \alpha_+^{-1} \operatorname{tg} \bar{u}$, $v = \alpha_-^{-1} \operatorname{tg} \bar{v}$

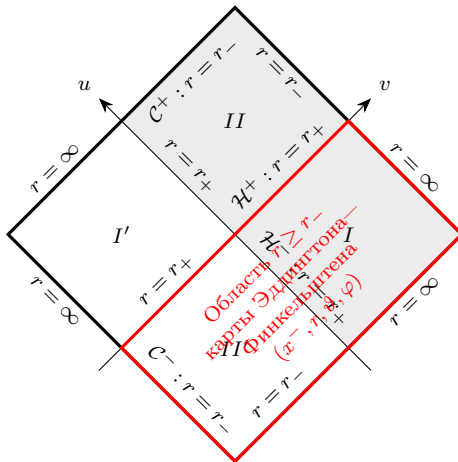
Координаты Крускала (u, v)

Заменой переменных $u = \alpha_+^{-1} \operatorname{tg} \bar{u}$, $v = \alpha_-^{-1} \operatorname{tg} \bar{v}$ плоскость (u, v) можно превратить в квадрат:



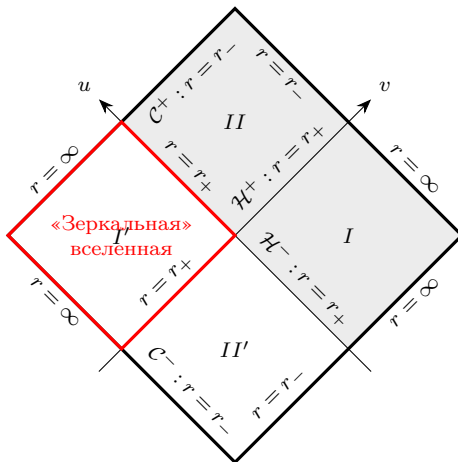
Координаты Крускала (u, v)

Заменой переменных $u = \alpha_+^{-1} \operatorname{tg} \bar{u}$, $v = \alpha_-^{-1} \operatorname{tg} \bar{v}$ плоскость (u, v) можно превратить в квадрат:



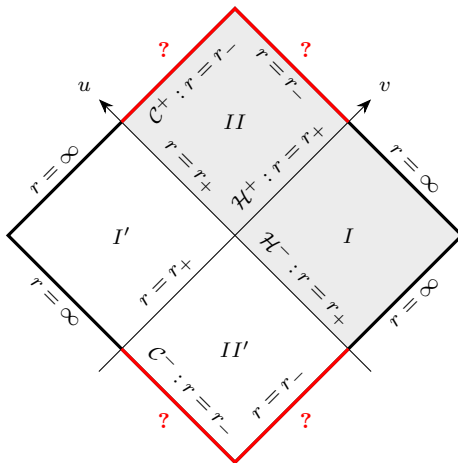
Координаты Крускала (u, v)

Заменой переменных $u = \alpha_+^{-1} \operatorname{tg} \bar{u}$, $v = \alpha_-^{-1} \operatorname{tg} \bar{v}$ плоскость (u, v) можно превратить в квадрат:



Координаты Крускала (u, v)

Заменой переменных $u = \alpha_+^{-1} \operatorname{tg} \bar{u}$, $v = \alpha_-^{-1} \operatorname{tg} \bar{v}$ плоскость (u, v) можно превратить в квадрат:



Координаты Крускала $(u^{(1)}, v^{(1)})$

В области II ($u, v > 0$) введем новые координаты:

$$u^{(1)} = -\alpha_-^{-1}(\alpha_+ u)^{-\beta_-}, \quad v^{(1)} = -\alpha_-^{-1}(\alpha_+ v)^{-\beta_-}. \quad (17)$$

В области II ($u, v > 0$) введем новые координаты:

$$u^{(1)} = -\alpha_-^{-1}(\alpha_+ u)^{-\beta_-}, \quad v^{(1)} = -\alpha_-^{-1}(\alpha_+ v)^{-\beta_-}. \quad (17)$$

Формально это заменяет

$$\left| \frac{r}{r_+} - 1 \right|^{1/2} \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right|^{-\beta_+/2} \rightarrow \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right|^{-\beta_-/2} \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right|^{1/2},$$

делая поверхность $r = r_-$ неособенной в этих координатах.

В области II ($u, v > 0$) введем новые координаты:

$$u^{(1)} = -\alpha_-^{-1}(\alpha_+ u)^{-\beta_-}, \quad v^{(1)} = -\alpha_-^{-1}(\alpha_+ v)^{-\beta_-}. \quad (17)$$

Формально это заменяет

$$\left| \frac{r}{r_+} - 1 \right|^{1/2} \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right|^{-\beta_+/2} \rightarrow \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right|^{-\beta_-/2} \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right|^{1/2},$$

делая поверхность $r = r_-$ неособенной в этих координатах. И действительно, метрика

$$ds^2 = \frac{r_Q^2}{r^2} \left(1 - \frac{r}{r_+} \right)^{1-\beta_-} e^{-2\alpha_- r} du^{(1)} dv^{(1)} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (18)$$

не имеет особенностей на $r = r_-$.

В области II ($u, v > 0$) введем новые координаты:

$$u^{(1)} = -\alpha_-^{-1}(\alpha_+ u)^{-\beta_-}, \quad v^{(1)} = -\alpha_-^{-1}(\alpha_+ v)^{-\beta_-}. \quad (17)$$

Формально это заменяет

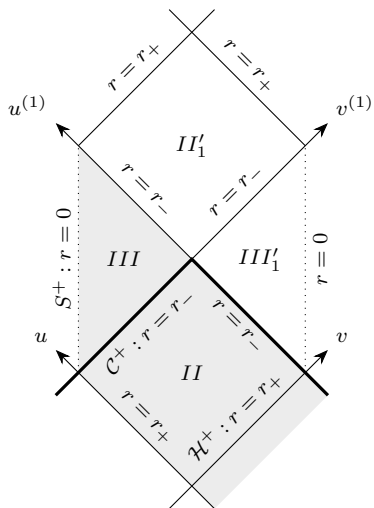
$$\left| \frac{r}{r_+} - 1 \right|^{1/2} \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right|^{-\beta_+/2} \rightarrow \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right|^{-\beta_-/2} \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right|^{1/2},$$

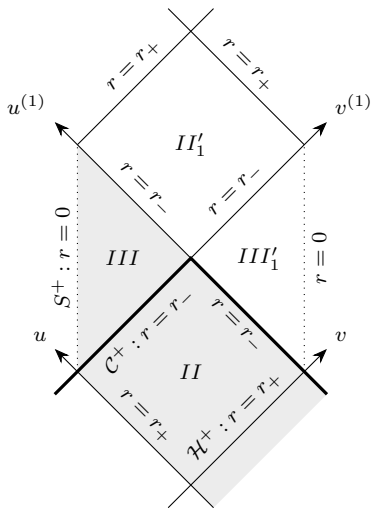
делая поверхность $r = r_-$ неособенной в этих координатах. И действительно, метрика

$$ds^2 = \frac{r_Q^2}{r^2} \left(1 - \frac{r}{r_+} \right)^{1-\beta_-} e^{-2\alpha_- r} du^{(1)} dv^{(1)} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (18)$$

не имеет особенностей на $r = r_-$.

В области II переменные $u^{(1)}, v^{(1)} < 0$, но они продолжают в область положительных значений. Изобразим это графически.

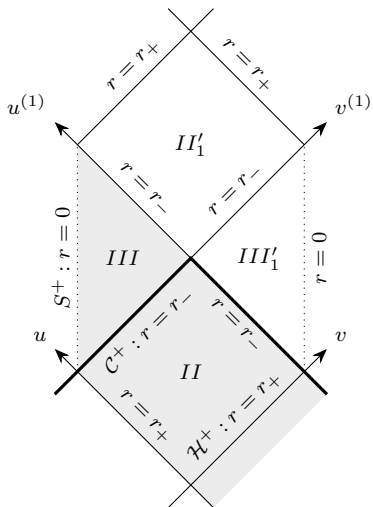




Мы можем ввести координаты

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= -\alpha_+^{-1}(\alpha_- u^{(1)})^{-\beta_+}, \\ v^{(2)} &= -\alpha_+^{-1}(\alpha_- v^{(1)})^{-\beta_+}, \end{aligned} \quad (19)$$

которые продолжатся на области I_1, I'_1, II_1 выше.



Мы можем ввести координаты

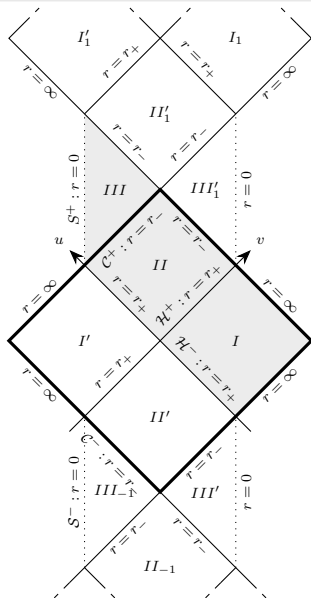
$$\begin{aligned} u^{(2)} &= -\alpha_+^{-1}(\alpha_- u^{(1)})^{-\beta_+}, \\ v^{(2)} &= -\alpha_+^{-1}(\alpha_- v^{(1)})^{-\beta_+}, \end{aligned} \quad (19)$$

которые продолжатся на области I_1 , I'_1 , II_1 выше. И так далее:

$$\begin{aligned} u^{(2n+1)} &= -\alpha_-^{-1}(\alpha_+ u^{(2n)})^{-\beta_-}, \\ v^{(2n+1)} &= -\alpha_-^{-1}(\alpha_+ v^{(2n)})^{-\beta_-}, \\ u^{(2n)} &= -\alpha_+^{-1}(\alpha_- u^{(2n-1)})^{-\beta_+}, \\ v^{(2n)} &= -\alpha_+^{-1}(\alpha_- v^{(2n-1)})^{-\beta_+} \end{aligned}$$

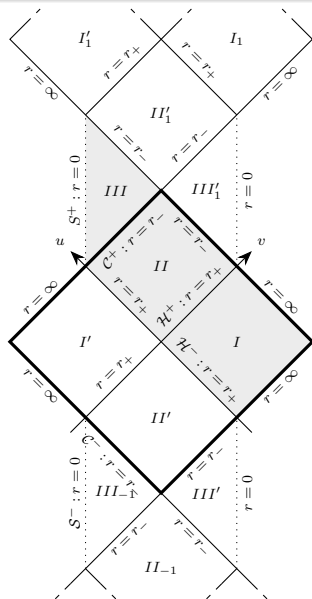
($n \in \mathbb{Z}$).

