

Лекция 12. Движение в относительно слабом гравитационном поле и экспериментальная проверка ОТО

Михаил Лашкевич

Вековое смещение перигелия Меркурия: история

Вековое смещение перигелия Меркурия было открыто в 1859 году французским астрономом Урбенем Леверье.

Вековое смещение перигелия Меркурия: история

Вековое смещение перигелия Меркурия было открыто в 1859 году французским астрономом Урбеном Леверье. Он обработал результаты сорокалетних наблюдений Парижской обсерватории и пришел к выводу, что смещение перигелия на $38''$ за столетие выше, чем следует из теории Ньютона с учетом взаимодействия с другими планетами.

Вековое смещение перигелия Меркурия: история

Вековое смещение перигелия Меркурия было открыто в 1859 году французским астрономом Урбеном Леверье. Он обработал результаты сорокалетних наблюдений Парижской обсерватории и пришел к выводу, что смещение перигелия на $38''$ за столетие выше, чем следует из теории Ньютона с учетом взаимодействия с другими планетами. В 1895 году американский астроном Саймон Ньюком уточнил этот результат ($43''$ за столетие) и нашел аномальное смещение перигелия также у Марса.

Вековое смещение перигелия Меркурия: история

Вековое смещение перигелия Меркурия было открыто в 1859 году французским астрономом Урбеном Леверье. Он обработал результаты сорокалетних наблюдений Парижской обсерватории и пришел к выводу, что смещение перигелия на $38''$ за столетие выше, чем следует из теории Ньютона с учетом взаимодействия с другими планетами. В 1895 году американский астроном Саймон Ньюком уточнил этот результат ($43''$ за столетие) и нашел аномальное смещение перигелия также у Марса.

В XIX и начале XX веков предпринимались попытки объяснить это явление:

Вековое смещение перигелия Меркурия было открыто в 1859 году французским астрономом Урбеном Леверье. Он обработал результаты сорокалетних наблюдений Парижской обсерватории и пришел к выводу, что смещение перигелия на $38''$ за столетие выше, чем следует из теории Ньютона с учетом взаимодействия с другими планетами. В 1895 году американский астроном Саймон Ньюком уточнил этот результат ($43''$ за столетие) и нашел аномальное смещение перигелия также у Марса.

В XIX и начале XX веков предпринимались попытки объяснить это явление:

- 1 Наличием планеты («Вулкан»), нескольких объектов или газовых облаков внутри орбиты Меркурия.

Вековое смещение перигелия Меркурия было открыто в 1859 году французским астрономом Урбеном Леверье. Он обработал результаты сорокалетних наблюдений Парижской обсерватории и пришел к выводу, что смещение перигелия на $38''$ за столетие выше, чем следует из теории Ньютона с учетом взаимодействия с другими планетами. В 1895 году американский астроном Саймон Ньюком уточнил этот результат ($43''$ за столетие) и нашел аномальное смещение перигелия также у Марса.

В XIX и начале XX веков предпринимались попытки объяснить это явление:

- 1 Наличием планеты («Вулкан»), нескольких объектов или газовых облаков внутри орбиты Меркурия. К концу XIX века такие объекты были исключены.

Вековое смещение перигелия Меркурия было открыто в 1859 году французским астрономом Урбеном Леверье. Он обработал результаты сорокалетних наблюдений Парижской обсерватории и пришел к выводу, что смещение перигелия на $38''$ за столетие выше, чем следует из теории Ньютона с учетом взаимодействия с другими планетами. В 1895 году американский астроном Саймон Ньюком уточнил этот результат ($43''$ за столетие) и нашел аномальное смещение перигелия также у Марса.

В XIX и начале XX веков предпринимались попытки объяснить это явление:

- 1 Наличием планеты («Вулкан»), нескольких объектов или газовых облаков внутри орбиты Меркурия. К концу XIX века такие объекты были исключены.
- 2 Модификациями закона тяготения в рамках галилеевски-инвариантной механики.

Вековое смещение перигелия Меркурия было открыто в 1859 году французским астрономом Урбеном Леверье. Он обработал результаты сорокалетних наблюдений Парижской обсерватории и пришел к выводу, что смещение перигелия на $38''$ за столетие выше, чем следует из теории Ньютона с учетом взаимодействия с другими планетами. В 1895 году американский астроном Саймон Ньюком уточнил этот результат ($43''$ за столетие) и нашел аномальное смещение перигелия также у Марса.

В XIX и начале XX веков предпринимались попытки объяснить это явление:

- 1 Наличием планеты («Вулкан»), нескольких объектов или газовых облаков внутри орбиты Меркурия. К концу XIX века такие объекты были исключены.
- 2 Модификациями закона тяготения в рамках галилеевски-инвариантной механики. Однако такие теории приводили к результатам, противоречащими наблюдениям других планет и Луны.

Вековое смещение перигелия Меркурия было открыто в 1859 году французским астрономом Урбеном Леверье. Он обработал результаты сорокалетних наблюдений Парижской обсерватории и пришел к выводу, что смещение перигелия на $38''$ за столетие выше, чем следует из теории Ньютона с учетом взаимодействия с другими планетами. В 1895 году американский астроном Саймон Ньюком уточнил этот результат ($43''$ за столетие) и нашел аномальное смещение перигелия также у Марса.

В XIX и начале XX веков предпринимались попытки объяснить это явление:

- 1 Наличием планеты («Вулкан»), нескольких объектов или газовых облаков внутри орбиты Меркурия. К концу XIX века такие объекты были исключены.
- 2 Модификациями закона тяготения в рамках галилеевски-инвариантной механики. Однако такие теории приводили к результатам, противоречащими наблюдениям других планет и Луны.

Смещение перигелия Меркурия было найдено Эйнштейном в рамках ОТО в конце 1915 г. Этот результат можно считать первым экспериментальным подтверждением общей теории относительности.

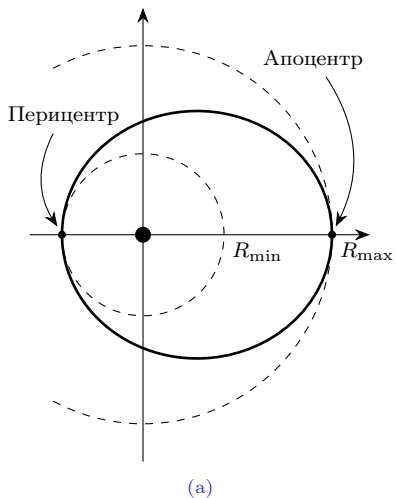


Рис.: Орбитальное движение частицы в гравитационном поле: (а) ньютоновское поле;

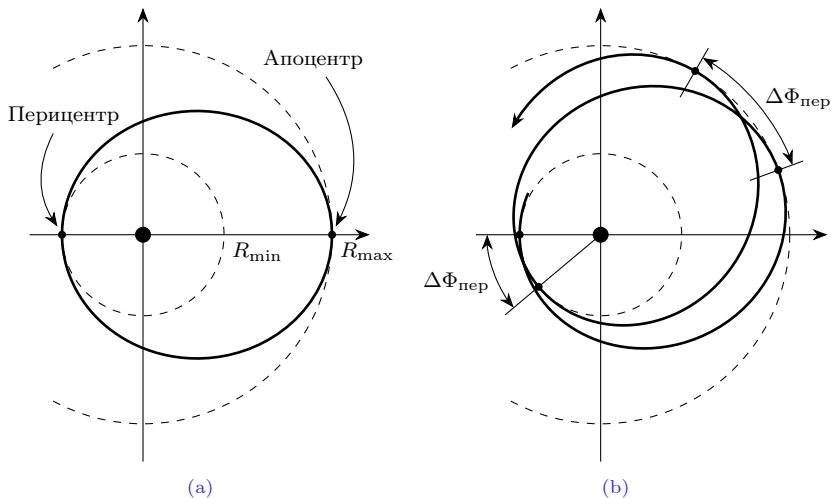


Рис.: Орбитальное движение частицы в гравитационном поле: (а) ньютоновское поле;

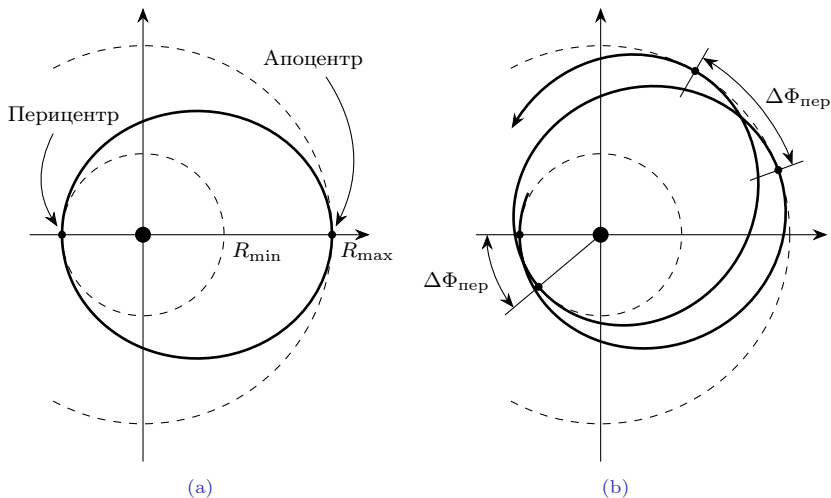


Рис.: Орбитальное движение частицы в гравитационном поле: (а) ньютоновское поле; (б) в общей теории относительности.

В ньютоновском пределе оценим «нерелятивистскую энергию»

$E' = E - m < 0$, момент J и потенциальную энергию $-GmM/r = -mr_g/2r$
для орбитального движения:

В ньютоновском пределе оценим «нерелятивистскую энергию»

$E' = E - m < 0$, момент J и потенциальную энергию $-GmM/r = -mr_g/2r$ для орбитального движения:

$$\frac{|E'|}{m} \sim \frac{J^2}{m^2 r^2} \sim v^2 \sim \frac{r_g}{r}.$$

В ньютоновском пределе оценим «нерелятивистскую энергию»

$E' = E - m < 0$, момент J и потенциальную энергию $-GmM/r = -mr_g/2r$ для орбитального движения:

$$\frac{|E'|}{m} \sim \frac{J^2}{m^2 r^2} \sim v^2 \sim \frac{r_g}{r}.$$

Теперь разложим $F(E, J, r)$ до второго порядка по $|E'|/m$:

$$F(E, J, r) = 2m \underbrace{\left(E' + \frac{mr_g}{2r} - \frac{J^2}{2mr^2} \right)}_{\substack{\text{ньютоновский предел} \\ F^{(0)}(E, J, r)}} \quad (1)$$

В ньютоновском пределе оценим «нерелятивистскую энергию»

$E' = E - m < 0$, момент J и потенциальную энергию $-GmM/r = -mr_g/2r$ для орбитального движения:

$$\frac{|E'|}{m} \sim \frac{J^2}{m^2 r^2} \sim v^2 \sim \frac{r_g}{r}.$$

Теперь разложим $F(E, J, r)$ до второго порядка по $|E'|/m$:

$$F(E, J, r) = \underbrace{2m \left(E' + \frac{mr_g}{2r} - \frac{J^2}{2mr^2} \right)}_{\substack{\text{ньютоновский предел} \\ F^{(0)}(E, J, r)}} + \underbrace{\left(E'^2 + \frac{J^2 r_g}{r^3} \right)}_{\text{первая поправка}} + m^2 O\left(\frac{E'^3}{m^3}\right). \quad (1)$$

В ньютоновском пределе оценим «нерелятивистскую энергию»

$E' = E - m < 0$, момент J и потенциальную энергию $-GmM/r = -mr_g/2r$ для орбитального движения:

$$\frac{|E'|}{m} \sim \frac{J^2}{m^2 r^2} \sim v^2 \sim \frac{r_g}{r}.$$

Теперь разложим $F(E, J, r)$ до второго порядка по $|E'|/m$:

$$F(E, J, r) = \underbrace{2m \left(E' + \frac{mr_g}{2r} - \frac{J^2}{2mr^2} \right)}_{\substack{\text{ньютоновский предел} \\ F^{(0)}(E, J, r)}} + \underbrace{\left(E'^2 + \frac{J^2 r_g}{r^3} \right)}_{\text{первая поправка}} + m^2 O\left(\frac{E'^3}{m^3}\right). \quad (1)$$

Самое тонкое и важное место — это вычисление поправок к пределам интегрирования.

