Лекция 7. Слабое гравитационное поле

Михаил Лашкевич

Приближение и оценки

Когда имеет смысл говорить о слабом гравитационном поле?

Приближение и оценки

Когда имеет смысл говорить о слабом гравитационном поле?

1. Когда плотность и давление вещества, создающего поле, малы. Частный случай — нерелятивистский предел.

Приближение и оценки

Когда имеет смысл говорить о слабом гравитационном поле?

1. Когда плотность и давление вещества, создающего поле, малы. Частный случай — нерелятивистский предел.
2. Вдали от гравитирующих тел в асимптотически плоском пространстве-времени.

Приближение и оценки

Когда имеет смысл говорить о слабом гравитационном поле?

1. Когда плотность и давление вещества, создающего поле, малы. Частный случай — нерелятивистский предел.
2. Вдали от гравитирующих тел в асимптотически плоском пространстве-времени.

Под приближением слабого гравитационного поля мы будем понимать предел

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{1}$$

так чтобы уравнения Эйнштейна можно было бы считать линейными.

Приближение и оценки

Когда имеет смысл говорить о слабом гравитационном поле?

1. Когда плотность и давление вещества, создающего поле, малы. Частный случай — нерелятивистский предел.
2. Вдали от гравитирующих тел в асимптотически плоском пространстве-времени.

Под приближением слабого гравитационного поля мы будем понимать предел

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{1}$$

так чтобы уравнения Эйнштейна можно было бы считать линейными. Для этого тензор энергии-импульса материи должен быть достаточно мал

$$G|T^{\mu\nu}|l^2 \ll 1, \tag{2}$$

где l — характерные масштабы, на которых меняется метрика.

Приближение и оценки

Когда имеет смысл говорить о слабом гравитационном поле?

1. Когда плотность и давление вещества, создающего поле, малы. Частный случай — нерелятивистский предел.
2. Вдали от гравитирующих тел в асимптотически плоском пространстве-времени.

Под приближением слабого гравитационного поля мы будем понимать предел

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{1}$$

так чтобы уравнения Эйнштейна можно было бы считать линейными. Для этого тензор энергии-импульса материи должен быть достаточно мал

$$G|T^{\mu\nu}|l^2 \ll 1, \tag{2}$$

где l — характерные масштабы, на которых меняется метрика.
Если вещество занимает большой объем масштаба L,

Когда имеет смысл говорить о слабом гравитационном поле?

1. Когда плотность и давление вещества, создающего поле, малы. Частный случай — нерелятивистский предел.
2. Вдали от гравитирующих тел в асимптотически плоском пространстве-времени.

Под приближением слабого гравитационного поля мы будем понимать предел

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{1}$$

так чтобы уравнения Эйнштейна можно было бы считать линейными. Для этого тензор энергии-импульса материи должен быть достаточно мал

$$G|T^{\mu\nu}|l^2 \ll 1, \tag{2}$$

где l — характерные масштабы, на которых меняется метрика.
Если вещество занимает большой объем масштаба L, условие слабости поля во всем пространстве имеет вид

$$G|T^{\mu\nu}|L^2 \ll 1. \tag{3}$$

Приближение и оценки

Когда имеет смысл говорить о слабом гравитационном поле?

1. Когда плотность и давление вещества, создающего поле, малы. Частный случай — нерелятивистский предел.
2. Вдали от гравитирующих тел в асимптотически плоском пространстве-времени.

Под приближением слабого гравитационного поля мы будем понимать предел

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{1}$$

так чтобы уравнения Эйнштейна можно было бы считать линейными. Для этого тензор энергии-импульса материи должен быть достаточно мал

$$G|T^{\mu\nu}|l^2 \ll 1, \tag{2}$$

где l — характерные масштабы, на которых меняется метрика.
Если вещество занимает большой объем масштаба L, условие слабости поля во всем пространстве имеет вид

$$G|T^{\mu\nu}|L^2 \ll 1. \tag{3}$$

Если это условие не выполнено, пространство-время надо разбить на участки, на каждом из которых метрику можно приблизить $\eta_{\mu\nu}$ в подходящих координатах.

Приближение и оценки

Когда имеет смысл говорить о слабом гравитационном поле?

1. Когда плотность и давление вещества, создающего поле, малы. Частный случай — нерелятивистский предел.
2. Вдали от гравитирующих тел в асимптотически плоском пространстве-времени.

Под приближением слабого гравитационного поля мы будем понимать предел

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{1}$$

так чтобы уравнения Эйнштейна можно было бы считать линейными. Для этого тензор энергии-импульса материи должен быть достаточно мал

$$G|T^{\mu\nu}|l^2 \ll 1, \tag{2}$$

где l — характерные масштабы, на которых меняется метрика.
Если вещество занимает большой объем масштаба L, условие слабости поля во всем пространстве имеет вид

$$G|T^{\mu\nu}|L^2 \ll 1. \tag{3}$$

Если это условие не выполнено, пространство-время надо разбить на участки, на каждом из которых метрику можно приблизить $\eta_{\mu\nu}$ в подходящих координатах. Для глобальных задач существует модифицированная техника слабого возмущения на фоне медленно меняющейся метрики.

Итак,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{1}$$

Итак,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{1}$$

В этом приближении будем поднимать и опускать индексы с помощью $\eta_{\mu\nu}$, для ясности снабжая индекс черточкой: $a^{\bar{\mu}} = \eta^{\mu\nu} a_\nu$.

Итак,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{1}$$

В этом приближении будем поднимать и опускать индексы с помощью $\eta_{\mu\nu}$, для ясности снабжая индекс черточкой: $a^{\bar{\mu}} = \eta^{\mu\nu} a_\nu$.
В первом порядке по $h_{\mu\nu}$ имеем

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\overline{\mu\nu}}, \qquad |g| = 1 + h, \qquad h = h^{\bar{\mu}}_{\mu}. \tag{4}$$

Итак,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{1}$$

В этом приближении будем поднимать и опускать индексы с помощью $\eta_{\mu\nu}$, для ясности снабжая индекс черточкой: $a^{\bar{\mu}} = \eta^{\mu\nu} a_\nu$.
В первом порядке по $h_{\mu\nu}$ имеем

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\overline{\mu\nu}}, \qquad |g| = 1 + h, \qquad h = h^{\bar{\mu}}_{\mu}. \tag{4}$$

Для тензора Риччи в первом порядке получаем

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-h_{\mu\nu,\lambda}{}^{\bar{\lambda}} + h^{\bar{\lambda}}_{\mu,\nu\lambda} + h^{\bar{\lambda}}_{\nu,\mu\lambda} - h_{,\mu\nu}\right). \tag{5}$$

Итак,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{1}$$

В этом приближении будем поднимать и опускать индексы с помощью $\eta_{\mu\nu}$, для ясности снабжая индекс черточкой: $a^{\bar{\mu}} = \eta^{\mu\nu} a_{\nu}$.
В первом порядке по $h_{\mu\nu}$ имеем

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\overline{\mu\nu}}, \qquad |g| = 1 + h, \qquad h = h_{\mu}^{\bar{\mu}}. \tag{4}$$

Для тензора Риччи в первом порядке получаем

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(-h_{\mu\nu,\lambda}{}^{\bar{\lambda}} + h_{\mu,\nu\lambda}^{\bar{\lambda}} + h_{\nu,\mu\lambda}^{\bar{\lambda}} - h_{,\mu\nu}\right). \tag{5}$$