Диаграмма Пенроуза для решения Рейснера—Нордстрема

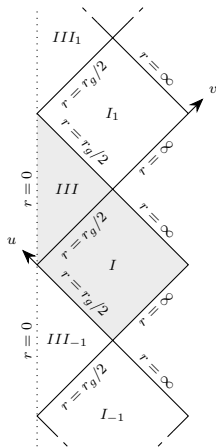


(a) Случай $2r_Q < r_g$

Диаграмма Пенроуза для решения Рейснера—Нордстрема



(a) Случай $2r_Q < r_g$



(b) Случай $2r_Q = r_g$

Рассмотрим теперь «максимальное» расширение метрики Шварцшильда: метрику вращающейся заряженной черной дыры — метрику Керра—Ньюмена.

Рассмотрим теперь «максимальное» расширение метрики Шварцшильда: метрику вращающейся заряженной черной дыры — метрику Кёрра—Ньюмена. В координатах Бойера—Линдквиста, не содержащих произведений $dt dr$ она имеет вид

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \vartheta d\varphi)^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} (a dt - (r^2 + a^2) d\varphi)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\vartheta^2,$$

$$\Delta = r^2 - r_g r + r_Q^2 + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta.$$
(20)

Рассмотрим теперь «максимальное» расширение метрики Шварцшильда: метрику вращающейся заряженной черной дыры — метрику Кёрра—Ньюмена. В координатах Бойера—Линдквиста, не содержащих произведений $dt dr$ она имеет вид

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \vartheta d\varphi)^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} (a dt - (r^2 + a^2) d\varphi)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\vartheta^2,$$

$$\Delta = r^2 - r_g r + r_Q^2 + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta.$$
(20)

Параметр a связан с моментом импульса J :

$$J = aM.$$
(21)

Рассмотрим теперь «максимальное» расширение метрики Шварцшильда: метрику вращающейся заряженной черной дыры — метрику Кёрра—Ньюмена. В координатах Бойера—Линдквиста, не содержащих произведений $dt dr$ она имеет вид

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \vartheta d\varphi)^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} (a dt - (r^2 + a^2) d\varphi)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\vartheta^2,$$

$$\Delta = r^2 - r_g r + r_Q^2 + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta.$$
(20)

Параметр a связан с моментом импульса J :

$$J = aM.$$
(21)

Тензор электромагнитного поля имеет вид

$$F = \frac{Q}{4\pi\rho^4} ((r^2 - a^2 \cos^2 \vartheta)(dt - a \sin \vartheta d\varphi) \wedge dr - ar \sin 2\vartheta d\vartheta \wedge (a dt - (r^2 + a^2) d\varphi)).$$
(22)

Рассмотрим теперь «максимальное» расширение метрики Шварцшильда: метрику вращающейся заряженной черной дыры — метрику Кёрра—Ньюмена. В координатах Бойера—Линдквиста, не содержащих произведений $dt dr$ она имеет вид

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \vartheta d\varphi)^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} (a dt - (r^2 + a^2) d\varphi)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\vartheta^2,$$

$$\Delta = r^2 - r_g r + r_Q^2 + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta.$$
(20)

Параметр a связан с моментом импульса J :

$$J = aM.$$
(21)

Тензор электромагнитного поля имеет вид

$$F = \frac{Q}{4\pi\rho^4} ((r^2 - a^2 \cos^2 \vartheta)(dt - a \sin^2 \vartheta d\varphi) \wedge dr - ar \sin 2\vartheta d\vartheta \wedge (a dt - (r^2 + a^2) d\varphi)).$$
(22)

Метрика имеет особенность в корнях полинома $\Delta(r)$ второго порядка,

$$r_{\pm} = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_Q^2 - a^2} = GM \pm \sqrt{G^2 M^2 - \frac{GQ^2}{4\pi} - a^2}.$$
(23)

Рассмотрим теперь «максимальное» расширение метрики Шварцшильда: метрику вращающейся заряженной черной дыры — метрику Кёрра—Ньюмена. В координатах Бойера—Линдквиста, не содержащих произведений $dt dr$ она имеет вид

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \vartheta d\varphi)^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} (a dt - (r^2 + a^2) d\varphi)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\vartheta^2,$$

$$\Delta = r^2 - r_g r + r_Q^2 + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta.$$
(20)

Параметр a связан с моментом импульса J :

$$J = aM.$$
(21)

Тензор электромагнитного поля имеет вид

$$F = \frac{Q}{4\pi\rho^4} ((r^2 - a^2 \cos^2 \vartheta)(dt - a \sin^2 \vartheta d\varphi) \wedge dr - ar \sin 2\vartheta d\vartheta \wedge (a dt - (r^2 + a^2) d\varphi)).$$
(22)

Метрика имеет особенность в корнях полинома $\Delta(r)$ второго порядка,

$$r_{\pm} = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_Q^2 - a^2} = GM \pm \sqrt{G^2 M^2 - \frac{GQ^2}{4\pi} - a^2}.$$
(23)

Давайте поймем смысл этих корней.

Перейдем к координатам Керра x^+ , r , ϑ , ϕ , определенным соотношениями

$$dx^+ = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad d\phi = d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr. \quad (24)$$

Перейдем к координатам Керра x^+, r, ϑ, ϕ , определенным соотношениями

$$dx^+ = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad d\phi = d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr. \quad (24)$$

В этих координатах метрика не имеет особенностей:

$$ds^2 = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \vartheta}{\rho^2} (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr - \rho^2 d\vartheta^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2 + \Delta a^2 \sin^2 \vartheta}{\rho^2} \sin^2 \vartheta d\phi^2 + 2a \sin^2 \vartheta dr d\phi + \frac{2a(r_g r - r_Q^2)}{\rho^2} \sin^2 \vartheta dx^+ d\phi. \quad (25)$$

Перейдем к координатам Керра x^+, r, ϑ, ϕ , определенным соотношениями

$$dx^+ = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad d\phi = d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr. \quad (24)$$

В этих координатах метрика не имеет особенностей:

$$ds^2 = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \vartheta}{\rho^2} (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr - \rho^2 d\vartheta^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2 + \Delta a^2 \sin^2 \vartheta}{\rho^2} \sin^2 \vartheta d\phi^2 + 2a \sin^2 \vartheta dr d\phi + \frac{2a(r_g r - r_Q^2)}{\rho^2} \sin^2 \vartheta dx^+ d\phi. \quad (25)$$

Коэффициент при $(dx^+)^2$ обращается в нуль в точках

$$r_{e,\pm}(\vartheta) = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_Q^2 - a^2 \cos^2 \vartheta} \geq r_{\pm}. \quad (26)$$

Перейдем к координатам Керра x^+, r, ϑ, ϕ , определенным соотношениями

$$dx^+ = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad d\phi = d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr. \quad (24)$$

В этих координатах метрика не имеет особенностей:

$$ds^2 = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \vartheta}{\rho^2} (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr - \rho^2 d\vartheta^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2 + \Delta a^2 \sin^2 \vartheta}{\rho^2} \sin^2 \vartheta d\phi^2 + 2a \sin^2 \vartheta dr d\phi + \frac{2a(r_g r - r_Q^2)}{\rho^2} \sin^2 \vartheta dx^+ d\phi. \quad (25)$$

Коэффициент при $(dx^+)^2$ обращается в нуль в точках

$$r_{e,\pm}(\vartheta) = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_Q^2 - a^2 \cos^2 \vartheta} \geq r_{\pm}. \quad (26)$$

Корни двух уравнений совпадают только в полюсах: $r_{e,\pm}(\vartheta) = r_{\pm}$, если $\vartheta = 0, \pi$.

Перейдем к координатам Керра x^+, r, ϑ, ϕ , определенным соотношениями

$$dx^+ = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad d\phi = d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr. \quad (24)$$

В этих координатах метрика не имеет особенностей:

$$ds^2 = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \vartheta}{\rho^2} (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr - \rho^2 d\vartheta^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2 + \Delta a^2 \sin^2 \vartheta}{\rho^2} \sin^2 \vartheta d\phi^2 + 2a \sin^2 \vartheta dr d\phi + \frac{2a(r_g r - r_Q^2)}{\rho^2} \sin^2 \vartheta dx^+ d\phi. \quad (25)$$

Коэффициент при $(dx^+)^2$ обращается в нуль в точках

$$r_{e,\pm}(\vartheta) = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_Q^2 - a^2 \cos^2 \vartheta} \geq r_{\pm}. \quad (26)$$

Корни двух уравнений совпадают только в полюсах: $r_{e,\pm}(\vartheta) = r_{\pm}$, если $\vartheta = 0, \pi$.