В ньютоновском пределе оценим «нерелятивистскую энергию»

$E' = E - m < 0$, момент J и потенциальную энергию $-GmM/r = -mr_g/2r$ для орбитального движения:

$$\frac{|E'|}{m} \sim \frac{J^2}{m^2 r^2} \sim v^2 \sim \frac{r_g}{r}.$$

Теперь разложим $F(E, J, r)$ до второго порядка по $|E'|/m$:

$$F(E, J, r) = \underbrace{2m \left(E' + \frac{mr_g}{2r} - \frac{J^2}{2mr^2} \right)}_{\substack{\text{ньютоновский предел} \\ F^{(0)}(E, J, r)}} + \underbrace{\left(E'^2 + \frac{J^2 r_g}{r^3} \right)}_{\text{первая поправка}} + m^2 O\left(\frac{E'^3}{m^3}\right). \quad (1)$$

Самое тонкое и важное место — это вычисление поправок к пределам интегрирования. Уравнение третьего порядка решать трудно, поэтому надо избавиться от члена с r^{-3} .

В ньютоновском пределе оценим «нерелятивистскую энергию»

$E' = E - m < 0$, момент J и потенциальную энергию $-GmM/r = -mr_g/2r$ для орбитального движения:

$$\frac{|E'|}{m} \sim \frac{J^2}{m^2 r^2} \sim v^2 \sim \frac{r_g}{r}.$$

Теперь разложим $F(E, J, r)$ до второго порядка по $|E'|/m$:

$$F(E, J, r) = \underbrace{2m \left(E' + \frac{mr_g}{2r} - \frac{J^2}{2mr^2} \right)}_{\substack{\text{ньютоновский предел} \\ F^{(0)}(E, J, r)}} + \underbrace{\left(E'^2 + \frac{J^2 r_g}{r^3} \right)}_{\text{первая поправка}} + m^2 O\left(\frac{E'^3}{m^3}\right). \quad (1)$$

Самое тонкое и важное место — это вычисление поправок к пределам интегрирования. Уравнение третьего порядка решать трудно, поэтому надо избавиться от члена с r^{-3} . Сделаем замену переменных:

$$\tilde{r} = r + \frac{r_g}{2}, \quad (2)$$

В ньютоновском пределе оценим «нерелятивистскую энергию»

$E' = E - m < 0$, момент J и потенциальную энергию $-GmM/r = -mr_g/2r$ для орбитального движения:

$$\frac{|E'|}{m} \sim \frac{J^2}{m^2 r^2} \sim v^2 \sim \frac{r_g}{r}.$$

Теперь разложим $F(E, J, r)$ до второго порядка по $|E'|/m$:

$$F(E, J, r) = \underbrace{2m \left(E' + \frac{mr_g}{2r} - \frac{J^2}{2mr^2} \right)}_{\substack{\text{ньютоновский предел} \\ F^{(0)}(E, J, r)}} + \underbrace{\left(E'^2 + \frac{J^2 r_g}{r^3} \right)}_{\text{первая поправка}} + m^2 O\left(\frac{E'^3}{m^3}\right). \quad (1)$$

Самое тонкое и важное место — это вычисление поправок к пределам интегрирования. Уравнение третьего порядка решать трудно, поэтому надо избавиться от члена с r^{-3} . Сделаем замену переменных:

$$\tilde{r} = r + \frac{r_g}{2}, \quad \tilde{E}' = E' \left(1 + \frac{E'}{2m} \right), \quad \tilde{J}^2 = J^2 - \frac{m^2 r_g^2}{2}. \quad (2)$$

Тогда член с r^{-3} сокращается и

$$F(E, J, r) = F^{(0)}(m + \tilde{E}', \tilde{J}, \tilde{r}) + m^2 O(|E'|^3/m^3). \quad (3)$$

Казалось бы, задача свелась к ньютоновской.

Казалось бы, задача свелась к ньютоновской. Но это **не так**.

Казалось бы, задача свелась к ньютоновской. Но это **не так**. Дело в том, что уравнения движения получаются дифференцированием действия по E и J , а не по \tilde{E} и \tilde{J} .

Казалось бы, задача свелась к ньютоновской. Но это **не так**. Дело в том, что уравнения движения получаются дифференцированием действия по E и J , а не по \tilde{E} и \tilde{J} . Дифференцирование по E нас сейчас не интересует, потому что приведет к поправке к периоду, которую можно «списать» на массу тела.

Казалось бы, задача свелась к ньютоновской. Но это **не так**. Дело в том, что уравнения движения получаются дифференцированием действия по E и J , а не по \tilde{E} и \tilde{J} . Дифференцирование по E нас сейчас не интересует, потому что приведет к поправке к периоду, которую можно «списать» на массу тела. Рассмотрим поправку к набегу угла на период

$$\Phi_{\text{пер}} = 2J \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{F^{(0)}(m + \tilde{E}', \tilde{J}, \tilde{r})}}.$$

Казалось бы, задача свелась к ньютоновской. Но это **не так**. Дело в том, что уравнения движения получаются дифференцированием действия по E и J , а не по \tilde{E} и \tilde{J} . Дифференцирование по E нас сейчас не интересует, потому что приведет к поправке к периоду, которую можно «списать» на массу тела. Рассмотрим поправку к набегу угла на период

$$\Phi_{\text{пер}} = 2J \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{F^{(0)}(m + \tilde{E}', \tilde{J}, \tilde{r})}}.$$

С другой стороны из теории Ньютона мы знаем, что

$$2\pi = 2\tilde{J} \int_{\tilde{R}_{\min}}^{\tilde{R}_{\max}} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2 \sqrt{F^{(0)}(m + \tilde{E}', \tilde{J}, \tilde{r})}}.$$

Казалось бы, задача свелась к ньютоновской. Но это **не так**. Дело в том, что уравнения движения получаются дифференцированием действия по E и J , а не по \tilde{E} и \tilde{J} . Дифференцирование по E нас сейчас не интересует, потому что приведет к поправке к периоду, которую можно «списать» на массу тела. Рассмотрим поправку к набегу угла на период

$$\Phi_{\text{пер}} = 2J \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{F^{(0)}(m + \tilde{E}', \tilde{J}, \tilde{r})}}.$$

С другой стороны из теории Ньютона мы знаем, что

$$2\pi = 2\tilde{J} \int_{\tilde{R}_{\min}}^{\tilde{R}_{\max}} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2 \sqrt{F^{(0)}(m + \tilde{E}', \tilde{J}, \tilde{r})}}.$$

Вычитая одно из другого, получаем

$$\Delta\Phi_{\text{пер}} = 2 \int_{\tilde{R}_{\min}}^{\tilde{R}_{\max}} \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{F^{(0)}(m + \tilde{E}', \tilde{J}, \tilde{r})}} \left(\frac{J}{r^2} - \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2} \right).$$

Казалось бы, задача свелась к ньютоновской. Но это **не так**. Дело в том, что уравнения движения получаются дифференцированием действия по E и J , а не по \tilde{E} и \tilde{J} . Дифференцирование по E нас сейчас не интересует, потому что приведет к поправке к периоду, которую можно «списать» на массу тела. Рассмотрим поправку к набегу угла на период

$$\Phi_{\text{пер}} = 2J \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{F^{(0)}(m + \tilde{E}', \tilde{J}, \tilde{r})}}.$$

С другой стороны из теории Ньютона мы знаем, что

$$2\pi = 2\tilde{J} \int_{\tilde{R}_{\min}}^{\tilde{R}_{\max}} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2 \sqrt{F^{(0)}(m + \tilde{E}', \tilde{J}, \tilde{r})}}.$$

Вычитая одно из другого, получаем

$$\Delta\Phi_{\text{пер}} = 2 \int_{\tilde{R}_{\min}}^{\tilde{R}_{\max}} \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{F^{(0)}(m + \tilde{E}', \tilde{J}, \tilde{r})}} \left(\frac{J}{r^2} - \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2} \right).$$

Вычисляем скобку

$$\frac{J}{r^2} - \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2} = \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2(1 - r_g/2\tilde{r})^2} \left(1 + \frac{m^2 r_g^2}{4\tilde{J}^2} \right) - \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2} \simeq \frac{\tilde{J} r_g}{\tilde{r}^3} + \frac{m^2 r_g^2}{4\tilde{J}\tilde{r}^2}.$$

Теперь тильды мы можем убрать в силу того, что выражение уже имеет порядок малости $|E'|/m$:

$$\Delta\Phi_{\text{пер}} = 2Jr_g \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{-2m|E'| + \frac{m^2 r_g}{r} - \frac{J^2}{r^2}}} \left(\frac{1}{r} + \frac{m^2 r_g}{4J^2} \right) \quad (4)$$

Теперь тильды мы можем убрать в силу того, что выражение уже имеет порядок малости $|E'|/m$:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_{\text{пер}} &= 2Jr_g \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{-2m|E'| + \frac{m^2 r_g}{r} - \frac{J^2}{r^2}}} \left(\frac{1}{r} + \frac{m^2 r_g}{4J^2} \right) \\ &= 2Jr_g \int_{R_{\max}^{-1}}^{R_{\min}^{-1}} \frac{d\xi}{\sqrt{-2m|E'| + m^2 r_g \xi - J^2 \xi^2}} \left(\xi + \frac{m^2 r_g}{4J^2} \right).\end{aligned}\quad (4)$$

Теперь тильды мы можем убрать в силу того, что выражение уже имеет порядок малости $|E'|/m$:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{\text{пер}} &= 2Jr_g \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{-2m|E'| + \frac{m^2 r_g}{r} - \frac{J^2}{r^2}}} \left(\frac{1}{r} + \frac{m^2 r_g}{4J^2} \right) \\ &= 2Jr_g \int_{R_{\max}^{-1}}^{R_{\min}^{-1}} \frac{d\xi}{\sqrt{-2m|E'| + m^2 r_g \xi - J^2 \xi^2}} \left(\xi + \frac{m^2 r_g}{4J^2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Заменой $\xi \rightarrow \xi + \frac{m^2 r_g}{2J^2}$ получаем

$$\Delta\Phi_{\text{пер}} = 2r_g \int_{-A}^A \frac{d\xi}{\sqrt{A^2 - \xi^2}} \left(\xi + \frac{3m^2 r_g}{4J^2} \right), \quad A = \frac{\sqrt{m^4 r_g^2 - 8m|E'|}}{2|J|}.$$

Теперь тильды мы можем убрать в силу того, что выражение уже имеет порядок малости $|E'|/m$:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{\text{пер}} &= 2Jr_g \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{-2m|E'| + \frac{m^2 r_g}{r} - \frac{J^2}{r^2}}} \left(\frac{1}{r} + \frac{m^2 r_g}{4J^2} \right) \\ &= 2Jr_g \int_{R_{\max}^{-1}}^{R_{\min}^{-1}} \frac{d\xi}{\sqrt{-2m|E'| + m^2 r_g \xi - J^2 \xi^2}} \left(\xi + \frac{m^2 r_g}{4J^2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Заменой $\xi \rightarrow \xi + \frac{m^2 r_g}{2J^2}$ получаем

$$\Delta\Phi_{\text{пер}} = 2r_g \int_{-A}^A \frac{d\xi}{\sqrt{A^2 - \xi^2}} \left(\xi + \frac{3m^2 r_g}{4J^2} \right), \quad A = \frac{\sqrt{m^4 r_g^2 - 8m|E'|}}{2|J|}.$$