Подставляя в уравнения Эйнштейна, получаем

$$\eta^{\lambda\kappa} h_{\mu\nu,\lambda\kappa} - h_{\mu,\nu\lambda}^{\bar{\lambda}} - h_{\nu,\mu\lambda}^{\bar{\lambda}} + h_{,\mu\nu} = -16\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2} T_{\lambda}^{\bar{\lambda}}\right). \tag{6}$$

Итак,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{1}$$

В этом приближении будем поднимать и опускать индексы с помощью $\eta_{\mu\nu}$, для ясности снабжая индекс черточкой: $a^{\bar{\mu}} = \eta^{\mu\nu} a_\nu$.
В первом порядке по $h_{\mu\nu}$ имеем

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\overline{\mu\nu}}, \qquad |g| = 1 + h, \qquad h = h^{\bar{\mu}}_{\mu}. \tag{4}$$

Для тензора Риччи в первом порядке получаем

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-h_{\mu\nu,\lambda}{}^{\bar{\lambda}} + h^{\bar{\lambda}}_{\mu,\nu\lambda} + h^{\bar{\lambda}}_{\nu,\mu\lambda} - h_{,\mu\nu}\right). \tag{5}$$

Подставляя в уравнения Эйнштейна, получаем

$$\eta^{\lambda\kappa} h_{\mu\nu,\lambda\kappa} - h^{\bar{\lambda}}_{\mu,\nu\lambda} - h^{\bar{\lambda}}_{\nu,\mu\lambda} + h_{,\mu\nu} = -16\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2} T^{\bar{\lambda}}_{\lambda}\right). \tag{6}$$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна выгладят довольно сложно.

Итак,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{1}$$

В этом приближении будем поднимать и опускать индексы с помощью $\eta_{\mu\nu}$, для ясности снабжая индекс черточкой: $a^{\bar{\mu}} = \eta^{\mu\nu} a_\nu$.
В первом порядке по $h_{\mu\nu}$ имеем

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\overline{\mu\nu}}, \qquad |g| = 1 + h, \qquad h = h_{\mu}^{\bar{\mu}}. \tag{4}$$

Для тензора Риччи в первом порядке получаем

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-h_{\mu\nu,\lambda}{}^{\bar{\lambda}} + h^{\bar{\lambda}}_{\mu,\nu\lambda} + h^{\bar{\lambda}}_{\nu,\mu\lambda} - h_{,\mu\nu}\right). \tag{5}$$

Подставляя в уравнения Эйнштейна, получаем

$$\eta^{\lambda\kappa} h_{\mu\nu,\lambda\kappa} - h^{\bar{\lambda}}_{\mu,\nu\lambda} - h^{\bar{\lambda}}_{\nu,\mu\lambda} + h_{,\mu\nu} = -16\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2} T^{\bar{\lambda}}_{\lambda}\right). \tag{6}$$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна выгладят довольно сложно. Но, главное, они, с одной стороны, не допускают однозначного решения, а с другой стороны, решаются не для любых функций $T_{\mu\nu}$.

Формулу (5) можно записать в виде

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} h_{\lambda\kappa}, \tag{7}$$

Формулу (5) можно записать в виде

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} h_{\lambda\kappa}, \tag{7}$$

где K — дифференциальный оператор вида

$$K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} = \frac{1}{2}\left(-\delta^\lambda_\mu \delta^\kappa_\nu \Box + \delta^\lambda_\mu \eta^{\kappa\alpha}\partial_\alpha\partial_\nu + \delta^\kappa_\nu \eta^{\lambda\alpha}\partial_\alpha\partial_\mu - \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu\right), \tag{8}$$

действующий на симметричных 2-формах. Здесь

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \tag{9}$$

— даламбертиан.

Формулу (5) можно записать в виде

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} h_{\lambda\kappa}, \tag{7}$$

где K — дифференциальный оператор вида

$$K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} = \frac{1}{2}\left(-\delta^\lambda_\mu \delta^\kappa_\nu \,\Box + \delta^\lambda_\mu \eta^{\kappa\alpha}\partial_\alpha\partial_\nu + \delta^\kappa_\nu \eta^{\lambda\alpha}\partial_\alpha\partial_\mu - \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu\right), \tag{8}$$

действующий на симметричных 2-формах. Здесь

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \tag{9}$$

— даламбертиан.
Оператор K вырожденный, так как для любой 1-формы ξ имеем

$$K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa}(\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}) = 0.$$

Формулу (5) можно записать в виде

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} h_{\lambda\kappa}, \tag{7}$$

где K — дифференциальный оператор вида

$$K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} = \frac{1}{2}\left(-\delta^\lambda_\mu \delta^\kappa_\nu \Box + \delta^\lambda_\mu \eta^{\kappa\alpha}\partial_\alpha\partial_\nu + \delta^\kappa_\nu \eta^{\lambda\alpha}\partial_\alpha\partial_\mu - \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu\right), \tag{8}$$

действующий на симметричных 2-формах. Здесь

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \tag{9}$$

— даламбертиан.
Оператор K вырожденный, так как для любой 1-формы ξ имеем

$$K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa}(\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}) = 0.$$

То есть

$$K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} h_{\lambda\kappa} = K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} h'_{\lambda\kappa}, \quad \text{если} \quad h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}. \tag{10}$$

Формулу (5) можно записать в виде

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} h_{\lambda\kappa}, \tag{7}$$

где K — дифференциальный оператор вида

$$K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} = \frac{1}{2}\left(-\delta^\lambda_\mu \delta^\kappa_\nu \Box + \delta^\lambda_\mu \eta^{\kappa\alpha}\partial_\alpha\partial_\nu + \delta^\kappa_\nu \eta^{\lambda\alpha}\partial_\alpha\partial_\mu - \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu\right), \tag{8}$$

действующий на симметричных 2-формах. Здесь

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \tag{9}$$

— даламбертиан.
Оператор K вырожденный, так как для любой 1-формы ξ имеем

$$K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa}(\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}) = 0.$$

То есть

$$K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} h_{\lambda\kappa} = K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} h'_{\lambda\kappa}, \quad \text{если} \quad h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}. \tag{10}$$

Это соответствует калибровочному преобразованию метрики
$\delta_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$ при замене координат $x^\mu = x'^\mu + \xi^\mu$ в первом порядке по
$|h_{\mu\nu}| \ll 1$.

Фиксация калибровки

Чтобы избавиться от этой свободы, нужно наложить d условий. Удобно выбрать условия вида

$$\psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0, \qquad \psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} h. \tag{11}$$

Фиксация калибровки

Чтобы избавиться от этой свободы, нужно наложить d условий. Удобно выбрать условия вида

$$\psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0, \qquad \psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} h. \tag{11}$$

Обратно,

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2}\psi, \qquad \psi = \psi^{\bar{\mu}}_{\mu} = -\frac{d-2}{2} h. \tag{12}$$

Фиксация калибровки

Чтобы избавиться от этой свободы, нужно наложить d условий. Удобно выбрать условия вида

$$\psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0, \qquad \psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} h. \tag{11}$$

Обратно,

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2}\psi, \qquad \psi = \psi^{\bar{\mu}}_{\mu} = -\frac{d-2}{2} h. \tag{12}$$

При условии (11) имеем

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} \quad \Leftrightarrow \quad R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} R^{(1)} = -\frac{1}{2}\Box\psi_{\mu\nu}. \tag{13}$$

Даламбертиан вырожден сравнительно «слабо». Его вырождение не связано с выбором системы координат и имеет физически содержательные последствия. В частности, он не имеет нулевых мод на стационарных решениях, убывающих как $O(r^{3-d})$ на бесконечности.