Как найти горизонты и понять смысл этих корней? Обычная аргументация неприменима, поскольку всюду, кроме полюсов, изотропные кривые $\vartheta, \phi = \text{const}$ не являются геодезическими.

Перепишем метрику в координатах Керра так:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi)^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} ((r^2 + a^2) d\phi - a dx^+)^2 - 2(dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi) dr - \rho^2 d\vartheta^2. \quad (27)$$

Перепишем метрику в координатах Керра так:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi)^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} ((r^2 + a^2) d\phi - a dx^+)^2 - 2(dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi) dr - \rho^2 d\vartheta^2. \quad (27)$$

Изучим пересечение трехмерного светового конуса $ds = 0$ с касательными к поверхностям $r = \text{const}$.

Перепишем метрику в координатах Керра так:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi)^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} ((r^2 + a^2) d\phi - a dx^+)^2 - 2(dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi) dr - \rho^2 d\vartheta^2. \quad (27)$$

Изучим пересечение трехмерного светового конуса $ds = 0$ с касательными к поверхностям $r = \text{const}$. На них $dr = 0$, так что знак первого члена зависит от Δ , а знаки остальных слагаемых отрицательны.

Перепишем метрику в координатах Керра так:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \frac{\Delta}{\rho^2} (dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi)^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} ((r^2 + a^2) d\phi - a dx^+)^2 \\
 & - 2(dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi) dr - \rho^2 d\vartheta^2.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Изучим пересечение трехмерного светового конуса $ds = 0$ с касательными к поверхностям $r = \text{const}$. На них $dr = 0$, так что знак первого члена зависит от Δ , а знаки остальных слагаемых отрицательны.

- При $\Delta < 0$ все члены отрицательны, так что на $dx^+ = d\vartheta = d\phi = 0$ и световой конус пересекается с поверхностью только в вершине.

Перепишем метрику в координатах Керра так:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \frac{\Delta}{\rho^2} (dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi)^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} ((r^2 + a^2) d\phi - a dx^+)^2 \\
 & - 2(dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi) dr - \rho^2 d\vartheta^2.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Изучим пересечение трехмерного светового конуса $ds = 0$ с касательными к поверхностям $r = \text{const}$. На них $dr = 0$, так что знак первого члена зависит от Δ , а знаки остальных слагаемых отрицательны.

- При $\Delta < 0$ все члены отрицательны, так что на $dx^+ = d\vartheta = d\phi = 0$ и световой конус пересекается с поверхностью только в вершине.
- При $\Delta > 0$ конус пересекается с поверхностью по двумерному конусу

$$\rho^4 d\vartheta^2 = \Delta (dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi)^2 - \sin^2 \vartheta ((r^2 + a^2) d\phi - a dx^+)^2.$$

Перепишем метрику в координатах Керра так:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi)^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} ((r^2 + a^2) d\phi - a dx^+)^2 - 2(dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi) dr - \rho^2 d\vartheta^2. \quad (27)$$

Изучим пересечение трехмерного светового конуса $ds = 0$ с касательными к поверхностям $r = \text{const}$. На них $dr = 0$, так что знак первого члена зависит от Δ , а знаки остальных слагаемых отрицательны.

- При $\Delta < 0$ все члены отрицательны, так что на $dx^+ = d\vartheta = d\phi = 0$ и световой конус пересекается с поверхностью только в вершине.
- При $\Delta > 0$ конус пересекается с поверхностью по двумерному конусу

$$\rho^4 d\vartheta^2 = \Delta (dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi)^2 - \sin^2 \vartheta ((r^2 + a^2) d\phi - a dx^+)^2.$$

- При $\Delta = 0$ двумерный конус вырождается в прямую

$$d\vartheta = 0, \quad \frac{d\phi}{dx^+} = \frac{a}{r^2 + a^2}.$$

Перепишем метрику в координатах Керра так:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi)^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} ((r^2 + a^2) d\phi - a dx^+)^2 - 2(dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi) dr - \rho^2 d\vartheta^2. \quad (27)$$

Изучим пересечение трехмерного светового конуса $ds = 0$ с касательными к поверхностям $r = \text{const}$. На них $dr = 0$, так что знак первого члена зависит от Δ , а знаки остальных слагаемых отрицательны.

- При $\Delta < 0$ все члены отрицательны, так что на $dx^+ = d\vartheta = d\phi = 0$ и световой конус пересекается с поверхностью только в вершине.
- При $\Delta > 0$ конус пересекается с поверхностью по двумерному конусу

$$\rho^4 d\vartheta^2 = \Delta (dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi)^2 - \sin^2 \vartheta ((r^2 + a^2) d\phi - a dx^+)^2.$$

- При $\Delta = 0$ двумерный конус вырождается в прямую

$$d\vartheta = 0, \quad \frac{d\phi}{dx^+} = \frac{a}{r^2 + a^2}.$$

Можно показать, что $g^{rr} = 0$ при $\Delta = 0$ и, следовательно, $g^{\mu\nu} \Delta_{,\mu} \Delta_{,\nu} = g^{rr} (\Delta_{,r})^2 = 0$, то есть поверхность $\Delta = 0$ является изотропной гиперповерхностью.

Таким образом поверхности $r = r_{\pm}$ являются изотропными гиперповерхностями, то есть конгруэнциями изотропных геодезических

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \phi = \phi_0 + \frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2} x^+$$

Таким образом поверхности $r = r_{\pm}$ являются изотропными гиперповерхностями, то есть конгруэнциями изотропных геодезических

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \phi = \phi_0 + \frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2} x^+$$

В областях $r > r_+$ и $r < r_-$ частицы могут двигаться как с уменьшением, так и с увеличением r , что соответствует областям *I* и *III*.

Таким образом поверхности $r = r_{\pm}$ являются изотропными гиперповерхностями, то есть конгруэнциями изотропных геодезических

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \phi = \phi_0 + \frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2} x^+$$

В областях $r > r_+$ и $r < r_-$ частицы могут двигаться как с уменьшением, так и с увеличением r , что соответствует областям *I* и *III*. В области $r_- < r < r_+$ световой конус будущего обращен в сторону уменьшения r и мировые линии направлены к «центру». Это отвечает области *II*.

Таким образом поверхности $r = r_{\pm}$ являются изотропными гиперповерхностями, то есть конгруэнциями изотропных геодезических

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \phi = \phi_0 + \frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2} x^+$$

В областях $r > r_+$ и $r < r_-$ частицы могут двигаться как с уменьшением, так и с увеличением r , что соответствует областям *I* и *III*. В области $r_- < r < r_+$ световой конус будущего обращен в сторону уменьшения r и мировые линии направлены к «центру». Это отвечает области *II*. Таким образом, поверхность $r = r_+$ является **горизонтом событий**, а поверхность $r = r_-$ — **горизонтом Коши**.

Таким образом поверхности $r = r_{\pm}$ являются изотропными гиперповерхностями, то есть конгруэнциями изотропных геодезических

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \phi = \phi_0 + \frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2} x^+$$

В областях $r > r_+$ и $r < r_-$ частицы могут двигаться как с уменьшением, так и с увеличением r , что соответствует областям *I* и *III*. В области $r_- < r < r_+$ световой конус будущего обращен в сторону уменьшения r и мировые линии направлены к «центру». Это отвечает области *II*. Таким образом, поверхность $r = r_+$ является **горизонтом событий**, а поверхность $r = r_-$ — **горизонтом Коши**.

Значение $r = r_{e,+}(\vartheta)$ играет роль горизонта только для радиальных движений (с $\vartheta, \phi = \text{const}$). Таким образом, внутри этой фигуры частицы не могут быть неподвижны относительно удаленного наблюдателя: они увлекаются вращением черной дыры.

Таким образом поверхности $r = r_{\pm}$ являются изотропными гиперповерхностями, то есть конгруэнциями изотропных геодезических

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \phi = \phi_0 + \frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2} x^+$$

В областях $r > r_+$ и $r < r_-$ частицы могут двигаться как с уменьшением, так и с увеличением r , что соответствует областям *I* и *III*. В области $r_- < r < r_+$ световой конус будущего обращен в сторону уменьшения r и мировые линии направлены к «центру». Это отвечает области *II*. Таким образом, поверхность $r = r_+$ является **горизонтом событий**, а поверхность $r = r_-$ — **горизонтом Коши**.

Значение $r = r_{e,+}(\vartheta)$ играет роль горизонта только для радиальных движений (с $\vartheta, \phi = \text{const}$). Таким образом, внутри этой фигуры частицы не могут быть неподвижны относительно удаленного наблюдателя: они увлекаются вращением черной дыры. Эта поверхность называется **пределом статичности**, а область между пределом статичности и горизонтом называется **эргосферой**.

Другое отличие вращающейся черной дыры состоит в том, что сингулярность в пространстве имеет топологию окружности.

Другое отличие вращающейся черной дыры состоит в том, что сингулярность в пространстве имеет топологию окружности.

Другое отличие вращающейся черной дыры состоит в том, что сингулярность в пространстве имеет топологию окружности. Если вычислить компоненты тензора Римана, то они имеют особенность в точке $r = 0$, $\vartheta = \pi/2$.

Другое отличие вращающейся черной дыры состоит в том, что сингулярность в пространстве имеет топологию окружности. Если вычислить компоненты тензора Римана, то они имеют особенность в точке $r = 0$, $\vartheta = \pi/2$.