Первый член в скобках дает нулевой вклад, а для второго имеем

$$\int_{-A}^A \frac{d\xi}{\sqrt{A^2 - \xi^2}} = \pi.$$

Теперь тильды мы можем убрать в силу того, что выражение уже имеет порядок малости $|E'|/m$:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_{\text{пер}} &= 2Jr_g \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{-2m|E'| + \frac{m^2 r_g}{r} - \frac{J^2}{r^2}}} \left(\frac{1}{r} + \frac{m^2 r_g}{4J^2} \right) \\ &= 2Jr_g \int_{R_{\max}^{-1}}^{R_{\min}^{-1}} \frac{d\xi}{\sqrt{-2m|E'| + m^2 r_g \xi - J^2 \xi^2}} \left(\xi + \frac{m^2 r_g}{4J^2} \right).\end{aligned}\quad (4)$$

Заменой $\xi \rightarrow \xi + \frac{m^2 r_g}{2J^2}$ получаем

$$\Delta\Phi_{\text{пер}} = 2r_g \int_{-A}^A \frac{d\xi}{\sqrt{A^2 - \xi^2}} \left(\xi + \frac{3m^2 r_g}{4J^2} \right), \quad A = \frac{\sqrt{m^4 r_g^2 - 8m|E'|}}{2|J|}.$$

Первый член в скобках дает нулевой вклад, а для второго имеем

$$\int_{-A}^A \frac{d\xi}{\sqrt{A^2 - \xi^2}} = \pi.$$

Мы получаем формулу Эйнштейна для смещения перицентра:

$$\Delta\Phi_{\text{пер}} = \frac{3\pi m^2 r_g^2}{2J^2} = \frac{6\pi G^2 M^2 m^2}{J^2}.\quad (5)$$

Отклонение луча света гравитационным полем: история

Отклонение луча света гравитационным полем ([гравитационное линзирование](#)) было предсказано Эйнштейном в 1916 году и открыто двумя британскими экспедициями под руководством Артура Эддингтона в 1919 году. Это было первым проверенным [предсказанием](#) ОТО.

Движение безмассовой частицы

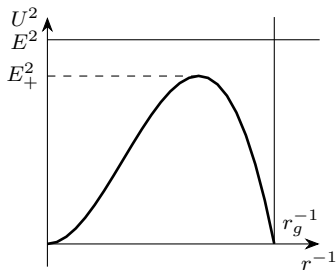
Луч света в геометрической оптике ведет себя идентично частице нулевой массы: $F(E, J, r) = E^2 - \frac{J^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$.

Движение безмассовой частицы

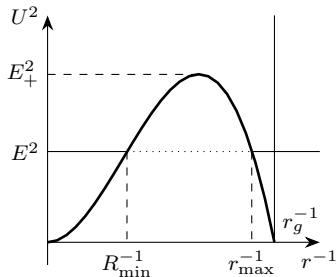
Луч света в геометрической оптике ведет себя идентично частице нулевой массы: $F(E, J, r) = E^2 - \frac{J^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$. При этом, очевидно, $J > 2mr_g = 0$.

Движение безмассовой частицы

Луч света в геометрической оптике ведет себя идентично частице нулевой массы: $F(E, J, r) = E^2 - \frac{J^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$. При этом, очевидно, $J > 2mr_g = 0$.



(a)

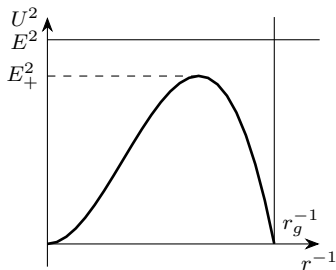


(b)

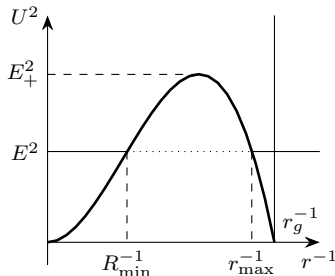
Рис.: Случай нулевой массы: (a) $E > E_+$; (b) $E < E_+$.

Движение безмассовой частицы

Луч света в геометрической оптике ведет себя идентично частице нулевой массы: $F(E, J, r) = E^2 - \frac{J^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$. При этом, очевидно, $J > 2mr_g = 0$.



(a)



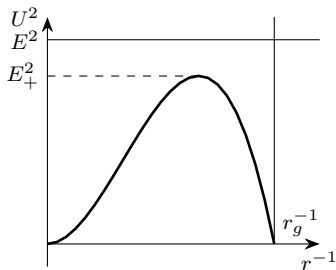
(b)

Рис.: Случай нулевой массы: (a) $E > E_+$; (b) $E < E_+$.

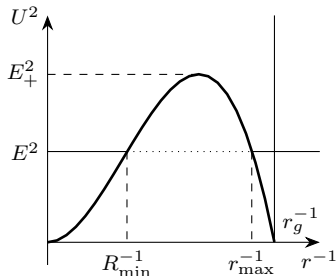
Имеем $E_- = 0$, $\xi_- = 0$, $E_+ = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{J}{r_g}$, $\xi_+ = \frac{2}{3r_g}$.

Движение безмассовой частицы

Луч света в геометрической оптике ведет себя идентично частице нулевой массы: $F(E, J, r) = E^2 - \frac{J^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$. При этом, очевидно, $J > 2mr_g = 0$.



(a)



(b)

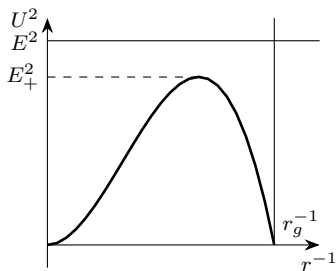
Рис.: Случай нулевой массы: (a) $E > E_+$; (b) $E < E_+$.

Имеем $E_- = 0$, $\xi_- = 0$, $E_+ = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{J}{r_g}$, $\xi_+ = \frac{2}{3r_g}$. Удобно использовать прицельный параметр ρ :

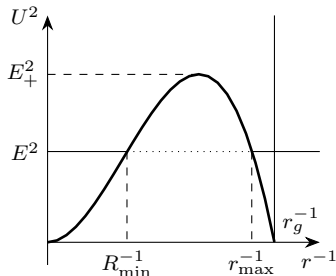
$$J = |\mathbf{p}|\rho = E\rho. \quad (6)$$

Движение безмассовой частицы

Луч света в геометрической оптике ведет себя идентично частице нулевой массы: $F(E, J, r) = E^2 - \frac{J^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$. При этом, очевидно, $J > 2mr_g = 0$.



(a)



(b)

Рис.: Случай нулевой массы: (a) $E > E_+$; (b) $E < E_+$.

Имеем $E_- = 0$, $\xi_- = 0$, $E_+ = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{J}{r_g}$, $\xi_+ = \frac{2}{3r_g}$. Удобно использовать **прицельный параметр** ρ :

$$J = |\mathbf{p}|\rho = E\rho. \quad (6)$$

Это единственный параметр, характеризующий мировую линию частицы.

Тогда получаем

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{f(\rho, r)}}, \quad f(\rho, r) = \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right). \quad (7)$$

Тогда получаем

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{f(\rho, r)}}, \quad f(\rho, r) = \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right). \quad (7)$$

Полный угол, заметаемый лучом равен

$$\Phi = 2 \int_{R_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{f(\rho, r)}}, \quad (8)$$

Тогда получаем

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{f(\rho, r)}}, \quad f(\rho, r) = \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right). \quad (7)$$

Полный угол, загибаемый лучом равен

$$\Phi = 2 \int_{R_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{f(\rho, r)}}, \quad (8)$$

где R_{\min} — решение уравнения

$$f(\rho, R_{\min}) = 0. \quad (9)$$

Тогда получаем

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{f(\rho, r)}}, \quad f(\rho, r) = \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right). \quad (7)$$

Полный угол, заметаемый лучом равен

$$\Phi = 2 \int_{R_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{f(\rho, r)}}, \quad (8)$$

где R_{\min} — решение уравнения

$$f(\rho, R_{\min}) = 0. \quad (9)$$

В случае плоского пространства ($r_g = 0$) этот угол равен

$$\Phi_0 = 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\rho^{-2} - r^{-2}}} = \pi.$$

Нас будет интересовать отклонение луча от прямой $\theta = \Phi - \pi$.

Энергии $E = E_+$ отвечает прицельный параметр и положение максимума

$$\rho_+ = \frac{3\sqrt{3}}{2}r_g, \quad r_+ = \frac{3}{2}r_g. \quad (10)$$

Энергии $E = E_+$ отвечает прицельный параметр и положение максимума

$$\rho_+ = \frac{3\sqrt{3}}{2}r_g, \quad r_+ = \frac{3}{2}r_g. \quad (10)$$

Соответственно имеется три случая для частицы, налетающей из бесконечности:

Энергии $E = E_+$ отвечает прицельный параметр и положение максимума

$$\rho_+ = \frac{3\sqrt{3}}{2}r_g, \quad r_+ = \frac{3}{2}r_g. \quad (10)$$

Соответственно имеется три случая для частицы, налетающей из бесконечности:

- 1 $\rho < \rho_+$: поглощение частицы черной дырой.

Энергии $E = E_+$ отвечает прицельный параметр и положение максимума

$$\rho_+ = \frac{3\sqrt{3}}{2}r_g, \quad r_+ = \frac{3}{2}r_g. \quad (10)$$

Соответственно имеется три случая для частицы, налетающей из бесконечности:

- 1 $\rho < \rho_+$: поглощение частицы черной дырой. Сечение поглощения равно

$$\sigma_{\text{погл}} = \pi\rho_+^2 = \frac{27\pi}{4}r_g^2. \quad (11)$$

Энергии $E = E_+$ отвечает прицельный параметр и положение максимума

$$\rho_+ = \frac{3\sqrt{3}}{2}r_g, \quad r_+ = \frac{3}{2}r_g. \quad (10)$$

Соответственно имеется три случая для частицы, налетающей из бесконечности:

- 1 $\rho < \rho_+$: поглощение частицы черной дырой. Сечение поглощения равно

$$\sigma_{\text{погл}} = \pi\rho_+^2 = \frac{27\pi}{4}r_g^2. \quad (11)$$

- 2 $\rho = \rho_+$: асимптотическое приближение к **фотонной сфере** $r = r_+$.

Энергии $E = E_+$ отвечает прицельный параметр и положение максимума

$$\rho_+ = \frac{3\sqrt{3}}{2}r_g, \quad r_+ = \frac{3}{2}r_g. \quad (10)$$

Соответственно имеется три случая для частицы, налетающей из бесконечности:

- 1 $\rho < \rho_+$: поглощение частицы черной дырой. Сечение поглощения равно

$$\sigma_{\text{погл}} = \pi\rho_+^2 = \frac{27\pi}{4}r_g^2. \quad (11)$$

- 2 $\rho = \rho_+$: асимптотическое приближение к **фотонной сфере** $r = r_+$.
- 3 $\rho > \rho_+$: инфинитное движение — **гравитационное линзирование**.