Чтобы избавиться от этой свободы, нужно наложить d условий. Удобно выбрать условия вида

$$\psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0, \qquad \psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} h. \tag{11}$$

Обратно,

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2}\psi, \qquad \psi = \psi^{\bar{\mu}}_{\mu} = -\frac{d-2}{2}h. \tag{12}$$

При условии (11) имеем

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} \quad \Leftrightarrow \quad R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}R^{(1)} = -\frac{1}{2}\Box \psi_{\mu\nu}. \tag{13}$$

Даламбертиан вырожден сравнительно «слабо». Его вырождение не связано с выбором системы координат и имеет физически содержательные последствия. В частности, он не имеет нулевых мод на стационарных решениях, убывающих как $O(r^{3-d})$ на бесконечности.

Линеаризованные уравнения Эйнштейна упрощаются

$$\Box \psi_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \tag{14}$$

Чтобы избавиться от этой свободы, нужно наложить d условий. Удобно выбрать условия вида

$$\psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0, \qquad \psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} h. \tag{11}$$

Обратно,

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2}\psi, \qquad \psi = \psi^{\bar{\mu}}_{\mu} = -\frac{d-2}{2} h. \tag{12}$$

При условии (11) имеем

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\,\Box\, h_{\mu\nu} \quad \Leftrightarrow \quad R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} R^{(1)} = -\frac{1}{2}\,\Box\,\psi_{\mu\nu}. \tag{13}$$

Даламбертиан вырожден сравнительно «слабо». Его вырождение не связано с выбором системы координат и имеет физически содержательные последствия. В частности, он не имеет нулевых мод на стационарных решениях, убывающих как $O(r^{3-d})$ на бесконечности.

Линеаризованные уравнения Эйнштейна упрощаются

$$\Box\,\psi_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \tag{14}$$

Вычисляя дивергенцию обеих частей этого уравнения, получаем

$$T^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = -(16\pi G)^{-1}\,\Box\,\psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0.$$

Чтобы избавиться от этой свободы, нужно наложить d условий. Удобно выбрать условия вида

$$\psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0, \qquad \psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} h. \tag{11}$$

Обратно,

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2}\psi, \qquad \psi = \psi^{\bar{\mu}}_{\mu} = -\frac{d-2}{2} h. \tag{12}$$

При условии (11) имеем

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} \quad \Leftrightarrow \quad R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} R^{(1)} = -\frac{1}{2}\Box\psi_{\mu\nu}. \tag{13}$$

Даламбертиан вырожден сравнительно «слабо». Его вырождение не связано с выбором системы координат и имеет физически содержательные последствия. В частности, он не имеет нулевых мод на стационарных решениях, убывающих как $O(r^{3-d})$ на бесконечности.

Линеаризованные уравнения Эйнштейна упрощаются

$$\Box\psi_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \tag{14}$$

Вычисляя дивергенцию обеих частей этого уравнения, получаем

$$T^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = -(16\pi G)^{-1}\Box\psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0.$$

То есть в линейном приближении энергия, импульс и момент импульса материи сохраняются. Это является пределом ковариантного уравнения непрерывности $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$, верного в общем случае.

Статические решения и нерелятивистский предел

Статические (не зависящие от времени) решения удовлетворяют уравнению

$$\Delta\psi_{\mu\nu} = 16\pi G T_{\mu\nu}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{d-1} \partial_i^2, \tag{15}$$

и могут быть найдены явно при условии $G|T_{\mu\nu}|L^2 \ll 1$:

$$\psi_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-3)S_{d-1}} \int d^{d-1}x' \, \frac{T_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{d-3}}, \tag{16}$$

где $S_n = n\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2}+1)$ — площадь поверхности единичной гиперсферы в n-мерном эвклидовом пространстве. Выполнение калибровочных условий следует из $\partial_i T_{i\nu} = 0$.

Статические (не зависящие от времени) решения удовлетворяют уравнению

$$\Delta\psi_{\mu\nu} = 16\pi G T_{\mu\nu}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{d-1} \partial_i^2, \tag{15}$$

и могут быть найдены явно при условии $G|T_{\mu\nu}|L^2 \ll 1$:

$$\psi_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-3)S_{d-1}} \int d^{d-1}x' \, \frac{T_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{d-3}}, \tag{16}$$

где $S_n = n\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2}+1)$ — площадь поверхности единичной гиперсферы в n-мерном эвклидовом пространстве. Выполнение калибровочных условий следует из $\partial_i T_{i\nu} = 0$.

Рассмотрим теперь нерелятивистский предел. Это значит:

Статические решения и нерелятивистский предел

Статические (не зависящие от времени) решения удовлетворяют уравнению

$$\Delta\psi_{\mu\nu} = 16\pi G T_{\mu\nu}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{d-1} \partial_i^2, \tag{15}$$

и могут быть найдены явно при условии $G|T_{\mu\nu}|L^2 \ll 1$:

$$\psi_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-3)S_{d-1}} \int d^{d-1}x' \, \frac{T_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{d-3}}, \tag{16}$$

где $S_n = n\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2}+1)$ — площадь поверхности единичной гиперсферы в n-мерном эвклидовом пространстве. Выполнение калибровочных условий следует из $\partial_i T_{i\nu} = 0$.

Рассмотрим теперь нерелятивистский предел. Это значит:

1. скорости частиц много меньше единицы, а поле мы усредняем по временам $T \gg L, r$;

Статические решения и нерелятивистский предел

Статические (не зависящие от времени) решения удовлетворяют уравнению

$$\Delta\psi_{\mu\nu} = 16\pi G T_{\mu\nu}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{d-1} \partial_i^2, \tag{15}$$

и могут быть найдены явно при условии $G|T_{\mu\nu}|L^2 \ll 1$:

$$\psi_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-3)S_{d-1}} \int d^{d-1}x' \, \frac{T_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{d-3}}, \tag{16}$$

где $S_n = n\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2}+1)$ — площадь поверхности единичной гиперсферы в n-мерном эвклидовом пространстве. Выполнение калибровочных условий следует из $\partial_i T_{i\nu} = 0$.

Рассмотрим теперь нерелятивистский предел. Это значит:

1. скорости частиц много меньше единицы, а поле мы усредняем по временам $T \gg L, r$;
2. $|T^{0i}|, |T^{ij}|, |T^{00} - \rho| \ll \rho$ (плотность массы).

Статические (не зависящие от времени) решения удовлетворяют уравнению

$$\Delta\psi_{\mu\nu} = 16\pi G T_{\mu\nu}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{d-1} \partial_i^2, \tag{15}$$

и могут быть найдены явно при условии $G|T_{\mu\nu}|L^2 \ll 1$:

$$\psi_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-3)S_{d-1}} \int d^{d-1}x' \, \frac{T_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{d-3}}, \tag{16}$$

где $S_n = n\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2}+1)$ — площадь поверхности единичной гиперсферы в n-мерном эвклидовом пространстве. Выполнение калибровочных условий следует из $\partial_i T_{i\nu} = 0$.

Рассмотрим теперь нерелятивистский предел. Это значит:

1. скорости частиц много меньше единицы, а поле мы усредняем по временам $T \gg L, r$;
2. $|T^{0i}|, |T^{ij}|, |T^{00} - \rho| \ll \rho$ (плотность массы).