Чтобы понять это, перейдем к координатам

$$X^0 = x^+ - r, \quad X^1 + iX^2 = (r + ia)e^{i\phi} \sin \vartheta, \quad X^3 = r \cos \vartheta. \quad (28)$$

Обратно, r является решением уравнения

$$r^4 - ((X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 - a^2)r^2 - a^2(X^3)^2 = 0. \quad (29)$$

Другое отличие вращающейся черной дыры состоит в том, что сингулярность в пространстве имеет топологию окружности. Если вычислить компоненты тензора Римана, то они имеют особенность в точке $r = 0$, $\vartheta = \pi/2$.

Чтобы понять это, перейдем к координатам

$$X^0 = x^+ - r, \quad X^1 + iX^2 = (r + ia)e^{i\phi} \sin \vartheta, \quad X^3 = r \cos \vartheta. \quad (28)$$

Обратно, r является решением уравнения

$$r^4 - ((X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 - a^2)r^2 - a^2(X^3)^2 = 0. \quad (29)$$

Метрика в этих координатах принимает вид [метрики Керра—Шильда](#)

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu - 2H(k_\mu dX^\mu)^2, \quad (30)$$

где H и k_μ ($g^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0$) — некоторые функции координат.

Другое отличие вращающейся черной дыры состоит в том, что сингулярность в пространстве имеет топологию окружности. Если вычислить компоненты тензора Римана, то они имеют особенность в точке $r = 0$, $\vartheta = \pi/2$.

Чтобы понять это, перейдем к координатам

$$X^0 = x^+ - r, \quad X^1 + iX^2 = (r + ia)e^{i\phi} \sin \vartheta, \quad X^3 = r \cos \vartheta. \quad (28)$$

Обратно, r является решением уравнения

$$r^4 - ((X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 - a^2)r^2 - a^2(X^3)^2 = 0. \quad (29)$$

Метрика в этих координатах принимает вид [метрики Керра—Шильда](#)

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu - 2H(k_\mu dX^\mu)^2, \quad (30)$$

где H и k_μ ($g^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0$) — некоторые функции координат. Для решения Керра—Ньюмена они принимают вид

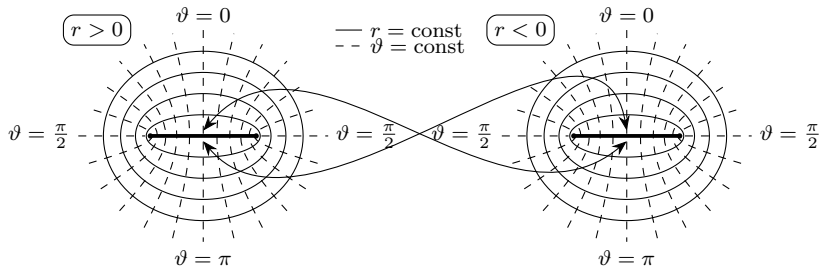
$$H = \frac{r_g r - r_Q^2}{2\rho^2}, \quad k_\mu dX^\mu = dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi. \quad (31)$$

При данном x^+ поверхности $r = \text{const}$ представляют собой сплюснутые эллипсоиды вращения с общей фокальной окружностью $(X^1)^2 + (X^2)^2 = a^2$, $X^3 = 0$.

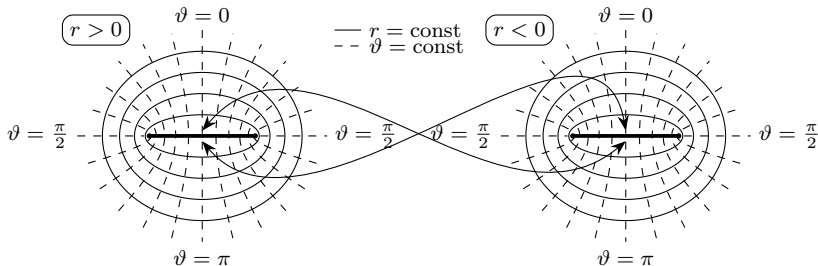
При данном x^+ поверхности $r = \text{const}$ представляют собой сплюснутые эллипсоиды вращения с общей фокальной окружностью $(X^1)^2 + (X^2)^2 = a^2$, $X^3 = 0$. При $r = 0$ эллипсоиды вырождаются в диск, через который метрику можно **продлить в область $r < 0$** . Сингулярность находится только на фокальной окружности.

Кольцевая сингулярность

При данном x^+ поверхности $r = \text{const}$ представляют собой сплюснутые эллипсоиды вращения с общей фокальной окружностью $(X^1)^2 + (X^2)^2 = a^2$, $X^3 = 0$. При $r = 0$ эллипсоиды вырождаются в диск, через который метрику можно продлить в область $r < 0$. Сингулярность находится только на фокальной окружности.



При данном x^+ поверхности $r = \text{const}$ представляют собой сплюснутые эллипсоиды вращения с общей фокальной окружностью $(X^1)^2 + (X^2)^2 = a^2$, $X^3 = 0$. При $r = 0$ эллипсоиды вырождаются в диск, через который метрику можно продлить в область $r < 0$. Сингулярность находится только на фокальной окружности.



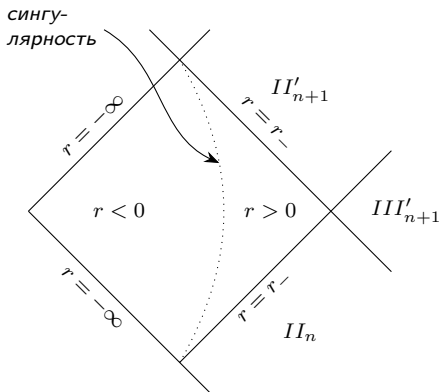
При $r < 0$ всегда имеем $\Delta > 0$, так что никаких горизонтов в этой области нет. Она неотличима от вселенной с объектом отрицательной массы.

Диаграмма Пенроуза в областях типа III

Диаграммы Пенроуза для метрики Керра—Ньюмена отличаются от диаграмм для метрики Рейснера—Нордстрема только в областях III_n , III'_n .

Диаграмма Пенроуза в областях типа III

Диаграммы Пенроуза для метрики Керра—Ньюмена отличаются от диаграмм для метрики Рейснера—Нордстрема только в областях III_n , III'_n . Вне экваториальной плоскости сингулярность не видна, а в экваториальной плоскости область III_n имеет вид



Насколько неизбежно появление сингулярностей в общей теории относительности?

Насколько неизбежно появление сингулярностей в общей теории относительности? Кажется, что появление сингулярностей достаточно типично, но хотелось бы уточнить это утверждение.

Насколько неизбежно появление сингулярностей в общей теории относительности? Кажется, что появление сингулярностей достаточно типично, но хотелось бы уточнить это утверждение. Имеется ряд теорем (Пенроуз, Хокинг), дающих достаточные условия для появления сингулярностей. Эти теоремы используют понятие ловушечной поверхности.

Насколько неизбежно появление сингулярностей в общей теории относительности? Кажется, что появление сингулярностей достаточно типично, но хотелось бы уточнить это утверждение. Имеется ряд теорем (Пенроуз, Хокинг), дающих достаточные условия для появления сингулярностей. Эти теоремы используют понятие ловушечной поверхности. Рассмотрим [замкнутое](#) компактное ориентируемое пространственноподобное двумерное подмногообразие \mathcal{T} в пространстве-времени.

Насколько неизбежно появление сингулярностей в общей теории относительности? Кажется, что появление сингулярностей достаточно типично, но хотелось бы уточнить это утверждение. Имеется ряд теорем (Пенроуз, Хокинг), дающих достаточные условия для появления сингулярностей. Эти теоремы используют понятие ловушечной поверхности. Рассмотрим **замкнутое** компактное ориентируемое пространственноподобное двумерное подмногообразие \mathcal{T} в пространстве-времени. Через каждую точку этого многообразия проходит **две ортогональные ему** изотропные геодезические.

Насколько неизбежно появление сингулярностей в общей теории относительности? Кажется, что появление сингулярностей достаточно типично, но хотелось бы уточнить это утверждение. Имеется ряд теорем (Пенроуз, Хокинг), дающих достаточные условия для появления сингулярностей. Эти теоремы используют понятие ловушечной поверхности. Рассмотрим **замкнутое** компактное ориентируемое пространственноподобное двумерное подмногообразие \mathcal{T} в пространстве-времени. Через каждую точку этого многообразия проходит **две ортогональные ему** изотропные геодезические. По каждому из этих семейств геодезических мы можем построить в некоторой окрестности каждой точки x многообразия \mathcal{T} два пучка изотропных геодезических \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 .

Насколько неизбежно появление сингулярностей в общей теории относительности? Кажется, что появление сингулярностей достаточно типично, но хотелось бы уточнить это утверждение. Имеется ряд теорем (Пенроуз, Хокинг), дающих достаточные условия для появления сингулярностей. Эти теоремы используют понятие ловушечной поверхности. Рассмотрим **замкнутое** компактное ориентируемое пространственноподобное двумерное подмногообразие \mathcal{T} в пространстве-времени. Через каждую точку этого многообразия проходит **две ортогональные ему** изотропные геодезические. По каждому из этих семейств геодезических мы можем построить в некоторой окрестности каждой точки x многообразия \mathcal{T} два пучка изотропных геодезических \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 . Введем на них аффинный параметр τ так, чтобы $\tau = 0$ на \mathcal{T} .