Энергии $E = E_+$ отвечает прицельный параметр и положение максимума

$$\rho_+ = \frac{3\sqrt{3}}{2}r_g, \quad r_+ = \frac{3}{2}r_g. \quad (10)$$

Соответственно имеется три случая для частицы, налетающей из бесконечности:

- 1 $\rho < \rho_+$: поглощение частицы черной дырой. Сечение поглощения равно

$$\sigma_{\text{погл}} = \pi\rho_+^2 = \frac{27\pi}{4}r_g^2. \quad (11)$$

- 2 $\rho = \rho_+$: асимптотическое приближение к **фотонной сфере** $r = r_+$.
- 3 $\rho > \rho_+$: инфинитное движение — **гравитационное линзирование**.

Мы будем рассматривать последний вариант в двух предельных случаях:

Энергии $E = E_+$ отвечает прицельный параметр и положение максимума

$$\rho_+ = \frac{3\sqrt{3}}{2}r_g, \quad r_+ = \frac{3}{2}r_g. \quad (10)$$

Соответственно имеется три случая для частицы, налетающей из бесконечности:

- ① $\rho < \rho_+$: поглощение частицы черной дырой. Сечение поглощения равно

$$\sigma_{\text{погл}} = \pi\rho_+^2 = \frac{27\pi}{4}r_g^2. \quad (11)$$

- ② $\rho = \rho_+$: асимптотическое приближение к **фотонной сфере** $r = r_+$.

- ③ $\rho > \rho_+$: инфинитное движение — **гравитационное линзирование**.

Мы будем рассматривать последний вариант в двух предельных случаях:

- ① $\rho - \rho_+ \ll \rho_+$: частица «наматывается» на фотонную сферу, а затем снова уходит на бесконечность. Интересно оценить число таких намоток. Эта задача осмысленна только для черной дыры.

Энергии $E = E_+$ отвечает прицельный параметр и положение максимума

$$\rho_+ = \frac{3\sqrt{3}}{2}r_g, \quad r_+ = \frac{3}{2}r_g. \quad (10)$$

Соответственно имеется три случая для частицы, налетающей из бесконечности:

- ① $\rho < \rho_+$: поглощение частицы черной дырой. Сечение поглощения равно

$$\sigma_{\text{погл}} = \pi\rho_+^2 = \frac{27\pi}{4}r_g^2. \quad (11)$$

- ② $\rho = \rho_+$: асимптотическое приближение к **фотонной сфере** $r = r_+$.

- ③ $\rho > \rho_+$: инфинитное движение — **гравитационное линзирование**.

Мы будем рассматривать последний вариант в двух предельных случаях:

- ① $\rho - \rho_+ \ll \rho_+$: частица «наматывается» на фотонную сферу, а затем снова уходит на бесконечность. Интересно оценить число таких намоток. Эта задача осмысленна только для черной дыры.

- ② $\rho \gg \rho_+$: частица слабо отклоняется от первоначального направления движения. Эта задача решается в пределе слабого поля и имеет смысл для любого (сферически-симметричного) компактного тела.

Рассмотрим случай $\rho - \rho_+ \ll \rho_+$.

Рассмотрим случай $\rho - \rho_+ \ll \rho_+$. Запишем функцию f в виде

$$f(\rho, \xi^{-1}) = \rho^{-2} - \rho_+^{-2} + (\xi_+ - \xi)^2 - r_g(\xi_+ - \xi)^3.$$

$$\xi_+ = r_+^{-1} = \frac{2}{3r_g}$$

Рассмотрим случай $\rho - \rho_+ \ll \rho_+$. Запишем функцию f в виде

$$f(\rho, \xi^{-1}) = \rho^{-2} - \rho_+^{-2} + (\xi_+ - \xi)^2 - r_g(\xi_+ - \xi)^3.$$

$$\xi_+ = r_+^{-1} = \frac{2}{3r_g}$$

При вычислении R_{\min} последним слагаемым можно пренебречь. Получаем

$$\xi_* = R_{\min}^{-1} \simeq \xi_+ - \rho_+^{-1} \delta, \quad \delta = \sqrt{1 - \frac{\rho_+^2}{\rho^2}}. \quad (12)$$

Рассмотрим случай $\rho - \rho_+ \ll \rho_+$. Запишем функцию f в виде

$$\xi_+ = r_+^{-1} = \frac{2}{3r_g}$$

$$f(\rho, \xi^{-1}) = \rho^{-2} - \rho_+^{-2} + (\xi_+ - \xi)^2 - r_g(\xi_+ - \xi)^3.$$

При вычислении R_{\min} последним слагаемым можно пренебречь. Получаем

$$\xi_* = R_{\min}^{-1} \simeq \xi_+ - \rho_+^{-1}\delta, \quad \delta = \sqrt{1 - \frac{\rho_+^2}{\rho^2}}. \quad (12)$$

Теперь положим $\eta = \xi_* - \xi$ и разложим $f(\rho, \xi^{-1})$ по η и δ :

$$\xi_+ - \xi = \rho_+^{-1}\delta + \eta$$

$$f(\rho, \xi^{-1}) = 2\rho_+^{-1}\delta\eta + \eta^2 - r_g\eta^3 - 3r_g\rho_+^{-1}\delta\eta^2 - 3r_g\rho_+^{-2}\delta^2\eta + O(\delta^3).$$

Рассмотрим случай $\rho - \rho_+ \ll \rho_+$. Запишем функцию f в виде

$$\xi_+ = r_+^{-1} = \frac{2}{3r_g}$$

$$f(\rho, \xi^{-1}) = \rho^{-2} - \rho_+^{-2} + (\xi_+ - \xi)^2 - r_g(\xi_+ - \xi)^3.$$

При вычислении R_{\min} последним слагаемым можно пренебречь. Получаем

$$\xi_* = R_{\min}^{-1} \simeq \xi_+ - \rho_+^{-1}\delta, \quad \delta = \sqrt{1 - \frac{\rho_+^2}{\rho^2}}. \quad (12)$$

Теперь положим $\eta = \xi_* - \xi$ и разложим $f(\rho, \xi^{-1})$ по η и δ :

$$\xi_+ - \xi = \rho_+^{-1}\delta + \eta$$

$$f(\rho, \xi^{-1}) = 2\rho_+^{-1}\delta\eta + \eta^2 - r_g\eta^3 - 3r_g\rho_+^{-1}\delta\eta^2 - 3r_g\rho_+^{-2}\delta^2\eta + O(\delta^3).$$

При $\delta = 0$ интеграл (8) логарифмически расходится вблизи $\eta = 0$.

Рассмотрим случай $\rho - \rho_+ \ll \rho_+$. Запишем функцию f в виде

$$f(\rho, \xi^{-1}) = \rho^{-2} - \rho_+^{-2} + (\xi_+ - \xi)^2 - r_g(\xi_+ - \xi)^3.$$

$$\xi_+ = r_+^{-1} = \frac{2}{3r_g}$$

При вычислении R_{\min} последним слагаемым можно пренебречь. Получаем

$$\xi_* = R_{\min}^{-1} \simeq \xi_+ - \rho_+^{-1}\delta, \quad \delta = \sqrt{1 - \frac{\rho_+^2}{\rho^2}}. \quad (12)$$

Теперь положим $\eta = \xi_* - \xi$ и разложим $f(\rho, \xi^{-1})$ по η и δ :

$$\xi_+ - \xi = \rho_+^{-1}\delta + \eta$$

$$f(\rho, \xi^{-1}) = 2\rho_+^{-1}\delta\eta + \eta^2 - r_g\eta^3 - 3r_g\rho_+^{-1}\delta\eta^2 - 3r_g\rho_+^{-2}\delta^2\eta + O(\delta^3).$$

При $\delta = 0$ интеграл (8) логарифмически расходится вблизи $\eta = 0$.

Первое и последнее слагаемые регуляризуют интеграл.

Рассмотрим случай $\rho - \rho_+ \ll \rho_+$. Запишем функцию f в виде

$$f(\rho, \xi^{-1}) = \rho^{-2} - \rho_+^{-2} + (\xi_+ - \xi)^2 - r_g(\xi_+ - \xi)^3.$$

$$\xi_+ = r_+^{-1} = \frac{2}{3r_g}$$

При вычислении R_{\min} последним слагаемым можно пренебречь. Получаем

$$\xi_* = R_{\min}^{-1} \simeq \xi_+ - \rho_+^{-1}\delta, \quad \delta = \sqrt{1 - \frac{\rho_+^2}{\rho^2}}. \quad (12)$$

Теперь положим $\eta = \xi_* - \xi$ и разложим $f(\rho, \xi^{-1})$ по η и δ :

$$\xi_+ - \xi = \rho_+^{-1}\delta + \eta$$

$$f(\rho, \xi^{-1}) = 2\rho_+^{-1}\delta\eta + \eta^2 - r_g\eta^3 - 3r_g\rho_+^{-1}\delta\eta^2 - \cancel{3r_g\rho_+^{-2}\delta^2\eta} + O(\delta^3).$$

При $\delta = 0$ интеграл (8) логарифмически расходится вблизи $\eta = 0$.

Первое и последнее слагаемые регуляризуют интеграл. Но последнее мало по сравнению с первым.

Рассмотрим случай $\rho - \rho_+ \ll \rho_+$. Запишем функцию f в виде

$$f(\rho, \xi^{-1}) = \rho^{-2} - \rho_+^{-2} + (\xi_+ - \xi)^2 - r_g(\xi_+ - \xi)^3.$$

$$\xi_+ = r_+^{-1} = \frac{2}{3r_g}$$

При вычислении R_{\min} последним слагаемым можно пренебречь. Получаем

$$\xi_* = R_{\min}^{-1} \simeq \xi_+ - \rho_+^{-1}\delta, \quad \delta = \sqrt{1 - \frac{\rho_+^2}{\rho^2}}. \quad (12)$$

Теперь положим $\eta = \xi_* - \xi$ и разложим $f(\rho, \xi^{-1})$ по η и δ :

$$\xi_+ - \xi = \rho_+^{-1}\delta + \eta$$

$$f(\rho, \xi^{-1}) = 2\rho_+^{-1}\delta\eta + \eta^2 - r_g\eta^3 - \cancel{3r_g\rho_+^{-1}\delta\eta^2} - \cancel{3r_g\rho_+^{-2}\delta^2\eta} + O(\delta^3).$$

При $\delta = 0$ интеграл (8) логарифмически расходится вблизи $\eta = 0$.

Первое и последнее слагаемые регуляризуют интеграл. Но последнее мало по сравнению с первым. Предпоследнее слагаемое мало по сравнению со вторым.

Рассмотрим случай $\rho - \rho_+ \ll \rho_+$. Запишем функцию f в виде

$$f(\rho, \xi^{-1}) = \rho^{-2} - \rho_+^{-2} + (\xi_+ - \xi)^2 - r_g(\xi_+ - \xi)^3.$$

$$\xi_+ = r_+^{-1} = \frac{2}{3r_g}$$

При вычислении R_{\min} последним слагаемым можно пренебречь. Получаем

$$\xi_* = R_{\min}^{-1} \simeq \xi_+ - \rho_+^{-1}\delta, \quad \delta = \sqrt{1 - \frac{\rho_+^2}{\rho^2}}. \quad (12)$$

Теперь положим $\eta = \xi_* - \xi$ и разложим $f(\rho, \xi^{-1})$ по η и δ :

$$\xi_+ - \xi = \rho_+^{-1}\delta + \eta$$

$$f(\rho, \xi^{-1}) = 2\rho_+^{-1}\delta\eta + \eta^2 - r_g\eta^3 - \cancel{3r_g\rho_+^{-1}\delta\eta^2} - \cancel{3r_g\rho_+^{-2}\delta^2\eta} + O(\delta^3).$$

При $\delta = 0$ интеграл (8) логарифмически расходится вблизи $\eta = 0$.