В таком случае мы можем использовать статическое решение в каждый «момент» времени t:

$$\psi_{00}(t,\boldsymbol{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-3)S_{d-1}} \int d^{d-1}x' \, \frac{\rho(t,\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{d-3}}, \quad \psi_{0i}(t,\boldsymbol{r}) = \psi_{ij}(t,\boldsymbol{r}) = 0. \tag{17}$$

Перейдем к величинам $h_{\mu\nu}$:

$$h_{00} = \frac{d-3}{d-2}\psi_{00}, \quad h_{ij} = \frac{\psi_{00}}{d-2}\delta_{ij}.$$

Нерелятивистский предел. Ньютоновский потенциал

Перейдем к величинам $h_{\mu\nu}$:

$$h_{00} = \frac{d-3}{d-2}\psi_{00}, \quad h_{ij} = \frac{\psi_{00}}{d-2}\delta_{ij}.$$

Следовательно,

$$h_{00}(t, \boldsymbol{r}) = (d-3)h_{ii}(t, \boldsymbol{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-2)S_{d-1}} \int d^{d-1}x' \, \frac{\rho(t, \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{d-3}}. \tag{18}$$

Перейдем к величинам $h_{\mu\nu}$:

$$h_{00} = \frac{d-3}{d-2}\psi_{00}, \quad h_{ij} = \frac{\psi_{00}}{d-2}\delta_{ij}.$$

Следовательно,

$$h_{00}(t, \boldsymbol{r}) = (d-3)h_{ii}(t, \boldsymbol{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-2)S_{d-1}} \int d^{d-1}x' \, \frac{\rho(t, \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{d-3}}. \qquad (18)$$

Вспомним, что гравитационный потенциал $\phi = \frac{1}{2}h_{00}$. Полагая, что гравитационное поле создается системой точечных масс m_a в точках $\boldsymbol{r}_a(t)$, получаем

$$\phi(t, \boldsymbol{r}) = -\frac{8\pi G}{(d-2)S_{d-1}} \sum_a \frac{m_a}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a(t)|^{d-3}}. \qquad (19)$$

Перейдем к величинам $h_{\mu\nu}$:

$$h_{00} = \frac{d-3}{d-2}\psi_{00}, \quad h_{ij} = \frac{\psi_{00}}{d-2}\delta_{ij}.$$

Следовательно,

$$h_{00}(t,\boldsymbol{r}) = (d-3)h_{ii}(t,\boldsymbol{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-2)S_{d-1}}\int d^{d-1}x' \, \frac{\rho(t,\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{d-3}}. \qquad (18)$$

Вспомним, что гравитационный потенциал $\phi = \frac{1}{2}h_{00}$. Полагая, что гравитационное поле создается системой точечных масс m_a в точках $\boldsymbol{r}_a(t)$, получаем

$$\phi(t,\boldsymbol{r}) = -\frac{8\pi G}{(d-2)S_{d-1}}\sum_a \frac{m_a}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a(t)|^{d-3}}. \qquad (19)$$

Но: диагональные элементы h_{ii} не равны нулю: $h_{ii} = 2\phi/(d-3)$.

Перейдем к величинам $h_{\mu\nu}$:

$$h_{00} = \frac{d-3}{d-2}\psi_{00}, \quad h_{ij} = \frac{\psi_{00}}{d-2}\delta_{ij}.$$

Следовательно,

$$h_{00}(t,\boldsymbol{r}) = (d-3)h_{ii}(t,\boldsymbol{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-2)S_{d-1}}\int d^{d-1}x'\,\frac{\rho(t,\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{d-3}}. \qquad (18)$$

Вспомним, что гравитационный потенциал $\phi = \frac{1}{2}h_{00}$. Полагая, что гравитационное поле создается системой точечных масс m_a в точках $\boldsymbol{r}_a(t)$, получаем

$$\phi(t,\boldsymbol{r}) = -\frac{8\pi G}{(d-2)S_{d-1}}\sum_a \frac{m_a}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a(t)|^{d-3}}. \qquad (19)$$

Но: диагональные элементы h_{ii} не равны нулю: $h_{ii} = 2\phi/(d-3)$. Отсюда следует, действие для частицы:

$$S = \int dt\,\left(-m + \left(1 - \frac{2\phi(t,\boldsymbol{r})}{d-3}\right)\frac{m\boldsymbol{v}^2}{2} - m\phi(t,\boldsymbol{r})\right).$$

Перейдем к величинам $h_{\mu\nu}$:

$$h_{00} = \frac{d-3}{d-2}\psi_{00}, \quad h_{ij} = \frac{\psi_{00}}{d-2}\delta_{ij}.$$

Следовательно,

$$h_{00}(t,\boldsymbol{r}) = (d-3)h_{ii}(t,\boldsymbol{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-2)S_{d-1}}\int d^{d-1}x' \,\frac{\rho(t,\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{d-3}}. \tag{18}$$

Вспомним, что гравитационный потенциал $\phi = \frac{1}{2}h_{00}$. Полагая, что гравитационное поле создается системой точечных масс m_a в точках $\boldsymbol{r}_a(t)$, получаем

$$\phi(t,\boldsymbol{r}) = -\frac{8\pi G}{(d-2)S_{d-1}}\sum_a \frac{m_a}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a(t)|^{d-3}}. \tag{19}$$

Но: диагональные элементы h_{ii} не равны нулю: $h_{ii} = 2\phi/(d-3)$. Отсюда следует, действие для частицы:

$$S = \int dt\left(-m + \left(1 - \frac{2\phi(t,\boldsymbol{r})}{d-3}\right)\frac{m\boldsymbol{v}^2}{2} - m\phi(t,\boldsymbol{r})\right).$$

Перейдем к величинам $h_{\mu\nu}$:

$$h_{00} = \frac{d-3}{d-2}\psi_{00}, \quad h_{ij} = \frac{\psi_{00}}{d-2}\delta_{ij}.$$

Следовательно,

$$h_{00}(t,\boldsymbol{r}) = (d-3)h_{ii}(t,\boldsymbol{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-2)S_{d-1}}\int d^{d-1}x'\,\frac{\rho(t,\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{d-3}}. \qquad (18)$$

Вспомним, что гравитационный потенциал $\phi = \frac{1}{2}h_{00}$. Полагая, что гравитационное поле создается системой точечных масс m_a в точках $\boldsymbol{r}_a(t)$, получаем

$$\phi(t,\boldsymbol{r}) = -\frac{8\pi G}{(d-2)S_{d-1}}\sum_a \frac{m_a}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a(t)|^{d-3}}. \qquad (19)$$

Но: диагональные элементы h_{ii} не равны нулю: $h_{ii} = 2\phi/(d-3)$. Отсюда следует, действие для частицы:

$$S = \int dt\left(-m + \left(1 - \cancel{\frac{2\phi(t,\boldsymbol{r})}{d-3}}\right)\frac{m\boldsymbol{v}^2}{2} - m\phi(t,\boldsymbol{r})\right).$$

Так как $\phi \sim v^2 \ll 1$, слагаемое $-2\phi/(d-3)$ в скобках является превышением точности и им нужно пренебречь.

Потенциальная энергия взаимодействующих тел

При $d = 4$ получаем закон всемирного тяготения Ньютона:

$$U(t, \{\boldsymbol{r}_a\}) = \frac{1}{2} \sum_a \lim_{\boldsymbol{r}' \to \boldsymbol{r}_a} m_a \left(\phi(t, \boldsymbol{r}') + G \frac{m_a}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_a(t)|} \right)$$
$$= -\sum_{a<b} G \frac{m_a m_b}{|\boldsymbol{r}_a(t) - \boldsymbol{r}_b(t)|}. \qquad (20)$$

При $d = 4$ получаем закон всемирного тяготения Ньютона:

$$U(t, \{\boldsymbol{r}_a\}) = \frac{1}{2} \sum_a \lim_{\boldsymbol{r}' \to \boldsymbol{r}_a} m_a \left(\phi(t, \boldsymbol{r}') + G \frac{m_a}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_a(t)|} \right)$$
$$= - \sum_{a<b} G \frac{m_a m_b}{|\boldsymbol{r}_a(t) - \boldsymbol{r}_b(t)|}. \quad (20)$$

Отсюда заключаем, что G совпадает с ньютоновской гравитационной постоянной.