Насколько неизбежно появление сингулярностей в общей теории относительности? Кажется, что появление сингулярностей достаточно типично, но хотелось бы уточнить это утверждение. Имеется ряд теорем (Пенроуз, Хокинг), дающих достаточные условия для появления сингулярностей. Эти теоремы используют понятие ловушечной поверхности. Рассмотрим **замкнутое** компактное ориентируемое пространственноподобное двумерное подмногообразие \mathcal{T} в пространстве-времени. Через каждую точку этого многообразия проходит **две ортогональные ему** изотропные геодезические. По каждому из этих семейств геодезических мы можем построить в некоторой окрестности каждой точки x многообразия \mathcal{T} два пучка изотропных геодезических \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 . Введем на них аффинный параметр τ так, чтобы $\tau = 0$ на \mathcal{T} . Мы можем измерить площади $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ пучков в зависимости от аффинного параметра.

Насколько неизбежно появление сингулярностей в общей теории относительности? Кажется, что появление сингулярностей достаточно типично, но хотелось бы уточнить это утверждение. Имеется ряд теорем (Пенроуз, Хокинг), дающих достаточные условия для появления сингулярностей. Эти теоремы используют понятие ловушечной поверхности. Рассмотрим **замкнутое** компактное ориентируемое пространственноподобное двумерное подмногообразие \mathcal{T} в пространстве-времени. Через каждую точку этого многообразия проходит **две ортогональные ему** изотропные геодезические. По каждому из этих семейств геодезических мы можем построить в некоторой окрестности каждой точки x многообразия \mathcal{T} два пучка изотропных геодезических \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 . Введем на них аффинный параметр τ так, чтобы $\tau = 0$ на \mathcal{T} . Мы можем измерить площади $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ пучков в зависимости от аффинного параметра. Тогда, если

$$\left. \frac{dA_i}{d\tau} \right|_{\tau=0} < 0 \quad (i = 1, 2)$$

для каждой точки \mathcal{T} , то \mathcal{T} называется **ловушечной поверхностью**.

Пространство-время не может быть изотропно геодезически полным (то есть аффинные параметры на некоторых изотропных геодезических не будут принимать значения на всем \mathbb{R}), если

Пространство-время не может быть изотропно геодезически полным (то есть аффинные параметры на некоторых изотропных геодезических не будут принимать значения на всем \mathbb{R}), если

- 1) в каждой точке пространства-времени x для любого изотропного вектора $k \in TM_x$ выполняется неравенство $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$;

Пространство-время не может быть изотропно геодезически полным (то есть аффинные параметры на некоторых изотропных геодезических не будут принимать значения на всем \mathbb{R}), если

- 1) в каждой точке пространства-времени x для любого изотропного вектора $k \in TM_x$ выполняется неравенство $R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq 0$;
- 2) в пространстве-времени существует некомпактная глобальная поверхность Коши;

Пространство-время не может быть изотропно геодезически полным (то есть аффинные параметры на некоторых изотропных геодезических не будут принимать значения на всем \mathbb{R}), если

- 1) в каждой точке пространства-времени x для любого изотропного вектора $k \in TM_x$ выполняется неравенство $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$;
- 2) в пространстве-времени существует некомпактная глобальная поверхность Коши;
- 3) в пространстве-времени существует ловушечная поверхность.

Рассмотрим семейство изотропных гиперповерхностей $\mathcal{H}_c : F(x) = c$. Как мы видели, оно представляет собой конгруэнцию изотропных геодезических $\varphi(\tau, y, c)$, удовлетворяющих условию

$$\dot{\varphi}(\tau, y, c) = l(\varphi(\tau, y, c)), \quad l^\mu(x) = g^{\mu\nu} F_{,\nu}(x).$$

Рассмотрим семейство изотропных гиперповерхностей $\mathcal{H}_c : F(x) = c$. Как мы видели, оно представляет собой конгруэнцию изотропных геодезических $\varphi(\tau, y, c)$, удовлетворяющих условию

$$\dot{\varphi}(\tau, y, c) = l(\varphi(\tau, y, c)), \quad l^\mu(x) = g^{\mu\nu} F_{,\nu}(x).$$

Пусть $x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, 0, c)$, $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, \delta y, c)$ для некоторого малого δy . Тогда

$$\frac{d}{d\tau} \delta x^\lambda = |$$

Рассмотрим семейство изотропных гиперповерхностей $\mathcal{H}_c : F(x) = c$. Как мы видели, оно представляет собой конгруэнцию изотропных геодезических $\varphi(\tau, y, c)$, удовлетворяющих условию

$$\dot{\varphi}(\tau, y, c) = l(\varphi(\tau, y, c)), \quad l^\mu(x) = g^{\mu\nu} F_{,\nu}(x).$$

Пусть $x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, 0, c)$, $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, \delta y, c)$ для некоторого малого δy . Тогда

$$\frac{d}{d\tau} \delta x^\lambda = l^\lambda_{,\mu} \delta x^\mu.$$

Рассмотрим семейство изотропных гиперповерхностей $\mathcal{H}_c : F(x) = c$. Как мы видели, оно представляет собой конгруэнцию изотропных геодезических $\varphi(\tau, y, c)$, удовлетворяющих условию

$$\dot{\varphi}(\tau, y, c) = l(\varphi(\tau, y, c)), \quad l^\mu(x) = g^{\mu\nu} F_{,\nu}(x).$$

Пусть $x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, 0, c)$, $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, \delta y, c)$ для некоторого малого δy . Тогда

$$\frac{d}{d\tau} \delta x^\lambda = l^\lambda{}_{,\mu} \delta x^\mu.$$

Но нас интересует не изменение самого δx^μ , а изменение его изображения на семействе экранов $S(\tau)$, движущихся со скоростями $U(\tau)$ и перпендикулярных лучам:

$$U(\tau) \delta x(\tau) = l(\tau) \delta x(\tau) = 0.$$

Так как скорости экранов не важны для изображений, будем считать $U(\tau)$ ковариантно-постоянным: $\nabla_{l(\tau)} U(\tau) = 0$.

Рассмотрим семейство изотропных гиперповерхностей $\mathcal{H}_c : F(x) = c$. Как мы видели, оно представляет собой конгруэнцию изотропных геодезических $\varphi(\tau, y, c)$, удовлетворяющих условию

$$\dot{\varphi}(\tau, y, c) = l(\varphi(\tau, y, c)), \quad l^\mu(x) = g^{\mu\nu} F_{,\nu}(x).$$

Пусть $x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, 0, c)$, $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, \delta y, c)$ для некоторого малого δy . Тогда

$$\frac{d}{d\tau} \delta x^\lambda = l^\lambda{}_{,\mu} \delta x^\mu.$$

Но нас интересует не изменение самого δx^μ , а изменение его изображения на семействе экранов $S(\tau)$, движущихся со скоростями $U(\tau)$ и перпендикулярных лучам:

$$U(\tau) \delta x(\tau) = l(\tau) \delta x(\tau) = 0.$$

Так как скорости экранов не важны для изображений, будем считать $U(\tau)$ ковариантно-постоянным: $\nabla_{l(\tau)} U(\tau) = 0$.

Вид изображения определяется метрикой, поэтом изображение не менялось бы, если бы δx параллельно переносился бы вдоль геодезических. Определим $\tilde{\delta}_{\tau_0} x(\tau)$ как результат параллельного переноса $\delta x(\tau_0)$ вдоль кривой $x(\tau)$ в точку с параметром τ .

Рассмотрим семейство изотропных гиперповерхностей $\mathcal{H}_c : F(x) = c$. Как мы видели, оно представляет собой конгруэнцию изотропных геодезических $\varphi(\tau, y, c)$, удовлетворяющих условию

$$\dot{\varphi}(\tau, y, c) = l(\varphi(\tau, y, c)), \quad l^\mu(x) = g^{\mu\nu} F_{,\nu}(x).$$

Пусть $x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, 0, c)$, $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, \delta y, c)$ для некоторого малого δy . Тогда

$$\frac{d}{d\tau} \delta x^\lambda = l^\lambda{}_{,\mu} \delta x^\mu.$$

Но нас интересует не изменение самого δx^μ , а изменение его изображения на семействе экранов $S(\tau)$, движущихся со скоростями $U(\tau)$ и перпендикулярных лучам:

$$U(\tau) \delta x(\tau) = l(\tau) \delta x(\tau) = 0.$$

Так как скорости экранов не важны для изображений, будем считать $U(\tau)$ ковариантно-постоянным: $\nabla_{l(\tau)} U(\tau) = 0$.

Вид изображения определяется метрикой, поэтом изображение не менялось бы, если бы δx параллельно переносился бы вдоль геодезических. Определим $\tilde{\delta}_{\tau_0} x(\tau)$ как результат параллельного переноса $\delta x(\tau_0)$ вдоль кривой $x(\tau)$ в точку с параметром τ . Этот вектор ковариантно-постоянный, поэтому

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{\delta}_{\tau_0} x^\lambda = -\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} l^\nu \tilde{\delta}_{\tau_0} x^\mu.$$

Рассмотрим семейство изотропных гиперповерхностей $\mathcal{H}_c : F(x) = c$. Как мы видели, оно представляет собой конгруэнцию изотропных геодезических $\varphi(\tau, y, c)$, удовлетворяющих условию

$$\dot{\varphi}(\tau, y, c) = l(\varphi(\tau, y, c)), \quad l^\mu(x) = g^{\mu\nu} F_{,\nu}(x).$$

Пусть $x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, 0, c)$, $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, \delta y, c)$ для некоторого малого δy . Тогда

$$\frac{d}{d\tau} \delta x^\lambda = l^\lambda_{,\mu} \delta x^\mu.$$

Но нас интересует не изменение самого δx^μ , а изменение его изображения на семействе экранов $S(\tau)$, движущихся со скоростями $U(\tau)$ и перпендикулярных лучам:

$$U(\tau) \delta x(\tau) = l(\tau) \delta x(\tau) = 0.$$

Так как скорости экранов не важны для изображений, будем считать $U(\tau)$ ковариантно-постоянным: $\nabla_{l(\tau)} U(\tau) = 0$.