Первое и последнее слагаемые регуляризуют интеграл. Но последнее мало по сравнению с первым. Предпоследнее слагаемое мало по сравнению со вторым. Итак

$$f(\rho, \xi^{-1}) \simeq 2\rho_+^{-1}\delta\eta + \eta^2 - r_g\eta^3. \quad (13)$$

Рассмотрим случай $\rho - \rho_+ \ll \rho_+$. Запишем функцию f в виде

$$f(\rho, \xi^{-1}) = \rho^{-2} - \rho_+^{-2} + (\xi_+ - \xi)^2 - r_g(\xi_+ - \xi)^3.$$

$$\xi_+ = r_+^{-1} = \frac{2}{3r_g}$$

При вычислении R_{\min} последним слагаемым можно пренебречь. Получаем

$$\xi_* = R_{\min}^{-1} \simeq \xi_+ - \rho_+^{-1} \delta, \quad \delta = \sqrt{1 - \frac{\rho_+^2}{\rho^2}}. \quad (12)$$

Теперь положим $\eta = \xi_* - \xi$ и разложим $f(\rho, \xi^{-1})$ по η и δ :

$$\xi_+ - \xi = \rho_+^{-1} \delta + \eta$$

$$f(\rho, \xi^{-1}) = 2\rho_+^{-1} \delta \eta + \eta^2 - r_g \eta^3 - \cancel{3r_g \rho_+^{-1} \delta \eta^2} - \cancel{3r_g \rho_+^{-2} \delta^2 \eta} + O(\delta^3).$$

При $\delta = 0$ интеграл (8) логарифмически расходится вблизи $\eta = 0$.

Первое и последнее слагаемые регуляризуют интеграл. Но последнее мало по сравнению с первым. Предпоследнее слагаемое мало по сравнению со вторым. Итак

$$f(\rho, \xi^{-1}) \simeq 2\rho_+^{-1} \delta \eta + \eta^2 - r_g \eta^3. \quad (13)$$

Полагая $r_g^{-1} \delta \ll \varepsilon \ll r_g^{-1}$, разобьем интеграл на две части

$$\Phi \simeq 2 \int_0^{\xi_+} \frac{d\eta}{\sqrt{2\rho_+^{-1} \delta \eta + \eta^2 - r_g \eta^3}}$$

Движение вблизи критического прицельного параметра

Рассмотрим случай $\rho - \rho_+ \ll \rho_+$. Запишем функцию f в виде

$$\xi_+ = r_+^{-1} = \frac{2}{3r_g}$$

$$f(\rho, \xi^{-1}) = \rho^{-2} - \rho_+^{-2} + (\xi_+ - \xi)^2 - r_g(\xi_+ - \xi)^3.$$

При вычислении R_{\min} последним слагаемым можно пренебречь. Получаем

$$\xi_* = R_{\min}^{-1} \simeq \xi_+ - \rho_+^{-1} \delta, \quad \delta = \sqrt{1 - \frac{\rho_+^2}{\rho^2}}. \quad (12)$$

Теперь положим $\eta = \xi_* - \xi$ и разложим $f(\rho, \xi^{-1})$ по η и δ :

$$\xi_+ - \xi = \rho_+^{-1} \delta + \eta$$

$$f(\rho, \xi^{-1}) = 2\rho_+^{-1} \delta \eta + \eta^2 - r_g \eta^3 - \cancel{3r_g \rho_+^{-1} \delta \eta^2} - \cancel{3r_g \rho_+^{-2} \delta^2 \eta^2} + O(\delta^3).$$

При $\delta = 0$ интеграл (8) логарифмически расходится вблизи $\eta = 0$.

Первое и последнее слагаемые регуляризуют интеграл. Но последнее мало по сравнению с первым. Предпоследнее слагаемое мало по сравнению со вторым. Итак

$$f(\rho, \xi^{-1}) \simeq 2\rho_+^{-1} \delta \eta + \eta^2 - r_g \eta^3. \quad (13)$$

Полагая $r_g^{-1} \delta \ll \varepsilon \ll r_g^{-1}$, разобьем интеграл на две части

$$\Phi \simeq 2 \int_0^{\xi_+} \frac{d\eta}{\sqrt{2\rho_+^{-1} \delta \eta + \eta^2 - r_g \eta^3}}$$

$$\begin{aligned} r_g \eta^3 &\ll \eta^2 \text{ при } \eta \lesssim \varepsilon \\ r_g \eta^3 &\ll \rho_+^{-1} \delta \eta \text{ при } \eta \lesssim r_g^{-1} \delta \\ \rho_+^{-1} \delta \eta &\ll \eta^2 \text{ при } \eta \gtrsim \varepsilon \end{aligned}$$

$$\simeq 2 \int_0^\varepsilon \frac{d\eta}{\sqrt{2\rho_+^{-1} \delta \eta + \eta^2 - r_g \eta^3}} + 2 \int_\varepsilon^{\xi_+} \frac{d\eta}{\sqrt{\cancel{2\rho_+^{-1} \delta \eta} + \eta^2 - r_g \eta^3}}.$$

Движение вблизи критического прицельного параметра

Оба эти интеграла берутся явно. Члены, пропорциональные $\log \varepsilon$, сокращаются.

Оба эти интеграла берутся явно. Члены, пропорциональные $\log \varepsilon$, сокращаются. Получаем

$$\Phi \simeq \log \frac{C\rho_+}{\rho - \rho_+}, \quad C = 216 \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \simeq 15.5. \quad (14)$$

Оба эти интеграла берутся явно. Члены, пропорциональные $\log \varepsilon$, сокращаются. Получаем

$$\Phi \simeq \log \frac{C\rho_+}{\rho - \rho_+}, \quad C = 216 \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \simeq 15.5. \quad (14)$$

Число намоток $\Phi/2\pi$ растет логарифмически с уменьшением $\rho - \rho_+$.

Оба эти интеграла берутся явно. Члены, пропорциональные $\log \varepsilon$, сокращаются. Получаем

$$\Phi \simeq \log \frac{C\rho_+}{\rho - \rho_+}, \quad C = 216 \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \simeq 15.5. \quad (14)$$

Число намоток $\Phi/2\pi$ растет логарифмически с уменьшением $\rho - \rho_+$. Большое значение C означает, что приближение верно только когда число намоток достаточно велико. Первые поправки порядка δ , поэтому приближение верно при $(\rho - \rho_+)^{1/2} \ll \rho_+^{1/2}$.

Оба эти интеграла берутся явно. Члены, пропорциональные $\log \varepsilon$, сокращаются. Получаем

$$\Phi \simeq \log \frac{C\rho_+}{\rho - \rho_+}, \quad C = 216 \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \simeq 15.5. \quad (14)$$

Число намоток $\Phi/2\pi$ растет логарифмически с уменьшением $\rho - \rho_+$. Большое значение C означает, что приближение верно только когда число намоток достаточно велико. Первые поправки порядка δ , поэтому приближение верно при $(\rho - \rho_+)^{1/2} \ll \rho_+^{1/2}$.

Можно показать, что эта область прицельных параметров дает вклад в сечение рассеяния $\sim \text{ch}(\pi - \theta) d\theta$ в интервал $[\theta, \theta + d\theta]$, то есть свет рассеивается во все стороны, хотя и преобладает рассеяние вперед.

Оба эти интеграла берутся явно. Члены, пропорциональные $\log \varepsilon$, сокращаются. Получаем

$$\Phi \simeq \log \frac{C\rho_+}{\rho - \rho_+}, \quad C = 216 \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \simeq 15.5. \quad (14)$$

Число намоток $\Phi/2\pi$ растет логарифмически с уменьшением $\rho - \rho_+$. Большое значение C означает, что приближение верно только когда число намоток достаточно велико. Первые поправки порядка δ , поэтому приближение верно при $(\rho - \rho_+)^{1/2} \ll \rho_+^{1/2}$.

Можно показать, что эта область прицельных параметров дает вклад в сечение рассеяния $\sim \text{ch}(\pi - \theta) d\theta$ в интервал $[\theta, \theta + d\theta]$, то есть свет рассеивается во все стороны, хотя и преобладает рассеяние вперед. Фотонная сфера должна быть видна как светящееся кольцо с внутренним радиусом ρ_+ . К сожалению современные астрономические приборы не позволяют пока разрешить фотонную сферу даже у ближайших сверхмассивных черных дыр. Центр нашей галактики закрыт от нас пылевым облаком, а центры ближайших галактик находятся слишком далеко.

Рассеяние на малые углы

Теперь рассмотрим другой предельный случай $\rho \gg r_g$, отвечающий малым углам рассеяния.

Рассеяние на малые углы

Теперь рассмотрим другой предельный случай $\rho \gg r_g$, отвечающий малым углам рассеяния. Здесь мы можем не делать различий между черной дырой и компактным сферически-симметричным телом.

Рассеяние на малые углы

Теперь рассмотрим другой предельный случай $\rho \gg r_g$, отвечающий малым углам рассеяния. Здесь мы можем не делать различий между черной дырой и компактным сферически-симметричным телом.

Замена переменных $r = \tilde{r} - r_g/2$ дает

$$f(\rho, r) = f^{(0)}(\rho, \tilde{r}) + O(r_g^2/r^2), \quad f^{(0)}(\rho, r) = f(\rho, r)|_{r_g=0}.$$

Теперь рассмотрим другой предельный случай $\rho \gg r_g$, отвечающий малым углам рассеяния. Здесь мы можем не делать различий между черной дырой и компактным сферически-симметричным телом.

Замена переменных $r = \tilde{r} - r_g/2$ дает

$$f(\rho, r) = f^{(0)}(\rho, \tilde{r}) + O(r_g^2/r^2), \quad f^{(0)}(\rho, r) = f(\rho, r)|_{r_g=0}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \theta = \Phi - \pi &= 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\tilde{r}}{r^2 \sqrt{\rho^{-2} - \tilde{r}^{-2}}} - 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{r}{r^2 \sqrt{\rho^{-2} - r^{-2}}} \\ &= 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\tilde{r} (r^{-2} - \tilde{r}^{-2})}{\sqrt{\rho^{-2} - \tilde{r}^{-2}}} = 2r_g \int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^3 \sqrt{\rho^{-2} - r^{-2}}} = \frac{2r_g}{\rho} \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь рассмотрим другой предельный случай $\rho \gg r_g$, отвечающий малым углам рассеяния. Здесь мы можем не делать различий между черной дырой и компактным сферически-симметричным телом.

Замена переменных $r = \tilde{r} - r_g/2$ дает

$$f(\rho, r) = f^{(0)}(\rho, \tilde{r}) + O(r_g^2/r^2), \quad f^{(0)}(\rho, r) = f(\rho, r)|_{r_g=0}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \theta = \Phi - \pi &= 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\tilde{r}}{r^2 \sqrt{\rho^{-2} - \tilde{r}^{-2}}} - 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{r}{r^2 \sqrt{\rho^{-2} - r^{-2}}} \\ &= 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\tilde{r} (r^{-2} - \tilde{r}^{-2})}{\sqrt{\rho^{-2} - \tilde{r}^{-2}}} = 2r_g \int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^3 \sqrt{\rho^{-2} - r^{-2}}} = \frac{2r_g}{\rho} \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Вычислив интеграл, получаем формулу Эйнштейна для отклонения луча света

$$\theta = \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4GM}{\rho}. \quad (16)$$

Теперь рассмотрим другой предельный случай $\rho \gg r_g$, отвечающий малым углам рассеяния. Здесь мы можем не делать различий между черной дырой и компактным сферически-симметричным телом.