Теперь рассмотрим поле произвольного (релятивистского), но стационарного источника. Нас будет интересовать асимптотика на больших расстояниях, где $T_{\mu\nu} = 0$, а $|h_{\mu\nu}| \ll 1$.

Статическое поле вдали от тел. Постановка задачи

Теперь рассмотрим поле произвольного (релятивистского), но стационарного источника. Нас будет интересовать асимптотика на больших расстояниях, где $T_{\mu\nu} = 0$, а $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Тогда

$$\Delta\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_i\psi_{0i} = 0, \qquad \partial_i\psi_{ij} = 0. \tag{21}$$

Статическое поле вдали от тел. Постановка задачи

Теперь рассмотрим поле произвольного (релятивистского), но стационарного источника. Нас будет интересовать асимптотика на больших расстояниях, где $T_{\mu\nu} = 0$, а $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Тогда

$$\Delta\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_i \psi_{0i} = 0, \qquad \partial_i \psi_{ij} = 0. \tag{21}$$

Наш план состоит в том, чтобы решить эти уравнения на больших расстояниях, затем вычислить суперпотенциалы $\tau^{\mu\nu\lambda}$ и $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$, а через них выразить полные массу $M = P^0$ и момент импульса J^{ij} источника гравитации.

Теперь рассмотрим поле произвольного (релятивистского), но стационарного источника. Нас будет интересовать асимптотика на больших расстояниях, где $T_{\mu\nu} = 0$, а $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Тогда

$$\Delta\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_i\psi_{0i} = 0, \qquad \partial_i\psi_{ij} = 0. \tag{21}$$

Наш план состоит в том, чтобы решить эти уравнения на больших расстояниях, затем вычислить суперпотенциалы $\tau^{\mu\nu\lambda}$ и $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$, а через них выразить полные массу $M = P^0$ и момент импульса J^{ij} источника гравитации.
Мы уже знаем, что $\Delta r^{3-d} = 0$.

Теперь рассмотрим поле произвольного (релятивистского), но стационарного источника. Нас будет интересовать асимптотика на больших расстояниях, где $T_{\mu\nu} = 0$, а $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Тогда

$$\Delta\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_i\psi_{0i} = 0, \qquad \partial_i\psi_{ij} = 0. \tag{21}$$

Наш план состоит в том, чтобы решить эти уравнения на больших расстояниях, затем вычислить суперпотенциалы $\tau^{\mu\nu\lambda}$ и $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$, а через них выразить полные массу $M = P^0$ и момент импульса J^{ij} источника гравитации.

Мы уже знаем, что $\Delta r^{3-d} = 0$. Отсюда следует, что и любые производные $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} r^{3-d}$ являются решениями уравнения Лапласа.

Статическое поле вдали от тел. Постановка задачи

Теперь рассмотрим поле произвольного (релятивистского), но стационарного источника. Нас будет интересовать асимптотика на больших расстояниях, где $T_{\mu\nu} = 0$, а $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Тогда

$$\Delta\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_i \psi_{0i} = 0, \qquad \partial_i \psi_{ij} = 0. \tag{21}$$

Наш план состоит в том, чтобы решить эти уравнения на больших расстояниях, затем вычислить суперпотенциалы $\tau^{\mu\nu\lambda}$ и $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$, а через них выразить полные массу $M = P^0$ и момент импульса J^{ij} источника гравитации.
Мы уже знаем, что $\Delta r^{3-d} = 0$. Отсюда следует, что и любые производные $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} r^{3-d}$ являются решениями уравнения Лапласа. Асимптотика общего вида является линейной комбинацией этих решений.

Теперь рассмотрим поле произвольного (релятивистского), но стационарного источника. Нас будет интересовать асимптотика на больших расстояниях, где $T_{\mu\nu} = 0$, а $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Тогда

$$\Delta\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_i\psi_{0i} = 0, \qquad \partial_i\psi_{ij} = 0. \tag{21}$$

Наш план состоит в том, чтобы решить эти уравнения на больших расстояниях, затем вычислить суперпотенциалы $\tau^{\mu\nu\lambda}$ и $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$, а через них выразить полные массу $M = P^0$ и момент импульса J^{ij} источника гравитации.

Мы уже знаем, что $\Delta r^{3-d} = 0$. Отсюда следует, что и любые производные $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} r^{3-d}$ являются решениями уравнения Лапласа. Асимптотика общего вида является линейной комбинацией этих решений. Мы ограничимся двумя лидирующими членами:

$$\begin{aligned}
\psi_{00} &= A r^{3-d} + B^k\,\partial_k r^{3-d} + O(r^{1-d}),\\
\psi_{0i} &= A^i r^{3-d} + B^{ik}\,\partial_k r^{3-d} + O(r^{1-d}),\\
\psi_{ij} &= A^{ij} r^{3-d} + B^{ijk}\,\partial_k r^{3-d} + O(r^{1-d}), \quad A^{ij} = A^{ji}, \quad B^{ijk} = B^{jik}.
\end{aligned}$$

Наложим условие калибровки $\partial_i \psi^{\bar{i}}_{\nu} = 0$:

$$A^i\,\partial_i r^{3-d} = A^{ij}\,\partial_j r^{3-d} = 0,$$

Наложим условие калибровки $\partial_i \psi^{\bar{i}}_{\nu} = 0$:

$$A^i\,\partial_i r^{3-d} = A^{ij}\,\partial_j r^{3-d} = 0, \quad B^{ik}\,\partial_i \partial_k r^{3-d} = B^{ijk}\,\partial_j \partial_k r^{3-d} = 0.$$

Наложим условие калибровки $\partial_i \psi^{\bar{i}}_{\nu} = 0$:

$$A^i\,\partial_i r^{3-d} = A^{ij}\,\partial_j r^{3-d} = 0, \quad B^{ik}\,\partial_i \partial_k r^{3-d} = B^{ijk}\,\partial_j \partial_k r^{3-d} = 0.$$

Отсюда немедленно следует, что

$$A^i = A^{ij} = 0,$$

Наложим условие калибровки $\partial_i \psi^{\bar{i}}_{\nu} = 0$:

$$A^i\,\partial_i r^{3-d} = A^{ij}\,\partial_j r^{3-d} = 0, \quad B^{ik}\,\partial_i \partial_k r^{3-d} = B^{ijk}\,\partial_j \partial_k r^{3-d} = 0.$$

Отсюда немедленно следует, что

$B^{[ik]}\partial_i\partial_k r^{3-d}=0$

$\delta^{ik}\partial_i\partial_k r^{3-d}=\Delta r^{3-d}=0$

[антисимметризатор]

$$A^i = A^{ij} = 0, \qquad \begin{aligned} B^{ik} &= B^{[ik]} + C\delta^{ik}, \\ B^{ijk} &= B^{i[jk]} + C^i\delta^{jk} = B^{j[ik]} + C^j\delta^{ik}. \end{aligned}$$