Вид изображения определяется метрикой, поэтом изображение не менялось бы, если бы δx параллельно переносился бы вдоль геодезических. Определим $\tilde{\delta}_{\tau_0} x(\tau)$ как результат параллельного переноса $\delta x(\tau_0)$ вдоль кривой $x(\tau)$ в точку с параметром τ . Этот вектор ковариантно-постоянный, поэтому

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{\delta}_{\tau_0} x^\lambda = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu} l^\nu \tilde{\delta}_{\tau_0} x^\mu.$$

Определим скорость изменения изображения как

$$\delta \dot{x}^\lambda(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\delta x^\lambda(\tau + \Delta\tau) - \tilde{\delta}_\tau x^\lambda(\tau + \Delta\tau)}{\Delta\tau} \quad (32)$$

Рассмотрим семейство изотропных гиперповерхностей $\mathcal{H}_c : F(x) = c$. Как мы видели, оно представляет собой конгруэнцию изотропных геодезических $\varphi(\tau, y, c)$, удовлетворяющих условию

$$\dot{\varphi}(\tau, y, c) = l(\varphi(\tau, y, c)), \quad l^\mu(x) = g^{\mu\nu} F_{,\nu}(x).$$

Пусть $x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, 0, c)$, $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, \delta y, c)$ для некоторого малого δy . Тогда

$$\frac{d}{d\tau} \delta x^\lambda = l^\lambda_{,\mu} \delta x^\mu.$$

Но нас интересует не изменение самого δx^μ , а изменение его изображения на семействе экранов $S(\tau)$, движущихся со скоростями $U(\tau)$ и перпендикулярных лучам:

$$U(\tau) \delta x(\tau) = l(\tau) \delta x(\tau) = 0.$$

Так как скорости экранов не важны для изображений, будем считать $U(\tau)$ ковариантно-постоянным: $\nabla_{l(\tau)} U(\tau) = 0$.

Вид изображения определяется метрикой, поэтом изображение не менялось бы, если бы δx параллельно переносился бы вдоль геодезических. Определим $\tilde{\delta}_{\tau_0} x(\tau)$ как результат параллельного переноса $\delta x(\tau_0)$ вдоль кривой $x(\tau)$ в точку с параметром τ . Этот вектор ковариантно-постоянный, поэтому

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{\delta}_{\tau_0} x^\lambda = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu} l^\nu \tilde{\delta}_{\tau_0} x^\mu.$$

Определим скорость изменения изображения как

$$\delta \dot{x}^\lambda(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\delta x^\lambda(\tau + \Delta\tau) - \tilde{\delta}_\tau x^\lambda(\tau + \Delta\tau)}{\Delta\tau} = l^\lambda_{,\mu} \delta x^\mu, \quad (32)$$

Рассмотрим семейство изотропных гиперповерхностей $\mathcal{H}_c : F(x) = c$. Как мы видели, оно представляет собой конгруэнцию изотропных геодезических $\varphi(\tau, y, c)$, удовлетворяющих условию

$$\dot{\varphi}(\tau, y, c) = l(\varphi(\tau, y, c)), \quad l^\mu(x) = g^{\mu\nu} F_{,\nu}(x).$$

Пусть $x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, 0, c)$, $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, \delta y, c)$ для некоторого малого δy . Тогда

$$\frac{d}{d\tau} \delta x^\lambda = l^\lambda_{,\mu} \delta x^\mu.$$

Но нас интересует не изменение самого δx^μ , а изменение его изображения на семействе экранов $S(\tau)$, движущихся со скоростями $U(\tau)$ и перпендикулярных лучам:

$$U(\tau) \delta x(\tau) = l(\tau) \delta x(\tau) = 0.$$

Так как скорости экранов не важны для изображений, будем считать $U(\tau)$ ковариантно-постоянным: $\nabla_{l(\tau)} U(\tau) = 0$.

Вид изображения определяется метрикой, поэтом изображение не менялось бы, если бы δx параллельно переносился бы вдоль геодезических. Определим $\tilde{\delta}_{\tau_0} x(\tau)$ как результат параллельного переноса $\delta x(\tau_0)$ вдоль кривой $x(\tau)$ в точку с параметром τ . Этот вектор ковариантно-постоянный, поэтому

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{\delta}_{\tau_0} x^\lambda = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu} l^\nu \tilde{\delta}_{\tau_0} x^\mu.$$

Определим скорость изменения изображения как

$$\delta \dot{x}^\lambda(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\delta x^\lambda(\tau + \Delta\tau) - \tilde{\delta}_{\tau_0} x^\lambda(\tau + \Delta\tau)}{\Delta\tau} = l^\lambda_{,\mu} \delta x^\mu, \quad \delta \dot{x} = \nabla_{\delta x} l. \quad (32)$$

Выберем на экранах $S(\tau)$ пару ковариантно-постоянных векторов $e_i(\tau)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющую условиям

$$U(\tau)e_i(\tau) = l(x(\tau))e_i(\tau) = 0, \quad e_i(\tau)e_j(\tau) = -\delta_{ij}. \quad (33)$$

Так как мы интересуемся изображениями и, значит, отождествляем все экраны, аргумент τ у e_i будем опускать.

Выберем на экранах $S(\tau)$ пару ковариантно-постоянных векторов $e_i(\tau)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющую условиям

$$U(\tau)e_i(\tau) = l(x(\tau))e_i(\tau) = 0, \quad e_i(\tau)e_j(\tau) = -\delta_{ij}. \quad (33)$$

Так как мы интересуемся изображениями и, значит, отождествляем все экраны, аргумент τ у e_i будем опускать.

Перейдем к комплексному базису:

$$m = \frac{e_1 + ie_2}{\sqrt{2}}, \quad \bar{m} = \frac{e_1 - ie_2}{\sqrt{2}}, \quad m^2 = \bar{m}^2 = 0, \quad m\bar{m} = -1. \quad (34)$$

Выберем на экранах $S(\tau)$ пару ковариантно-постоянных векторов $e_i(\tau)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющую условиям

$$U(\tau)e_i(\tau) = l(x(\tau))e_i(\tau) = 0, \quad e_i(\tau)e_j(\tau) = -\delta_{ij}. \quad (33)$$

Так как мы интересуемся изображениями и, значит, отождествляем все экраны, аргумент τ у e_i будем опускать.

Перейдем к комплексному базису:

$$m = \frac{e_1 + ie_2}{\sqrt{2}}, \quad \bar{m} = \frac{e_1 - ie_2}{\sqrt{2}}, \quad m^2 = \bar{m}^2 = 0, \quad m\bar{m} = -1. \quad (34)$$

Тогда точку $x^\mu + \delta x^\mu$ можно задать комплексным числом ζ :

$$\delta x^\mu = \zeta \bar{m}^\mu + \bar{\zeta} m^\mu. \quad (35)$$

Выберем на экранах $S(\tau)$ пару ковариантно-постоянных векторов $e_i(\tau)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющую условиям

$$U(\tau)e_i(\tau) = l(x(\tau))e_i(\tau) = 0, \quad e_i(\tau)e_j(\tau) = -\delta_{ij}. \quad (33)$$

Так как мы интересуемся изображениями и, значит, отождествляем все экраны, аргумент τ у e_i будем опускать.

Перейдем к комплексному базису:

$$m = \frac{e_1 + ie_2}{\sqrt{2}}, \quad \bar{m} = \frac{e_1 - ie_2}{\sqrt{2}}, \quad m^2 = \bar{m}^2 = 0, \quad m\bar{m} = -1. \quad (34)$$

Тогда точку $x^\mu + \delta x^\mu$ можно задать комплексным числом ζ :

$$\delta x^\mu = \zeta \bar{m}^\mu + \bar{\zeta} m^\mu. \quad (35)$$

Из (32) получаем

$$\dot{\zeta} = -(\rho\zeta + \sigma\bar{\zeta}), \quad (36)$$

где **оптические скаляры** равны

$$\rho = \left| \quad \quad \quad \right| \quad \sigma = \left| \quad \quad \quad \right| \quad (37)$$

Выберем на экранах $S(\tau)$ пару ковариантно-постоянных векторов $e_i(\tau)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющую условиям

$$U(\tau)e_i(\tau) = l(x(\tau))e_i(\tau) = 0, \quad e_i(\tau)e_j(\tau) = -\delta_{ij}. \quad (33)$$

Так как мы интересуемся изображениями и, значит, отождествляем все экраны, аргумент τ у e_i будем опускать.