Замена переменных $r = \tilde{r} - r_g/2$ дает

$$f(\rho, r) = f^{(0)}(\rho, \tilde{r}) + O(r_g^2/r^2), \quad f^{(0)}(\rho, r) = f(\rho, r)|_{r_g=0}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \theta = \Phi - \pi &= 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\tilde{r}}{r^2 \sqrt{\rho^{-2} - \tilde{r}^{-2}}} - 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{r}{r^2 \sqrt{\rho^{-2} - r^{-2}}} \\ &= 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\tilde{r} (r^{-2} - \tilde{r}^{-2})}{\sqrt{\rho^{-2} - \tilde{r}^{-2}}} = 2r_g \int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^3 \sqrt{\rho^{-2} - r^{-2}}} = \frac{2r_g}{\rho} \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Вычислив интеграл, получаем формулу Эйнштейна для отклонения луча света

$$\theta = \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4GM}{\rho}. \quad (16)$$

Мы можем продифференцировать это равенство:

$$d\theta = \frac{2r_g}{\rho^2} d\rho = \frac{r_g}{\rho^3} d(\rho^2) = \frac{r_g}{\pi\rho^3} d\sigma.$$

Теперь рассмотрим другой предельный случай $\rho \gg r_g$, отвечающий малым углам рассеяния. Здесь мы можем не делать различий между черной дырой и компактным сферически-симметричным телом.

Замена переменных $r = \tilde{r} - r_g/2$ дает

$$f(\rho, r) = f^{(0)}(\rho, \tilde{r}) + O(r_g^2/r^2), \quad f^{(0)}(\rho, r) = f(\rho, r)|_{r_g=0}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \theta &= \Phi - \pi = 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\tilde{r}}{r^2 \sqrt{\rho^{-2} - \tilde{r}^{-2}}} - 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{r}{r^2 \sqrt{\rho^{-2} - r^{-2}}} \\ &= 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\tilde{r} (r^{-2} - \tilde{r}^{-2})}{\sqrt{\rho^{-2} - \tilde{r}^{-2}}} = 2r_g \int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^3 \sqrt{\rho^{-2} - r^{-2}}} = \frac{2r_g}{\rho} \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Вычислив интеграл, получаем формулу Эйнштейна для отклонения луча света

$$\theta = \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4GM}{\rho}. \quad (16)$$

Мы можем продифференцировать это равенство:

$$d\theta = \frac{2r_g}{\rho^2} d\rho = \frac{r_g}{\rho^3} d(\rho^2) = \frac{r_g}{\pi\rho^3} d\sigma.$$

Тогда мы получаем дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{8\pi r_g^2}{\theta^3} d\theta = \frac{4r_g^2}{\theta^4} d\theta, \quad \theta \ll 1. \quad (17)$$

где $d\theta = \sin \theta d\theta d\phi$ — элемент телесного угла.

Почему мы при изучении распространения света рассматривали свет как безмассовые частицы?

Почему мы при изучении распространения света рассматривали свет как безмассовые частицы?

Возьмем уравнение Гамильтона—Якоби для безмассовых частиц:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0 \quad (18)$$

Почему мы при изучении распространения света рассматривали свет как безмассовые частицы?

Возьмем уравнение Гамильтона—Якоби для безмассовых частиц:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0 \quad (18)$$

Оно формально совпадает с уравнением на фазу волны $\psi(x)$ в геометрической оптике, называемом **уравнением эйконала**:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} = 0. \quad (19)$$

Почему мы при изучении распространения света рассматривали свет как безмассовые частицы?

Возьмем уравнение Гамильтона—Якоби для безмассовых частиц:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0 \quad (18)$$

Оно формально совпадает с уравнением на фазу волны $\psi(x)$ в геометрической оптике, называемом **уравнением эйконала**:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} = 0. \quad (19)$$

При этом частота и волновой вектор выражаются через эйконал:

$$\omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \quad \Leftrightarrow \quad k_\mu = -\frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}. \quad (20)$$

Почему мы при изучении распространения света рассматривали свет как безмассовые частицы?

Возьмем уравнение Гамильтона—Якоби для безмассовых частиц:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0 \quad (18)$$

Оно формально совпадает с уравнением на фазу волны $\psi(x)$ в геометрической оптике, называемом **уравнением эйконала**:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} = 0. \quad (19)$$

При этом частота и волновой вектор выражаются через эйконал:

$$\omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \quad \Leftrightarrow \quad k_\mu = -\frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}. \quad (20)$$

На самом деле между этими уравнениями имеется глубокая связь. Уравнение Гамильтона—Якоби получается классическим пределом квантового волнового уравнения, а уравнение эйконала получается пределом коротких длин волн из волновых уравнений Максвелла. Оба волновых уравнения на самом деле совпадают. При этом надо помнить, что уравнение эйконала является неполным. Оно описывают только фазу волны, но не поляризацию. Точно так же уравнение Гамильтона—Якоби не описывает полностью (даже приближенно) эволюцию квантовой системы.

Пусть $F(x)$ — гладкая функция на четырехмерном многообразии M .

Пусть $F(x)$ — гладкая функция на четырехмерном многообразии M . Тогда уравнение вида

$$F(x) = c \tag{21}$$

задает множество \mathcal{H}_c .

Пусть $F(x)$ — гладкая функция на четырехмерном многообразии M . Тогда уравнение вида

$$F(x) = c \tag{21}$$

задает множество \mathcal{H}_c . Если форма $dF = F_{,\mu} dx^\mu \neq 0$ на \mathcal{H}_c , то \mathcal{H}_c есть гиперповерхность, то есть трехмерное подмногообразие.

Пусть $F(x)$ — гладкая функция на четырехмерном многообразии M . Тогда уравнение вида

$$F(x) = c \tag{21}$$

задает множество \mathcal{H}_c . Если форма $dF = F_{,\mu} dx^\mu \neq 0$ на \mathcal{H}_c , то \mathcal{H}_c есть гиперповерхность, то есть трехмерное подмногообразие. Тогда

$$a \in (T\mathcal{H}_c)_x \subset TM_x \iff \langle dF(x), a \rangle = F_{,\mu}(x)a^\mu = 0. \tag{22}$$

Пусть $F(x)$ — гладкая функция на четырехмерном многообразии M . Тогда уравнение вида

$$F(x) = c \quad (21)$$

задает множество \mathcal{H}_c . Если форма $dF = F_{,\mu} dx^\mu \neq 0$ на \mathcal{H}_c , то \mathcal{H}_c есть гиперповерхность, то есть трехмерное подмногообразие. Тогда

$$a \in (T\mathcal{H}_c)_x \subset TM_x \quad \Leftrightarrow \quad \langle dF(x), a \rangle = F_{,\mu}(x)a^\mu = 0. \quad (22)$$

Три случая

Пусть $F(x)$ — гладкая функция на четырехмерном многообразии M . Тогда уравнение вида

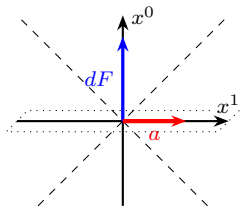
$$F(x) = c \quad (21)$$

задает множество \mathcal{H}_c . Если форма $dF = F_{,\mu} dx^\mu \neq 0$ на \mathcal{H}_c , то \mathcal{H}_c есть гиперповерхность, то есть трехмерное подмногообразие. Тогда

$$a \in (T\mathcal{H}_c)_x \subset TM_x \Leftrightarrow \langle dF(x), a \rangle = F_{,\mu}(x)a^\mu = 0. \quad (22)$$

Три случая

- 1 $g^*(dF, dF) \equiv g^{\mu\nu} F_{,\mu} F_{,\nu} > 0 \Rightarrow \forall a \in (T\mathcal{H}_c)_x \setminus \{0\} : g(a, a) < 0$.
Гиперповерхность пространственноподобна в точке x .



Действительно, выберем систему координат, в которой $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ и $dF = F_{,0} dx^0$. Тогда $0 = F_{,\mu} a^\mu = F_{,0} a^0 \Rightarrow a^0 = 0 \Rightarrow g(a, a) = \eta_{ij} a^i a^j < 0$.

Пусть $F(x)$ — гладкая функция на четырехмерном многообразии M . Тогда уравнение вида

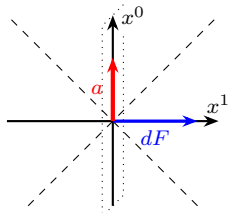
$$F(x) = c \quad (21)$$

задает множество \mathcal{H}_c . Если форма $dF = F_{,\mu} dx^\mu \neq 0$ на \mathcal{H}_c , то \mathcal{H}_c есть гиперповерхность, то есть трехмерное подмногообразие. Тогда

$$a \in (T\mathcal{H}_c)_x \subset TM_x \Leftrightarrow \langle dF(x), a \rangle = F_{,\mu}(x)a^\mu = 0. \quad (22)$$

Три случая

- 1 $g^*(dF, dF) \equiv g^{\mu\nu} F_{,\mu} F_{,\nu} > 0 \Rightarrow \forall a \in (T\mathcal{H}_c)_x \setminus \{0\} : g(a, a) < 0$.
Гиперповерхность пространственноподобна в точке x .
- 2 $g^*(dF, dF) < 0 \Rightarrow \exists a \in (T\mathcal{H}_c)_x, g(a, a) > 0$. Гиперповерхность имеет времениподобное направление, т.е. она времениподобна в точке x .



Действительно, выберем систему координат, в которой $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ и $dF = F_{,1} dx^1$. Тогда $0 = F_{,\mu} a^\mu = F_{,1} a^1 \Rightarrow a^1 = 0 \Rightarrow$ Если $a = \partial_0$, $g(a, a) = \eta_{00} > 0$.

Пусть $F(x)$ — гладкая функция на четырехмерном многообразии M . Тогда уравнение вида

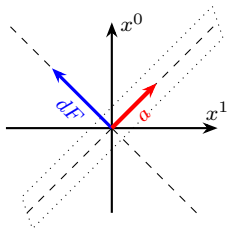
$$F(x) = c \quad (21)$$

задает множество \mathcal{H}_c . Если форма $dF = F_{,\mu} dx^\mu \neq 0$ на \mathcal{H}_c , то \mathcal{H}_c есть гиперповерхность, то есть трехмерное подмногообразие. Тогда

$$a \in (T\mathcal{H}_c)_x \subset TM_x \Leftrightarrow \langle dF(x), a \rangle = F_{,\mu}(x)a^\mu = 0. \quad (22)$$

Три случая

- 1 $g^*(dF, dF) \equiv g^{\mu\nu} F_{,\mu} F_{,\nu} > 0 \Rightarrow \forall a \in (T\mathcal{H}_c)_x \setminus \{0\} : g(a, a) < 0$.
Гиперповерхность пространственноподобна в точке x .
- 2 $g^*(dF, dF) < 0 \Rightarrow \exists a \in (T\mathcal{H}_c)_x, g(a, a) > 0$. Гиперповерхность имеет времениподобное направление, т.е. она времениподобна в точке x .
- 3 $g^*(dF, dF) = 0 \Rightarrow \forall a \in (T\mathcal{H}_c)_x : g(a, a) \leq 0$ и $\exists a \in (T\mathcal{H}_c)_x \setminus \{0\}, g(a, a) = 0$. Такая гиперповерхность называется **изотропной** в точке x .



Действительно, выберем систему координат, в которой $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ и $dF = F_{,0}(dx^0 - dx^1)$. Тогда $0 = F_{,\mu} a^\mu = F_{,0}(a^0 - a^1) \Rightarrow a^0 = a^1 \Rightarrow a = a^0(\partial_0 + \partial_1) + a^b \partial_b$ ($b \neq 0, 1$). Тогда $g(a, a) = -\sum (a^b)^2 \leq 0$. Если $a^0 \neq 0, a^b = 0$, имеем $g(a, a) = 0$.