Наложим условие калибровки $\partial_i \psi^{\bar{i}}_{\nu} = 0$:

$$A^i\,\partial_i r^{3-d} = A^{ij}\,\partial_j r^{3-d} = 0, \quad B^{ik}\,\partial_i\partial_k r^{3-d} = B^{ijk}\,\partial_j\partial_k r^{3-d} = 0.$$

Отсюда немедленно следует, что

[антисимметризатор]

$B^{[ik]}\partial_i\partial_k r^{3-d}=0$

$\delta^{ik}\partial_i\partial_k r^{3-d}=\Delta r^{3-d}=0$

$$A^i = A^{ij} = 0, \qquad \begin{aligned} B^{ik} &= B^{[ik]} + C\delta^{ik}, \\ B^{ijk} &= B^{i[jk]} + C^i\delta^{jk} = B^{j[ik]} + C^j\delta^{ik}. \end{aligned}$$

$$A^{ij} = 0, \quad B^{ijk} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{ij} = 0.$$

Наложим условие калибровки $\partial_i \psi^{\bar{i}}_{\nu} = 0$:

$$A^i\, \partial_i r^{3-d} = A^{ij}\, \partial_j r^{3-d} = 0, \quad B^{ik}\, \partial_i \partial_k r^{3-d} = B^{ijk}\, \partial_j \partial_k r^{3-d} = 0.$$

Отсюда немедленно следует, что

$B^{[ik]}\partial_i\partial_k r^{3-d}=0$

$\delta^{ik}\partial_i\partial_k r^{3-d}=\Delta r^{3-d}=0$

[антисимметризатор]

$$A^i = A^{ij} = 0, \qquad \begin{aligned} B^{ik} &= B^{[ik]} + C\delta^{ik}, \\ B^{ijk} &= B^{i[jk]} + C^i \delta^{jk} = B^{j[ik]} + C^j \delta^{ik}. \end{aligned}$$

$$A^{ij} = 0, \quad B^{ijk} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{ij} = 0.$$

Мы еще можем использовать остаточные калибровочные преобразования.

Наложим условие калибровки $\partial_i \psi^{\bar{i}}_{\nu} = 0$:

$$A^i\, \partial_i r^{3-d} = A^{ij}\, \partial_j r^{3-d} = 0, \quad B^{ik}\, \partial_i \partial_k r^{3-d} = B^{ijk}\, \partial_j \partial_k r^{3-d} = 0.$$

Отсюда немедленно следует, что

$B^{[ik]}\partial_i\partial_k r^{3-d}=0$

$\delta^{ik}\partial_i\partial_k r^{3-d}=\Delta r^{3-d}=0$

[антисимметризатор]

$$A^i = A^{ij} = 0, \qquad \begin{aligned} B^{ik} &= B^{[ik]} + C\delta^{ik}, \\ B^{ijk} &= B^{i[jk]} + C^i\delta^{jk} = B^{j[ik]} + C^j\delta^{ik}. \end{aligned}$$

$$A^{ij} = 0, \quad B^{ijk} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{ij} = 0.$$

Мы еще можем использовать остаточные калибровочные преобразования. Если

$$\Box\, \xi^{\mu} = 0, \tag{22}$$

преобразование $x^{\mu} = x'^{\mu} + \xi^{\mu}$ не нарушает калибровочное условие.

Наложим условие калибровки $\partial_i \psi^{\bar{i}}_{\nu} = 0$:

$$A^i\,\partial_i r^{3-d} = A^{ij}\,\partial_j r^{3-d} = 0, \quad B^{ik}\,\partial_i\partial_k r^{3-d} = B^{ijk}\,\partial_j\partial_k r^{3-d} = 0.$$

Отсюда немедленно следует, что

$B^{[ik]}\partial_i\partial_k r^{3-d}=0$
$\delta^{ik}\partial_i\partial_k r^{3-d}=\Delta r^{3-d}=0$

[антисимметризатор]

$$A^i = A^{ij} = 0, \qquad \begin{aligned} B^{ik} &= B^{[ik]} + C\delta^{ik}, \\ B^{ijk} &= B^{i[jk]} + C^i\delta^{jk} = B^{j[ik]} + C^j\delta^{ik}. \end{aligned}$$

$$A^{ij} = 0, \quad B^{ijk} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{ij} = 0.$$

Мы еще можем использовать остаточные калибровочные преобразования. Если

$$\Box\,\xi^{\mu} = 0, \tag{22}$$

преобразование $x^{\mu} = x'^{\mu} + \xi^{\mu}$ не нарушает калибровочное условие. Преобразование

$$\xi^0 = -Cr^{3-d}, \quad \xi^i = -B^i/A$$

обращает в нуль C' и B'^i.

Наложим условие калибровки $\partial_i \psi^{\bar{i}}_{\nu} = 0$:

$$A^i\,\partial_i r^{3-d} = A^{ij}\,\partial_j r^{3-d} = 0, \quad B^{ik}\,\partial_i\partial_k r^{3-d} = B^{ijk}\,\partial_j\partial_k r^{3-d} = 0.$$

Отсюда немедленно следует, что

$B^{[ik]}\partial_i\partial_k r^{3-d}=0$

$\delta^{ik}\partial_i\partial_k r^{3-d}=\Delta r^{3-d}=0$

[антисимметризатор]

$$A^i = A^{ij} = 0, \qquad \begin{aligned} B^{ik} &= B^{[ik]} + C\delta^{ik}, \\ B^{ijk} &= B^{i[jk]} + C^i\delta^{jk} = B^{j[ik]} + C^j\delta^{ik}. \end{aligned}$$

$$A^{ij} = 0, \quad B^{ijk} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{ij} = 0.$$

Мы еще можем использовать остаточные калибровочные преобразования. Если

$$\Box\,\xi^{\mu} = 0, \tag{22}$$

преобразование $x^{\mu} = x'^{\mu} + \xi^{\mu}$ не нарушает калибровочное условие. Преобразование

$$\xi^0 = -Cr^{3-d}, \quad \xi^i = -B^i/A$$

обращает в нуль C' и B'^i. Опуская штрихи, получаем окончательно

$$\psi_{00} = Ar^{3-d}, \qquad \psi_{0i} = B^{ik}\partial_k r^{3-d} \quad (B^{ki} = -B^{ik}), \qquad \psi_{ij} = 0. \tag{23}$$

Статическое поле вдали от тел. Калибровочное условие

Наложим условие калибровки $\partial_i \psi^{\bar{i}}_{\nu} = 0$:

$$A^i\,\partial_i r^{3-d} = A^{ij}\,\partial_j r^{3-d} = 0, \quad B^{ik}\,\partial_i\partial_k r^{3-d} = B^{ijk}\,\partial_j\partial_k r^{3-d} = 0.$$

Отсюда немедленно следует, что

$B^{[ik]}\partial_i\partial_k r^{3-d}=0$

$\delta^{ik}\partial_i\partial_k r^{3-d}=\Delta r^{3-d}=0$

[антисимметризатор]

$$A^i = A^{ij} = 0, \qquad B^{ik} = B^{[ik]} + C\delta^{ik},$$

$$B^{ijk} = B^{i[jk]} + C^i\delta^{jk} = B^{j[ik]} + C^j\delta^{ik}.$$

$$A^{ij} = 0, \quad B^{ijk} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{ij} = 0.$$

Мы еще можем использовать остаточные калибровочные преобразования. Если

$$\Box\,\xi^{\mu} = 0, \tag{22}$$

преобразование $x^{\mu} = x'^{\mu} + \xi^{\mu}$ не нарушает калибровочное условие. Преобразование

$$\xi^0 = -Cr^{3-d}, \quad \xi^i = -B^i/A$$

обращает в нуль C' и B'^i. Опуская штрихи, получаем окончательно

$$\psi_{00} = Ar^{3-d}, \qquad \psi_{0i} = B^{ik}\partial_k r^{3-d} \quad (B^{ki} = -B^{ik}), \qquad \psi_{ij} = 0. \tag{23}$$

Осталось связать константы A и B^{ik} с данными об источнике гравитации.