Перейдем к комплексному базису:

$$m = \frac{e_1 + ie_2}{\sqrt{2}}, \quad \bar{m} = \frac{e_1 - ie_2}{\sqrt{2}}, \quad m^2 = \bar{m}^2 = 0, \quad m\bar{m} = -1. \quad (34)$$

Тогда точку $x^\mu + \delta x^\mu$ можно задать комплексным числом ζ :

$$\delta x^\mu = \zeta \bar{m}^\mu + \bar{\zeta} m^\mu. \quad (35)$$

Из (32) получаем

$$\dot{\zeta} = -(\rho\zeta + \sigma\bar{\zeta}), \quad (36)$$

где **оптические скаляры** равны

$$\rho = l_{\mu;\nu} m^\mu \bar{m}^\nu, \quad \sigma = l_{\mu;\nu} m^\mu m^\nu. \quad (37)$$

Если на экране $S(\tau)$ изобразить круг $\zeta(\tau, \theta) = e^{i\theta}$, то на экране $S(\tau + d\tau)$ будет виден эллипс

$$\zeta(\tau + d\tau, \theta) \quad (38)$$

Если на экране $S(\tau)$ изобразить круг $\zeta(\tau, \theta) = e^{i\theta}$, то на экране $S(\tau + d\tau)$ будет виден эллипс

$$\zeta(\tau + d\tau, \theta) = e^{i\theta}(1 - \rho d\tau) - e^{-i\theta} \sigma d\tau \quad (38)$$

Если на экране $S(\tau)$ изобразить круг $\zeta(\tau, \theta) = e^{i\theta}$, то на экране $S(\tau + d\tau)$ будет виден эллипс

$$\zeta(\tau + d\tau, \theta) = e^{i\theta}(1 - \rho d\tau) - e^{-i\theta}\sigma d\tau \quad (38)$$

с полуосями $a_{\pm} =$.

Если на экране $S(\tau)$ изобразить круг $\zeta(\tau, \theta) = e^{i\theta}$, то на экране $S(\tau + d\tau)$ будет виден эллипс

$$\zeta(\tau + d\tau, \theta) = e^{i\theta}(1 - \rho d\tau) - e^{-i\theta}\sigma d\tau \quad (38)$$

с полуосями $a_{\pm} = 1 - (\operatorname{Re} \rho \mp |\sigma|) d\tau$.

Если на экране $S(\tau)$ изобразить круг $\zeta(\tau, \theta) = e^{i\theta}$, то на экране $S(\tau + d\tau)$ будет виден эллипс

$$\zeta(\tau + d\tau, \theta) = e^{i\theta}(1 - \rho d\tau) - e^{-i\theta}\sigma d\tau \quad (38)$$

с полуосями $a_{\pm} = 1 - (\operatorname{Re} \rho \mp |\sigma|) d\tau$. Площадь уменьшится на \dots .

Если на экране $S(\tau)$ изобразить круг $\zeta(\tau, \theta) = e^{i\theta}$, то на экране $S(\tau + d\tau)$ будет виден эллипс

$$\zeta(\tau + d\tau, \theta) = e^{i\theta}(1 - \rho d\tau) - e^{-i\theta}\sigma d\tau \quad (38)$$

с полуосями $a_{\pm} = 1 - (\operatorname{Re} \rho \mp |\sigma|) d\tau$. Площадь уменьшится на $2\pi \operatorname{Re} \rho d\tau$.

Если на экране $S(\tau)$ изобразить круг $\zeta(\tau, \theta) = e^{i\theta}$, то на экране $S(\tau + d\tau)$ будет виден эллипс

$$\zeta(\tau + d\tau, \theta) = e^{i\theta}(1 - \rho d\tau) - e^{-i\theta}\sigma d\tau \quad (38)$$

с полуосями $a_{\pm} = 1 - (\operatorname{Re} \rho \mp |\sigma|) d\tau$. Площадь уменьшится на $2\pi \operatorname{Re} \rho d\tau$.
Для конгруэнции лучей, образующих изотропную гиперповерхность, имеем $l_{\mu;\nu} = F_{;\mu\nu} = l_{\nu;\mu}$, а, значит, $\rho \in \mathbb{R}$.

Если на экране $S(\tau)$ изобразить круг $\zeta(\tau, \theta) = e^{i\theta}$, то на экране $S(\tau + d\tau)$ будет виден эллипс

$$\zeta(\tau + d\tau, \theta) = e^{i\theta}(1 - \rho d\tau) - e^{-i\theta} \sigma d\tau \quad (38)$$

с полуосями $a_{\pm} = 1 - (\operatorname{Re} \rho \mp |\sigma|) d\tau$. Площадь уменьшится на $2\pi \operatorname{Re} \rho d\tau$. Для конгруэнции лучей, образующих изотропную гиперповерхность, имеем $l_{\mu;\nu} = F_{;\mu\nu} = l_{\nu;\mu}$, а, значит, $\rho \in \mathbb{R}$. Тогда для площади изображения δA имеем

$$\frac{d}{d\tau} \delta A^{1/2} = -\rho \delta A^{1/2}, \quad (39)$$

Если на экране $S(\tau)$ изобразить круг $\zeta(\tau, \theta) = e^{i\theta}$, то на экране $S(\tau + d\tau)$ будет виден эллипс

$$\zeta(\tau + d\tau, \theta) = e^{i\theta}(1 - \rho d\tau) - e^{-i\theta} \sigma d\tau \quad (38)$$

с полуосями $a_{\pm} = 1 - (\operatorname{Re} \rho \mp |\sigma|) d\tau$. Площадь уменьшится на $2\pi \operatorname{Re} \rho d\tau$. Для конгруэнции лучей, образующих изотропную гиперповерхность, имеем $l_{\mu;\nu} = F_{;\mu\nu} = l_{\nu;\mu}$, а, значит, $\rho \in \mathbb{R}$. Тогда для площади изображения δA имеем

$$\frac{d}{d\tau} \delta A^{1/2} = -\rho \delta A^{1/2}, \quad (39)$$

Изучим эволюцию оптических скаляров.

Если на экране $S(\tau)$ изобразить круг $\zeta(\tau, \theta) = e^{i\theta}$, то на экране $S(\tau + d\tau)$ будет виден эллипс

$$\zeta(\tau + d\tau, \theta) = e^{i\theta}(1 - \rho d\tau) - e^{-i\theta} \sigma d\tau \quad (38)$$

с полуосями $a_{\pm} = 1 - (\operatorname{Re} \rho \mp |\sigma|) d\tau$. Площадь уменьшится на $2\pi \operatorname{Re} \rho d\tau$. Для конгруэнции лучей, образующих изотропную гиперповерхность, имеем $l_{\mu;\nu} = F_{;\mu\nu} = l_{\nu;\mu}$, а, значит, $\rho \in \mathbb{R}$. Тогда для площади изображения δA имеем

$$\frac{d}{d\tau} \delta A^{1/2} = -\rho \delta A^{1/2}, \quad (39)$$

Изучим эволюцию оптических скаляров.

Задача. Докажите тождество

$$\delta_{\nu}^{\mu} = -\frac{1}{(Ul)^2} l^{\mu} l_{\nu} - m^{\mu} \bar{m}_{\nu} - \bar{m}^{\mu} m_{\nu} + \frac{1}{Ul} (U^{\mu} l_{\nu} + l^{\mu} U_{\nu}). \quad (40)$$

Если на экране $S(\tau)$ изобразить круг $\zeta(\tau, \theta) = e^{i\theta}$, то на экране $S(\tau + d\tau)$ будет виден эллипс

$$\zeta(\tau + d\tau, \theta) = e^{i\theta}(1 - \rho d\tau) - e^{-i\theta} \sigma d\tau \quad (38)$$

с полуосями $a_{\pm} = 1 - (\operatorname{Re} \rho \mp |\sigma|) d\tau$. Площадь уменьшится на $2\pi \operatorname{Re} \rho d\tau$. Для конгруэнции лучей, образующих изотропную гиперповерхность, имеем $l_{\mu;\nu} = F_{;\mu\nu} = l_{\nu;\mu}$, а, значит, $\rho \in \mathbb{R}$. Тогда для площади изображения δA имеем

$$\frac{d}{d\tau} \delta A^{1/2} = -\rho \delta A^{1/2}, \quad (39)$$

Изучим эволюцию оптических скаляров.

Задача. Докажите тождество

$$\delta_{\nu}^{\mu} = -\frac{1}{(Ul)^2} l^{\mu} l_{\nu} - m^{\mu} \bar{m}_{\nu} - \bar{m}^{\mu} m_{\nu} + \frac{1}{Ul} (U^{\mu} l_{\nu} + l^{\mu} U_{\nu}). \quad (40)$$

Из определения тензора Римана и тензора Риччи имеем

$$l_{\lambda;\mu\nu} = l_{\lambda;\nu\mu} + R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} l_{\kappa}, \quad R_{\mu\nu} l^{\mu} l^{\nu} = -2R_{\kappa\mu\lambda\nu} m^{\kappa} l^{\mu} \bar{m}^{\lambda} l^{\nu}.$$

Если на экране $S(\tau)$ изобразить круг $\zeta(\tau, \theta) = e^{i\theta}$, то на экране $S(\tau + d\tau)$ будет виден эллипс

$$\zeta(\tau + d\tau, \theta) = e^{i\theta}(1 - \rho d\tau) - e^{-i\theta} \sigma d\tau \quad (38)$$

с полуосями $a_{\pm} = 1 - (\operatorname{Re} \rho \mp |\sigma|) d\tau$. Площадь уменьшится на $2\pi \operatorname{Re} \rho d\tau$. Для конгруэнции лучей, образующих изотропную гиперповерхность, имеем $l_{\mu;\nu} = F_{;\mu\nu} = l_{\nu;\mu}$, а, значит, $\rho \in \mathbb{R}$. Тогда для площади изображения δA имеем

$$\frac{d}{d\tau} \delta A^{1/2} = -\rho \delta A^{1/2}, \quad (39)$$

Изучим эволюцию оптических скаляров.