Пусть $F(x)$ — гладкая функция на четырехмерном многообразии M . Тогда уравнение вида

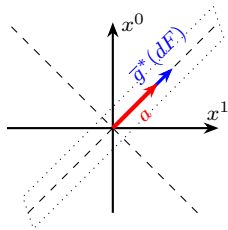
$$F(x) = c \quad (21)$$

задает множество \mathcal{H}_c . Если форма $dF = F_{,\mu} dx^\mu \neq 0$ на \mathcal{H}_c , то \mathcal{H}_c есть гиперповерхность, то есть трехмерное подмногообразие. Тогда

$$a \in (T\mathcal{H}_c)_x \subset TM_x \Leftrightarrow \langle dF(x), a \rangle = F_{,\mu}(x)a^\mu = 0. \quad (22)$$

Три случая

- 1 $g^*(dF, dF) \equiv g^{\mu\nu} F_{,\mu} F_{,\nu} > 0 \Rightarrow \forall a \in (T\mathcal{H}_c)_x \setminus \{0\} : g(a, a) < 0$.
Гиперповерхность пространственноподобна в точке x .
- 2 $g^*(dF, dF) < 0 \Rightarrow \exists a \in (T\mathcal{H}_c)_x, g(a, a) > 0$. Гиперповерхность имеет времениподобное направление, т.е. она времениподобна в точке x .
- 3 $g^*(dF, dF) = 0 \Rightarrow \forall a \in (T\mathcal{H}_c)_x : g(a, a) \leq 0$ и $\exists a \in (T\mathcal{H}_c)_x \setminus \{0\}, g(a, a) = 0$. Такая гиперповерхность называется **изотропной** в точке x .



Внимание! Вектор $l = \bar{g}^*(dF)$ лежит в том же касательном пространстве $(T\mathcal{H}_c)_x$.

Итак, изотропная гиперповерхность определяется уравнениями $F(x) = c$ и

$$g^{\mu\nu} F_{,\mu} F_{,\nu} = 0, \quad (23)$$

Итак, изотропная гиперповерхность определяется уравнениями $F(x) = c$ и

$$g^{\mu\nu} F_{,\mu} F_{,\nu} = 0, \quad (23)$$

Задача 1. Направляющий вектор изотропной поверхности

$$l(x) = l^\mu(x) \partial_\mu = g^{\mu\nu}(x) F_{,\nu}(x) \partial_\mu \quad (24)$$

изотропен:

$$g_{\mu\nu} l^\mu(x) l^\nu(x) = 0, \quad (25)$$

и ортогонален форме:

$$\langle dF(x), l(x) \rangle = 0, \quad (26)$$

и, таким образом, лежит на поверхности: $l(x) \in (T\mathcal{H}_c)_x$.

Итак, изотропная гиперповерхность определяется уравнениями $F(x) = c$ и

$$g^{\mu\nu} F_{,\mu} F_{,\nu} = 0, \quad (23)$$

Задача 1. Направляющий вектор изотропной поверхности

$$l(x) = l^\mu(x) \partial_\mu = g^{\mu\nu}(x) F_{,\nu}(x) \partial_\mu \quad (24)$$

изотропен:

$$g_{\mu\nu} l^\mu(x) l^\nu(x) = 0, \quad (25)$$

и ортогонален форме:

$$\langle dF(x), l(x) \rangle = 0, \quad (26)$$

и, таким образом, лежит на поверхности: $l(x) \in (T\mathcal{H}_c)_x$.

$$g_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = g_{\mu\nu} g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} F_{,\kappa} F_{,\lambda} = g^{\kappa\lambda} F_{,\kappa} F_{,\lambda} = 0, \quad F_{,\mu} l^\mu = F_{,\mu} g^{\mu\nu} F_{,\nu} = 0.$$

Итак, изотропная гиперповерхность определяется уравнениями $F(x) = c$ и

$$g^{\mu\nu} F_{,\mu} F_{,\nu} = 0, \quad (23)$$

Задача 1. Направляющий вектор изотропной поверхности

$$l(x) = l^\mu(x) \partial_\mu = g^{\mu\nu}(x) F_{,\nu}(x) \partial_\mu \quad (24)$$

изотропен:

$$g_{\mu\nu} l^\mu(x) l^\nu(x) = 0, \quad (25)$$

и ортогонален форме:

$$\langle dF(x), l(x) \rangle = 0, \quad (26)$$

и, таким образом, лежит на поверхности: $l(x) \in (T\mathcal{H}_c)_x$.

$$g_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = g_{\mu\nu} g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} F_{,\kappa} F_{,\lambda} = g^{\kappa\lambda} F_{,\kappa} F_{,\lambda} = 0, \quad F_{,\mu} l^\mu = F_{,\mu} g^{\mu\nu} F_{,\nu} = 0.$$

Уравнение (23) представляет собой уравнение Гамильтона—Якоби для безмассовой частицы. Вектор l есть скорость этой частицы, а уравнение $F(x) = c$ соответствует тому, что собственное время между двумя точками мировой линии безмассовой частицы равно нулю.

Итак, изотропная гиперповерхность определяется уравнениями $F(x) = c$ и

$$g^{\mu\nu} F_{,\mu} F_{,\nu} = 0, \quad (23)$$

Задача 1. Направляющий вектор изотропной поверхности

$$l(x) = l^\mu(x) \partial_\mu = g^{\mu\nu}(x) F_{,\nu}(x) \partial_\mu \quad (24)$$

изотропен:

$$g_{\mu\nu} l^\mu(x) l^\nu(x) = 0, \quad (25)$$

и ортогонален форме:

$$\langle dF(x), l(x) \rangle = 0, \quad (26)$$

и, таким образом, лежит на поверхности: $l(x) \in (T\mathcal{H}_c)_x$.

$$g_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = g_{\mu\nu} g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} F_{,\kappa} F_{,\lambda} = g^{\kappa\lambda} F_{,\kappa} F_{,\lambda} = 0, \quad F_{,\mu} l^\mu = F_{,\mu} g^{\mu\nu} F_{,\nu} = 0.$$

Уравнение (23) представляет собой уравнение Гамильтона—Якоби для безмассовой частицы. Вектор l есть скорость этой частицы, а уравнение $F(x) = c$ соответствует тому, что собственное время между двумя точками мировой линии безмассовой частицы равно нулю.

Рассмотрим интегральные кривые, которые задает векторное поле l :

$$\dot{\varphi}(\tau) = l(\varphi(\tau)) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\varphi^\mu(\tau)}{d\tau} = l^\mu(\varphi(\tau)). \quad (27)$$

Итак, изотропная гиперповерхность определяется уравнениями $F(x) = c$ и

$$g^{\mu\nu} F_{,\mu} F_{,\nu} = 0, \quad (23)$$

Задача 1. Направляющий вектор изотропной поверхности

$$l(x) = l^\mu(x) \partial_\mu = g^{\mu\nu}(x) F_{,\nu}(x) \partial_\mu \quad (24)$$

изотропен:

$$g_{\mu\nu} l^\mu(x) l^\nu(x) = 0, \quad (25)$$

и ортогонален форме:

$$\langle dF(x), l(x) \rangle = 0, \quad (26)$$

и, таким образом, лежит на поверхности: $l(x) \in (T\mathcal{H}_c)_x$.

$$g_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = g_{\mu\nu} g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} F_{,\kappa} F_{,\lambda} = g^{\kappa\lambda} F_{,\kappa} F_{,\lambda} = 0, \quad F_{,\mu} l^\mu = F_{,\mu} g^{\mu\nu} F_{,\nu} = 0.$$

Уравнение (23) представляет собой уравнение Гамильтона—Якоби для безмассовой частицы. Вектор l есть скорость этой частицы, а уравнение $F(x) = c$ соответствует тому, что собственное время между двумя точками мировой линии безмассовой частицы равно нулю.

Рассмотрим интегральные кривые, которые задает векторное поле l :

$$\dot{\varphi}(\tau) = l(\varphi(\tau)) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\varphi^\mu(\tau)}{d\tau} = l^\mu(\varphi(\tau)). \quad (27)$$

Задача 2. Покажите, что эти интегральные кривые целиком лежат на поверхности $F(x) = c$.

Итак, изотропная гиперповерхность определяется уравнениями $F(x) = c$ и

$$g^{\mu\nu} F_{,\mu} F_{,\nu} = 0, \quad (23)$$

Задача 2. Направляющий вектор изотропной поверхности

$$l(x) = l^\mu(x) \partial_\mu = g^{\mu\nu}(x) F_{,\nu}(x) \partial_\mu \quad (24)$$

изотропен:

$$g_{\mu\nu} l^\mu(x) l^\nu(x) = 0, \quad (25)$$

и ортогонален форме:

$$\langle dF(x), l(x) \rangle = 0, \quad (26)$$

и, таким образом, лежит на поверхности: $l(x) \in (T\mathcal{H}_c)_x$.

$$g_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = g_{\mu\nu} g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} F_{,\kappa} F_{,\lambda} = g^{\kappa\lambda} F_{,\kappa} F_{,\lambda} = 0, \quad F_{,\mu} l^\mu = F_{,\mu} g^{\mu\nu} F_{,\nu} = 0.$$

Уравнение (23) представляет собой уравнение Гамильтона—Якоби для безмассовой частицы. Вектор l есть скорость этой частицы, а уравнение $F(x) = c$ соответствует тому, что собственное время между двумя точками мировой линии безмассовой частицы равно нулю.

Рассмотрим интегральные кривые, которые задает векторное поле l :

$$\dot{\varphi}(\tau) = l(\varphi(\tau)) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\varphi^\mu(\tau)}{d\tau} = l^\mu(\varphi(\tau)). \quad (27)$$

Задача 2. Покажите, что эти интегральные кривые целиком лежат на поверхности $F(x) = c$.

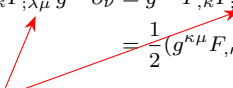
$$\frac{d}{d\tau} F(\varphi(\tau)) = F_{,\mu}(\varphi(\tau)) \dot{\varphi}^\mu(\tau) = \langle dF(\varphi(\tau)), \dot{\varphi}(\tau) \rangle = \langle dF(\varphi(\tau)), l(\varphi(\tau)) \rangle = 0.$$

Задача 3. Покажите, что эти интегральные кривые являются геодезическими.

Задача 3. Покажите, что эти интегральные кривые являются геодезическими.

$$\begin{aligned} \nabla_l l &= l^\mu l^\nu{}_{;\mu} \partial_\nu = g^{\kappa\mu} F_{,\kappa} F_{;\lambda\mu} g^{\lambda\nu} \partial_\nu = g^{\kappa\mu} F_{,\kappa} F_{;\mu\lambda} g^{\lambda\nu} \partial_\nu \\ &= \frac{1}{2} (g^{\kappa\mu} F_{,\kappa} F_{,\mu})_{,\lambda} g^{\lambda\nu} \partial_\nu = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Задача 3. Покажите, что эти интегральные кривые являются геодезическими.

$$\begin{aligned} \nabla_l l &= l^\mu l^\nu{}_{;\mu} \partial_\nu = g^{\kappa\mu} F_{,\kappa} F_{;\lambda\mu} g^{\lambda\nu} \partial_\nu = g^{\kappa\mu} F_{,\kappa} F_{;\mu\lambda} g^{\lambda\nu} \partial_\nu \\ &= \frac{1}{2} (g^{\kappa\mu} F_{,\kappa} F_{,\mu})_{,\lambda} g^{\lambda\nu} \partial_\nu = 0. \end{aligned} \quad (29)$$


Здесь использована коммутативность второй ковариантной производной от скалярного поля для связности без кручения,

Задача 3. Покажите, что эти интегральные кривые являются геодезическими.

$$\begin{aligned}\nabla_l l &= l^\mu l^\nu{}_{;\mu} \partial_\nu = g^{\kappa\mu} F_{,\kappa} F_{;\lambda\mu} g^{\lambda\nu} \partial_\nu = g^{\kappa\mu} F_{,\kappa} F_{;\mu\lambda} g^{\lambda\nu} \partial_\nu \\ &= \frac{1}{2} (g^{\kappa\mu} F_{,\kappa} F_{,\mu})_{,\lambda} g^{\lambda\nu} \partial_\nu = 0.\end{aligned}\quad (29)$$

Здесь использована коммутативность второй ковариантной производной от скалярного поля для связности без кручения, а также правило Лейбница для ковариантной производной и согласованность ковариантной производной с метрикой.