Вычислим суперпотенциалы. Нам достаточно будет $\chi^{\mu 0kl}$ и $\tau^{\mu 0k}$. Имеем

$$\chi^{00kl} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{00}g^{kl} - g^{0k}g^{0l}).$$

Статическое поле вдали от тел. Масса источника гравитации

Вычислим суперпотенциалы. Нам достаточно будет $\chi^{\mu 0kl}$ и $\tau^{\mu 0k}$. Имеем

$$\chi^{00kl} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{00}g^{kl} - g^{0k}g^{0l}).$$

Вычислим суперпотенциалы. Нам достаточно будет $\chi^{\mu 0kl}$ и $\tau^{\mu 0k}$. Имеем

$$\chi^{00kl} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{00}g^{kl} - \cancel{g^{0k}g^{0l}}).$$

Имеем $|g| = 1 + \#r^{3-d}$, $g^{00}g^{kl} = 1 + \#r^{3-d}$, $g^{0k}g^{0l} = \#r^{4-2d} \ll r^{3-d}$.

Статическое поле вдали от тел. Масса источника гравитации

Вычислим суперпотенциалы. Нам достаточно будет $\chi^{\mu 0kl}$ и $\tau^{\mu 0k}$. Имеем

$$\chi^{00kl} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{00}g^{kl} - \cancel{g^{0k}g^{0l}}).$$

Имеем $|g| = 1 + \# r^{3-d}$, $g^{00}g^{kl} = 1 + \# r^{3-d}$, $g^{0k}g^{0l} = \# r^{4-2d} \ll r^{3-d}$.
Окончательно

$$\chi^{00kl} = -\frac{\delta_{kl}}{16\pi G}(1 - Ar^{3-d}), \qquad \tau^{00k} = -\frac{(d-3)A}{16\pi G} r^{1-d} x^k. \tag{24}$$

Вычислим суперпотенциалы. Нам достаточно будет $\chi^{\mu 0kl}$ и $\tau^{\mu 0k}$. Имеем

$$\chi^{00kl} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{00}g^{kl} - \cancel{g^{0k}g^{0l}}).$$

Имеем $|g| = 1 + \# r^{3-d}$, $g^{00}g^{kl} = 1 + \# r^{3-d}$, $g^{0k}g^{0l} = \# r^{4-2d} \ll r^{3-d}$. Окончательно

$$\chi^{00kl} = -\frac{\delta_{kl}}{16\pi G}(1 - Ar^{3-d}), \qquad \tau^{00k} = -\frac{(d-3)A}{16\pi G} r^{1-d} x^k. \tag{24}$$

Отсюда получаем массу системы

$$M = P^0 = \oint df_{0i}\, \tau^{00i} = -\frac{(d-3)A}{16\pi G} \oint \frac{df_{0i}\, x^i}{r^{d-1}} = -\frac{(d-3)S_{d-1}A}{16\pi G}. \tag{25}$$

Итак,

$$A = -\frac{16\pi GM}{(d-3)S_{d-1}} \tag{26}$$

в полном согласии с нерелятивистской формулой (17).

Вычислим суперпотенциалы. Нам достаточно будет $\chi^{\mu 0kl}$ и $\tau^{\mu 0k}$. Имеем

$$\chi^{00kl} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{00}g^{kl} - \cancel{g^{0k}g^{0l}}).$$

Имеем $|g| = 1 + \#r^{3-d}$, $g^{00}g^{kl} = 1 + \#r^{3-d}$, $g^{0k}g^{0l} = \#r^{4-2d} \ll r^{3-d}$.
Окончательно

$$\chi^{00kl} = -\frac{\delta_{kl}}{16\pi G}(1 - Ar^{3-d}), \qquad \tau^{00k} = -\frac{(d-3)A}{16\pi G}r^{1-d}x^k. \tag{24}$$

Отсюда получаем массу системы

$$M = P^0 = \oint df_{0i}\,\tau^{00i} = -\frac{(d-3)A}{16\pi G}\oint \frac{df_{0i}\,x^i}{r^{d-1}} = -\frac{(d-3)S_{d-1}A}{16\pi G}. \tag{25}$$

Итак,

$$A = -\frac{16\pi GM}{(d-3)S_{d-1}} \tag{26}$$

в полном согласии с нерелятивистской формулой (17). В четырехмерном случае имеем

$$A = -4GM \qquad (d = 4). \tag{27}$$

Вычислим суперпотенциалы. Нам достаточно будет $\chi^{\mu 0kl}$ и $\tau^{\mu 0k}$. Имеем

$$\chi^{00kl} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{00}g^{kl} - \cancel{g^{0k}g^{0l}}).$$

Имеем $|g| = 1 + \# r^{3-d}$, $g^{00}g^{kl} = 1 + \# r^{3-d}$, $g^{0k}g^{0l} = \# r^{4-2d} \ll r^{3-d}$.
Окончательно

$$\chi^{00kl} = -\frac{\delta_{kl}}{16\pi G}(1 - Ar^{3-d}), \qquad \tau^{00k} = -\frac{(d-3)A}{16\pi G} r^{1-d} x^k. \tag{24}$$

Отсюда получаем массу системы

$$M = P^0 = \oint df_{0i}\,\tau^{00i} = -\frac{(d-3)A}{16\pi G}\oint \frac{df_{0i}\,x^i}{r^{d-1}} = -\frac{(d-3)S_{d-1}A}{16\pi G}. \tag{25}$$

Итак,

$$A = -\frac{16\pi GM}{(d-3)S_{d-1}} \tag{26}$$

в полном согласии с нерелятивистской формулой (17). В четырехмерном случае имеем

$$A = -4GM \qquad (d=4). \tag{27}$$

Важно отметить, что масса M включает в себя и энергию материи и энергию гравитационного поля. Это «одетая» масса.

Теперь вычислим χ^{i0kl}:

$$\chi^{i0kl} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{0i}g^{kl} - g^{ik}g^{0l}).$$

Теперь вычислим χ^{i0kl}:

$$\chi^{i0kl} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{0i}g^{kl} - g^{ik}g^{0l}).$$

Оба слагаемых в скобках содержат множитель $g^{0i} = 1 + \#r^{2-d}$, так что мы можем положить $|g| = 1$, $g^{ij} = \delta^{ij}$.

Теперь вычислим χ^{i0kl}:

$$\chi^{i0kl} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{0i}g^{kl} - g^{ik}g^{0l}).$$

Оба слагаемых в скобках содержат множитель $g^{0i} = 1 + \# r^{2-d}$, так что мы можем положить $|g| = 1$, $g^{ij} = \delta^{ij}$. Получаем

$$\begin{aligned} \chi^{i0kl} &= \frac{d-3}{16\pi G}\frac{(\delta^{kl}B^{im} - \delta^{ik}B^{lm})x^m}{r^{d-1}}, \\ \tau^{i0k} &= \frac{d-3}{16\pi G}\frac{B^{im}(\delta^{km}r^2 - (d-1)x^k x^m)}{r^{d+1}}. \end{aligned} \tag{28}$$

Теперь вычислим χ^{i0kl}:

$$\chi^{i0kl} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{0i}g^{kl} - g^{ik}g^{0l}).$$

Оба слагаемых в скобках содержат множитель $g^{0i} = 1 + \#r^{2-d}$, так что мы можем положить $|g| = 1$, $g^{ij} = \delta^{ij}$. Получаем

$$\begin{aligned} \chi^{i0kl} &= \frac{d-3}{16\pi G}\frac{(\delta^{kl}B^{im} - \delta^{ik}B^{lm})x^m}{r^{d-1}}, \\ \tau^{i0k} &= \frac{d-3}{16\pi G}\frac{B^{im}(\delta^{km}r^2 - (d-1)x^k x^m)}{r^{d+1}}. \end{aligned} \tag{28}$$

Так как $\tau^{i0k}r^{d-2} \sim r^{-1} \to 0$, мы получаем $P^i = 0$, как и ожидалось.