Задача. Докажите тождество

$$\delta_{\nu}^{\mu} = -\frac{1}{(Ul)^2} l^{\mu} l_{\nu} - m^{\mu} \bar{m}_{\nu} - \bar{m}^{\mu} m_{\nu} + \frac{1}{Ul} (U^{\mu} l_{\nu} + l^{\mu} U_{\nu}). \quad (40)$$

Из определения тензора Римана и тензора Риччи имеем

$$l_{\lambda;\mu\nu} = l_{\lambda;\nu\mu} + R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} l_{\kappa}, \quad R_{\mu\nu} l^{\mu} l^{\nu} = -2R_{\kappa\mu\lambda\nu} m^{\kappa} l^{\mu} \bar{m}^{\lambda} l^{\nu}.$$

Задача. Докажите второе тождество.

Задача. Докажите тождества

$$\dot{\rho} = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + \Phi, \quad \Phi = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^\mu l^\nu, \quad (41)$$

$$\dot{\sigma} = \sigma(\rho + \bar{\rho}) + \Psi, \quad \Psi = R_{\kappa\lambda\mu\nu}l^\kappa m^\lambda l^\mu m^\nu = C_{\kappa\lambda\mu\nu}l^\kappa m^\lambda l^\mu m^\nu. \quad (42)$$

Здесь $C_{\kappa\lambda\mu\nu}$ — тензор Вейля, то есть конформная часть тензора Римана (это равенство доказывать не надо). **Задача.** Докажите второе тождество.

Задача. Докажите тождества

$$\dot{\rho} = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + \Phi, \quad \Phi = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^\mu l^\nu, \quad (41)$$

$$\dot{\sigma} = \sigma(\rho + \bar{\rho}) + \Psi, \quad \Psi = R_{\kappa\lambda\mu\nu}l^\kappa m^\lambda l^\mu m^\nu = C_{\kappa\lambda\mu\nu}l^\kappa m^\lambda l^\mu m^\nu. \quad (42)$$

Здесь $C_{\kappa\lambda\mu\nu}$ — тензор Вейля, то есть конформная часть тензора Римана (это равенство доказывать не надо). **Задача.** Докажите второе тождество. Если при $\tau = \tau_0$ второй скаляр $\sigma = 0$ и всюду $\Phi = \Psi = 0$, имеем

$$\rho^{-1} - \rho_0^{-1} = \tau_0 - \tau.$$

Задача. Докажите тождества

$$\dot{\rho} = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + \Phi, \quad \Phi = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^\mu l^\nu, \quad (41)$$

$$\dot{\sigma} = \sigma(\rho + \bar{\rho}) + \Psi, \quad \Psi = R_{\kappa\lambda\mu\nu}l^\kappa m^\lambda l^\mu m^\nu = C_{\kappa\lambda\mu\nu}l^\kappa m^\lambda l^\mu m^\nu. \quad (42)$$

Здесь $C_{\kappa\lambda\mu\nu}$ — тензор Вейля, то есть конформная часть тензора Римана (это равенство доказывать не надо). **Задача.** Докажите второе тождество. Если при $\tau = \tau_0$ второй скаляр $\sigma = 0$ и всюду $\Phi = \Psi = 0$, имеем

$$\rho^{-1} - \rho_0^{-1} = \tau_0 - \tau.$$

Имеется некоторый момент $\tau_* = \tau_0 + \rho_0^{-1}$, где скаляр ρ обращается в бесконечность. Решая (39), получаем

$$\delta A^{1/2} \sim \tau - \tau_*.$$

Задача. Докажите тождества

$$\dot{\rho} = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + \Phi, \quad \Phi = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^\mu l^\nu, \quad (41)$$

$$\dot{\sigma} = \sigma(\rho + \bar{\rho}) + \Psi, \quad \Psi = R_{\kappa\lambda\mu\nu}l^\kappa m^\lambda l^\mu m^\nu = C_{\kappa\lambda\mu\nu}l^\kappa m^\lambda l^\mu m^\nu. \quad (42)$$

Здесь $C_{\kappa\lambda\mu\nu}$ — тензор Вейля, то есть конформная часть тензора Римана (это равенство доказывать не надо). **Задача.** Докажите второе тождество. Если при $\tau = \tau_0$ второй скаляр $\sigma = 0$ и всюду $\Phi = \Psi = 0$, имеем

$$\rho^{-1} - \rho_0^{-1} = \tau_0 - \tau.$$

Имеется некоторый момент $\tau_* = \tau_0 + \rho_0^{-1}$, где скаляр ρ обращается в бесконечность. Решая (39), получаем

$$\delta A^{1/2} \sim \tau - \tau_*.$$

Если $\rho(\tau_0) > 0$, в момент τ_* лучи соберутся в фокус.

Задача. Докажите тождества

$$\dot{\rho} = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + \Phi, \quad \Phi = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^\mu l^\nu, \quad (41)$$

$$\dot{\sigma} = \sigma(\rho + \bar{\rho}) + \Psi, \quad \Psi = R_{\kappa\lambda\mu\nu}l^\kappa m^\lambda l^\mu m^\nu = C_{\kappa\lambda\mu\nu}l^\kappa m^\lambda l^\mu m^\nu. \quad (42)$$

Здесь $C_{\kappa\lambda\mu\nu}$ — тензор Вейля, то есть конформная часть тензора Римана (это равенство доказывать не надо). **Задача.** Докажите второе тождество. Если при $\tau = \tau_0$ второй скаляр $\sigma = 0$ и всюду $\Phi = \Psi = 0$, имеем

$$\rho^{-1} - \rho_0^{-1} = \tau_0 - \tau.$$

Имеется некоторый момент $\tau_* = \tau_0 + \rho_0^{-1}$, где скаляр ρ обращается в бесконечность. Решая (39), получаем

$$\delta A^{1/2} \sim \tau - \tau_*.$$

Если $\rho(\tau_0) > 0$, в момент τ_* лучи соберутся в фокус.

Теорема о фокусировании. Если во всем пространстве $\Phi \geq 0$ и в некоторой точке светового пучка $\tau = \tau_0$ первый оптический скаляр положителен, $\rho(\tau_0) = \rho_0 > 0$, то на конечном положительном расстоянии от этой точки $\tau - \tau_0 \leq \rho_0^{-1}$ пучок света достигает фокальной точки и площадь его сечения обращается в нуль.

Задача. Докажите тождества

$$\dot{\rho} = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + \Phi, \quad \Phi = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^\mu l^\nu, \quad (41)$$

$$\dot{\sigma} = \sigma(\rho + \bar{\rho}) + \Psi, \quad \Psi = R_{\kappa\lambda\mu\nu}l^\kappa m^\lambda l^\mu m^\nu = C_{\kappa\lambda\mu\nu}l^\kappa m^\lambda l^\mu m^\nu. \quad (42)$$

Здесь $C_{\kappa\lambda\mu\nu}$ — тензор Вейля, то есть конформная часть тензора Римана (это равенство доказывать не надо). **Задача.** Докажите второе тождество. Если при $\tau = \tau_0$ второй скаляр $\sigma = 0$ и всюду $\Phi = \Psi = 0$, имеем

$$\rho^{-1} - \rho_0^{-1} = \tau_0 - \tau.$$

Имеется некоторый момент $\tau_* = \tau_0 + \rho_0^{-1}$, где скаляр ρ обращается в бесконечность. Решая (39), получаем

$$\delta A^{1/2} \sim \tau - \tau_*.$$

Если $\rho(\tau_0) > 0$, в момент τ_* лучи соберутся в фокус.

Теорема о фокусировании. Если во всем пространстве $\Phi \geq 0$ и в некоторой точке светового пучка $\tau = \tau_0$ первый оптический скаляр положителен, $\rho(\tau_0) = \rho_0 > 0$, то на конечном положительном расстоянии от этой точки $\tau - \tau_0 \leq \rho_0^{-1}$ пучок света достигает фокальной точки и площадь его сечения обращается в нуль. **Задача.** Докажите.

Задача. Докажите тождества

$$\dot{\rho} = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + \Phi, \quad \Phi = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^\mu l^\nu, \quad (41)$$

$$\dot{\sigma} = \sigma(\rho + \bar{\rho}) + \Psi, \quad \Psi = R_{\kappa\lambda\mu\nu}l^\kappa m^\lambda l^\mu m^\nu = C_{\kappa\lambda\mu\nu}l^\kappa m^\lambda l^\mu m^\nu. \quad (42)$$

Здесь $C_{\kappa\lambda\mu\nu}$ — тензор Вейля, то есть конформная часть тензора Римана (это равенство доказывать не надо). **Задача.** Докажите второе тождество. Если при $\tau = \tau_0$ второй скаляр $\sigma = 0$ и всюду $\Phi = \Psi = 0$, имеем

$$\rho^{-1} - \rho_0^{-1} = \tau_0 - \tau.$$

Имеется некоторый момент $\tau_* = \tau_0 + \rho_0^{-1}$, где скаляр ρ обращается в бесконечность. Решая (39), получаем

$$\delta A^{1/2} \sim \tau - \tau_*.$$

Если $\rho(\tau_0) > 0$, в момент τ_* лучи соберутся в фокус.

Теорема о фокусировании. Если во всем пространстве $\Phi \geq 0$ и в некоторой точке светового пучка $\tau = \tau_0$ первый оптический скаляр положителен, $\rho(\tau_0) = \rho_0 > 0$, то на конечном положительном расстоянии от этой точки $\tau - \tau_0 \leq \rho_0^{-1}$ пучок света достигает фокальной точки и площадь его сечения обращается в нуль. **Задача.** Докажите. Действительно, из (39) получаем

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \delta A^{1/2} = -(\sigma\bar{\sigma} + \Phi)\delta A^{1/2}. \quad (43)$$

Поскольку правая часть неположительна, имеем $\frac{d}{d\tau} \delta A^{1/2} \leq -\rho_0 \delta A_0^{1/2}$, откуда и следует теорема.