Задача 3. Покажите, что эти интегральные кривые являются геодезическими.

$$\begin{aligned}\nabla_l l &= l^\mu l^\nu{}_{;\mu} \partial_\nu = g^{\kappa\mu} F_{,\kappa} F_{;\lambda\mu} g^{\lambda\nu} \partial_\nu = g^{\kappa\mu} F_{,\kappa} F_{;\mu\lambda} g^{\lambda\nu} \partial_\nu \\ &= \frac{1}{2} (g^{\kappa\mu} F_{,\kappa} F_{,\mu})_{,\lambda} g^{\lambda\nu} \partial_\nu = 0.\end{aligned}\quad (29)$$

Здесь использована коммутативность второй ковариантной производной от скалярного поля для связности без кручения, а также правило Лейбница для ковариантной производной и согласованность ковариантной производной с метрикой.

В окрестности любой точки $x_0 \in \mathcal{H}_{c_0}$, функцию F можно продолжить таким образом, чтобы все гиперповерхности \mathcal{H}_c при разных значениях c были изотропны.

Задача 3. Покажите, что эти интегральные кривые являются геодезическими.

$$\begin{aligned}\nabla_l l &= l^\mu l^\nu{}_{;\mu} \partial_\nu = g^{\kappa\mu} F_{,\kappa} F_{;\lambda\mu} g^{\lambda\nu} \partial_\nu = g^{\kappa\mu} F_{,\kappa} F_{;\mu\lambda} g^{\lambda\nu} \partial_\nu \\ &= \frac{1}{2} (g^{\kappa\mu} F_{,\kappa} F_{,\mu})_{,\lambda} g^{\lambda\nu} \partial_\nu = 0.\end{aligned}\quad (29)$$

Здесь использована коммутативность второй ковариантной производной от скалярного поля для связности без кручения, а также правило Лейбница для ковариантной производной и согласованность ковариантной производной с метрикой.

В окрестности любой точки $x_0 \in \mathcal{H}_{c_0}$, функцию F можно продолжить таким образом, чтобы все гиперповерхности \mathcal{H}_c при разных значениях c были изотропны. Тогда мы имеем трехпараметрическую конгруэнцию изотропных геодезических $\varphi(\tau, y, c)$, где τ — аффинный параметр на кривой, а $y = (y_1, y_2)$ параметризует семейство геодезических на поверхности \mathcal{H}_c .

Поместим на пути луча маленький экран S , проходящий через точку x , перпендикулярный лучам света в своей системе покоя и движущийся со скоростью U .

Поместим на пути луча маленький экран S , проходящий через точку x , перпендикулярный лучам света в своей системе покоя и движущийся со скоростью U .

Задача 4. Покажите, что точки экрана с координатами $x^\mu + \delta x^\mu$ удовлетворяют условиям

$$U_\mu \delta x^\mu = 0 \quad (30)$$

и

$$l_\mu \delta x^\mu = 0. \quad (31)$$

Поместим на пути луча маленький экран S , проходящий через точку x , перпендикулярный лучам света в своей системе покоя и движущийся со скоростью U .

Задача 4. Покажите, что точки экрана с координатами $x^\mu + \delta x^\mu$ удовлетворяют условиям

$$U_\mu \delta x^\mu = 0 \quad (30)$$

и

$$l_\mu \delta x^\mu = 0. \quad (31)$$

В самом деле, перейдем в систему координат, где $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ и $U = \partial_0$, то есть экран неподвижен. Тогда вектор δx , описывающий точки экрана в момент времени x^0 , удовлетворяет условиям

$$\delta x^0 = 0, \quad l^i \delta x^i = 0.$$

Поместим на пути луча маленький экран S , проходящий через точку x , перпендикулярный лучам света в своей системе покоя и движущийся со скоростью U .

Задача 4. Покажите, что точки экрана с координатами $x^\mu + \delta x^\mu$ удовлетворяют условиям

$$U_\mu \delta x^\mu = 0 \quad (30)$$

и

$$l_\mu \delta x^\mu = 0. \quad (31)$$

В самом деле, перейдем в систему координат, где $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ и $U = \partial_0$, то есть экран неподвижен. Тогда вектор δx , описывающий точки экрана в момент времени x^0 , удовлетворяет условиям

$$\delta x^0 = 0, \quad l^i \delta x^i = 0.$$

Инвариантным образом эти условия записываются в виде (30) и (31).

Задача 5. Покажите, что все геодезические гиперповерхности \mathcal{H}_c достигают экрана S одновременно в его системе покоя.

Задача 5. Покажите, что все геодезические гиперповерхности \mathcal{H}_c достигают экрана S одновременно в его системе покоя.

Действительно, условие $g(l, \delta x) = 0$ совпадает с условием $\langle dF, \delta x \rangle = 0$, то есть точки с координатами $x^\mu + \delta x^\mu$ лежат на пересечении экрана S с гиперповерхностью \mathcal{H}_c . Мы видели, что системе отсчета экрана эти точки одновременны.

Задача 5. Покажите, что все геодезические гиперповерхности \mathcal{H}_c достигают экрана S одновременно в его системе покоя.

Действительно, условие $g(l, \delta x) = 0$ совпадает с условием $\langle dF, \delta x \rangle = 0$, то есть точки с координатами $x^\mu + \delta x^\mu$ лежат на пересечении экрана S с гиперповерхностью \mathcal{H}_c . Мы видели, что системе отсчета экрана эти точки одновременны.

Теперь рассмотрим два таких экрана S и S' , проходящие через **одну и ту же** точку x , но движущиеся с разными скоростями U и U' . Предположим, что мы можем как-то «окрасить» геодезические, так что на экранах появится изображение.

Задача 5. Покажите, что все геодезические гиперповерхности \mathcal{H}_c достигают экрана S одновременно в его системе покоя.

Действительно, условие $g(l, \delta x) = 0$ совпадает с условием $\langle dF, \delta x \rangle = 0$, то есть точки с координатами $x^\mu + \delta x^\mu$ лежат на пересечении экрана S с гиперповерхностью \mathcal{H}_c . Мы видели, что системе отсчета экрана эти точки одновременны.

Теперь рассмотрим два таких экрана S и S' , проходящие через **одну и ту же** точку x , но движущиеся с разными скоростями U и U' . Предположим, что мы можем как-то «окрасить» геодезические, так что на экранах появится изображение.

Задача 6. Покажите, что изображения на экранах S и S' в системах их покоя совпадают.

Задача 6. Покажите, что все геодезические гиперповерхности \mathcal{H}_c достигают экрана S одновременно в его системе покоя.

Действительно, условие $g(l, \delta x) = 0$ совпадает с условием $\langle dF, \delta x \rangle = 0$, то есть точки с координатами $x^\mu + \delta x^\mu$ лежат на пересечении экрана S с гиперповерхностью \mathcal{H}_c . Мы видели, что системе отсчета экрана эти точки одновременны.

Теперь рассмотрим два таких экрана S и S' , проходящие через **одну и ту же** точку x , но движущиеся с разными скоростями U и U' . Предположим, что мы можем как-то «окрасить» геодезические, так что на экранах появится изображение.

Задача 6. Покажите, что изображения на экранах S и S' в системах их покоя совпадают.

Действительно, рассмотрим какую-то окрашенную геодезическую α . На экране S она проходит точку с координатами $x^\mu + \delta_\alpha x^\mu$, а на экране S' — через точку с координатами $x^\mu + \delta_\alpha x'^\mu$.

Задача 6. Покажите, что все геодезические гиперповерхности \mathcal{H}_c достигают экрана S одновременно в его системе покоя.

Действительно, условие $g(l, \delta x) = 0$ совпадает с условием $\langle dF, \delta x \rangle = 0$, то есть точки с координатами $x^\mu + \delta x^\mu$ лежат на пересечении экрана S с гиперповерхностью \mathcal{H}_c . Мы видели, что системе отсчета экрана эти точки одновременны.

Теперь рассмотрим два таких экрана S и S' , проходящие через **одну и ту же** точку x , но движущиеся с разными скоростями U и U' . Предположим, что мы можем как-то «окрасить» геодезические, так что на экранах появится изображение.

Задача 6. Покажите, что изображения на экранах S и S' в системах их покоя совпадают.

Действительно, рассмотрим какую-то окрашенную геодезическую α . На экране S она проходит точку с координатами $x^\mu + \delta_\alpha x^\mu$, а на экране S' — через точку с координатами $x^\mu + \delta'_\alpha x'^\mu$. Так как эти точки находятся на одной геодезической, имеем

$$\delta_\alpha x'^\mu = \delta_\alpha x^\mu + (A_{\alpha\nu} \delta_\alpha x^\nu) l'^\mu \quad (32)$$

с некоторыми коэффициентами $A_{\alpha\nu}$.

Задача 6. Покажите, что все геодезические гиперповерхности \mathcal{H}_c достигают экрана S одновременно в его системе покоя.

Действительно, условие $g(l, \delta x) = 0$ совпадает с условием $\langle dF, \delta x \rangle = 0$, то есть точки с координатами $x^\mu + \delta x^\mu$ лежат на пересечении экрана S с гиперповерхностью \mathcal{H}_c . Мы видели, что системе отсчета экрана эти точки одновременны.

Теперь рассмотрим два таких экрана S и S' , проходящие через **одну и ту же** точку x , но движущиеся с разными скоростями U и U' . Предположим, что мы можем как-то «окрасить» геодезические, так что на экранах появится изображение.

Задача 6. Покажите, что изображения на экранах S и S' в системах их покоя совпадают.

Действительно, рассмотрим какую-то окрашенную геодезическую α . На экране S она проходит точку с координатами $x^\mu + \delta_\alpha x^\mu$, а на экране S' — через точку с координатами $x^\mu + \delta_\alpha x'^\mu$. Так как эти точки находятся на одной геодезической, имеем

$$\delta_\alpha x'^\mu = \delta_\alpha x^\mu + (A_{\alpha\nu} \delta_\alpha x^\nu) l'^\mu \quad (32)$$

с некоторыми коэффициентами $A_{\alpha\nu}$. Теперь возьмем две геодезические α и β . Так как $g(l, \delta_\alpha x) = g(l, \delta_\alpha x') = 0$ и $g(l, l) = 0$, имеем

$$g(\delta_\alpha x', \delta_\beta x') = g(\delta_\alpha x, \delta_\beta x). \quad (33)$$

Теперь разнесем два экрана S и S' в разные точки x и x' на геодезической: $x = \varphi(\tau_1, 0, c)$, $x' = \varphi(\tau_2, 0, c)$ теперь размеры и форма изображений не обязаны совпадать. Пусть рисунок нанесен на экран S . Из приведенных рассуждений следует, что все изотропные геодезические, которые вышли из разных точек экрана S одновременно в системе покоя этого экрана, достигают экрана S' одновременно в системе покоя экрана S' , причем форма и размер изображения на экране S' рисунка на экране S не зависит от скоростей U и U' экранов, коль скоро экраны перпендикулярны пространственным направлениям геодезических в своих системах покоя.