Теперь вычислим χ^{i0kl}:

$$\chi^{i0kl} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{0i}g^{kl} - g^{ik}g^{0l}).$$

Оба слагаемых в скобках содержат множитель $g^{0i} = 1 + \# r^{2-d}$, так что мы можем положить $|g| = 1$, $g^{ij} = \delta^{ij}$. Получаем

$$\begin{aligned} \chi^{i0kl} &= \frac{d-3}{16\pi G}\,\frac{(\delta^{kl}B^{im} - \delta^{ik}B^{lm})x^m}{r^{d-1}}, \\ \tau^{i0k} &= \frac{d-3}{16\pi G}\,\frac{B^{im}(\delta^{km}r^2 - (d-1)x^k x^m)}{r^{d+1}}. \end{aligned} \tag{28}$$

Так как $\tau^{i0k}r^{d-2} \sim r^{-1} \to 0$, мы получаем $P^i = 0$, как и ожидалось. Для («одетого»!) момента импульса имеем

$$J^{ij} = \int df_{0k}(x^i\tau^{j0k} - x^j\tau^{i0k} + \chi^{i0kj}) = \frac{(d-3)S_{d-1}}{8\pi G}B^{ij}.$$

Теперь вычислим χ^{i0kl}:

$$\chi^{i0kl} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{0i}g^{kl} - g^{ik}g^{0l}).$$

Оба слагаемых в скобках содержат множитель $g^{0i} = 1 + \#r^{2-d}$, так что мы можем положить $|g| = 1$, $g^{ij} = \delta^{ij}$. Получаем

$$\begin{aligned} \chi^{i0kl} &= \frac{d-3}{16\pi G}\frac{(\delta^{kl}B^{im} - \delta^{ik}B^{lm})x^m}{r^{d-1}}, \\ \tau^{i0k} &= \frac{d-3}{16\pi G}\frac{B^{im}(\delta^{km}r^2 - (d-1)x^k x^m)}{r^{d+1}}. \end{aligned} \tag{28}$$

Так как $\tau^{i0k}r^{d-2} \sim r^{-1} \to 0$, мы получаем $P^i = 0$, как и ожидалось. Для («одетого»!) момента импульса имеем

$$J^{ij} = \int df_{0k}(x^i\tau^{j0k} - x^j\tau^{i0k} + \chi^{i0kj}) = \frac{(d-3)S_{d-1}}{8\pi G}B^{ij}.$$

Окончательно

$$B^{ij} = \frac{8\pi G}{(d-3)S_{d-1}}J^{ij}. \tag{29}$$

Теперь вычислим χ^{i0kl}:

$$\chi^{i0kl} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{0i}g^{kl} - g^{ik}g^{0l}).$$

Оба слагаемых в скобках содержат множитель $g^{0i} = 1 + \#r^{2-d}$, так что мы можем положить $|g| = 1$, $g^{ij} = \delta^{ij}$. Получаем

$$\begin{aligned}\chi^{i0kl} &= \frac{d-3}{16\pi G}\frac{(\delta^{kl}B^{im} - \delta^{ik}B^{lm})x^m}{r^{d-1}},\\ \tau^{i0k} &= \frac{d-3}{16\pi G}\frac{B^{im}(\delta^{km}r^2 - (d-1)x^k x^m)}{r^{d+1}}.\end{aligned} \tag{28}$$

Так как $\tau^{i0k}r^{d-2} \sim r^{-1} \to 0$, мы получаем $P^i = 0$, как и ожидалось. Для («одетого»!) момента импульса имеем

$$J^{ij} = \int df_{0k}(x^i\tau^{j0k} - x^j\tau^{i0k} + \chi^{i0kj}) = \frac{(d-3)S_{d-1}}{8\pi G}B^{ij}.$$

Окончательно

$$B^{ij} = \frac{8\pi G}{(d-3)S_{d-1}}J^{ij}. \tag{29}$$

В четырехмерном случае имеем

$$B^{ij} = 2GJ^{ij} \qquad (d=4). \tag{30}$$

Задача 1. Пусть имеется времениподобное векторное поле Киллинга ξ. Выберем систему координат так, что $\xi = \partial_0$. Покажите, что в этой системе координат $g_{\mu\nu,0} = 0$.

Задача 1. Пусть имеется времениподобное векторное поле Киллинга ξ. Выберем систему координат так, что $\xi = \partial_0$. Покажите, что в этой системе координат $g_{\mu\nu,0} = 0$.

Задача 2. Покажите, что в этой системе координат

$$\sqrt{|g|}R^0_0 = \partial_i(\sqrt{|g|}g^{0\mu}\Gamma^i_{0\mu}). \tag{31}$$

Задача 1. Пусть имеется времениподобное векторное поле Киллинга ξ. Выберем систему координат так, что $\xi = \partial_0$. Покажите, что в этой системе координат $g_{\mu\nu,0} = 0$.

Задача 2. Покажите, что в этой системе координат

$$\sqrt{|g|} R^0_0 = \partial_i (\sqrt{|g|} g^{0\mu} \Gamma^i_{0\mu}). \tag{31}$$

Задача 3. Предположим, что материя расположена в конечном объеме (или, по крайней мере, тензор энергии-импульса быстро спадает на бесконечности), но при этом пространственные слои $x^0 = t$ являются гладкими многообразиями, определенными для всех значений $\{x^i\} \in \mathbb{R}^{d-1}$. Используя асимптотику для метрики и уравнения Эйнштейна, покажите, что

$$M = \int d^{d-1}x \, \sqrt{|g|} \left(T^0_0 - \frac{1}{d-3} T^i_i \right). \tag{32}$$

Задача 1. Пусть имеется времениподобное векторное поле Киллинга ξ. Выберем систему координат так, что $\xi = \partial_0$. Покажите, что в этой системе координат $g_{\mu\nu,0} = 0$.

Задача 2. Покажите, что в этой системе координат

$$\sqrt{|g|} R^0_0 = \partial_i (\sqrt{|g|} g^{0\mu} \Gamma^i_{0\mu}). \tag{31}$$

Задача 3. Предположим, что материя расположена в конечном объеме (или, по крайней мере, тензор энергии-импульса быстро спадает на бесконечности), но при этом пространственные слои $x^0 = t$ являются гладкими многообразиями, определенными для всех значений $\{x^i\} \in \mathbb{R}^{d-1}$. Используя асимптотику для метрики и уравнения Эйнштейна, покажите, что

$$M = \int d^{d-1}x \sqrt{|g|} \left(T^0_0 - \frac{1}{d-3} T^i_i \right). \tag{32}$$

Простой пример. Гравитационное поле в $d = 4$ создается стационарным изотропным газом. Тогда

$$M = \int d^3x \sqrt{|g|} (\rho + 3p),$$