Лекция 4
Кроссинг-симметрия и бозонное представление

Рассмотрим модель конформной теории поля общего вида. Пусть $\{\phi_i\}$ — набор первичных полей размерностей $(\Delta_i, \bar{\Delta}_i)$ с операторными разложениями

$$\phi_i(x')\phi_j(x) = \sum_k C_{ij}^k (z'-z)^{\Delta_k-\Delta_i-\Delta_j}(\bar{z}'-\bar{z})^{\bar{\Delta}_k-\bar{\Delta}_i-\bar{\Delta}_j}(\phi_k(x) + O(z'-z, \bar{z}'-\bar{z})). \qquad (1)$$

Поймем прежде всего, как устроены члены, которые мы обозначили как $O(z'-z, \bar{z}'-\bar{z})$). Понятно, что они состоят из вирасоровских потомков поля phi_k:

$$\phi_k + \sum_{p,\bar{p}\neq 0} a_p(\Delta_i, \Delta_j; \Delta_k) a_{\bar{p}}(\bar{\Delta}_i, \bar{\Delta}_j; \bar{\Delta}_k)(z'-z)^{N(p)}(\bar{z}'-\bar{z})^{N(\bar{p})}\phi_k^{p,\bar{p}}(x),$$

где p, $\bar{p}$ нумеруют потомки по отношению к L_{-n} и $\bar{L}_{-n}$ соответственно, а $N(p)$ — уровень соответствующего потомка. Если потомки $\phi_k^{p,\bar{p}}$ как-нибудь нормировать, то коэффициенты $a_p(\Delta)$ полностью определяются алгеброй Вирасоро и, в принципе, можно вычислить. Это можно сделать, например, действуя операторами L_n $(n > 0)$ на левую и правую часть формального равенства

$$\phi_{\Delta_i}(z)|\Delta_j\rangle = \sum_p a_p z^{\Delta_k-\Delta_i-\Delta_j+N(p)} L(p)|\Delta_k\rangle$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z (здесь $L(p)$ — оператор, производящий потомок p из состояния $|\Delta_k\rangle$.

Введем двойственный базис $\{\phi^i\}$ в пространстве полей:

$$\langle\phi_i(x')\phi^j(x)\rangle = \frac{\delta_i^j}{(z'-z)^{2\Delta_i}(\bar{z}'-\bar{z})^{2\bar{\Delta}_i}}, \qquad \phi_i(x) = \sum_j g_{ij}\phi^j(x). \qquad (2)$$

Очевидно, что

$$\Delta_i = \Delta^i, \text{ а } g_{ij} = 0, \text{ если } \Delta_i \neq \Delta_j.$$

Во многих теориях (например, в рассмотренной нами модели свободного фермиона $c = 1/2$) двойственное поле ϕ^i совпадает с исходным ϕ_i. Вообще говоря, такого совпадения может не быть. Например, в модели свободного бозона $c = 1$ двойственным к вершинному оператору $V_\alpha(x) = {:}e^{i\alpha\phi(x)}{:}$ является оператор $V^\alpha(x) = V_{-\alpha}(x)$.

Рассмотрим четырехточечную функцию

$$G_{ijk}{}^l(z,\bar{z}) = \langle\phi^l(\infty,\infty)\phi_k(1,1)\phi_j(z,\bar{z})\phi_i(0,0)\rangle = \langle l|\phi_k(1,1)\phi_j(z,\bar{z})|i\rangle. \qquad (3)$$

Вычислим теперь операторное разложение полей j и i. Очевидно,

$$\begin{aligned} G_{ijk}{}^l(z,\bar{z}) &= \sum_{m,p,\bar{p}} C_{ji}^m a_p(j,i;m) a_{\bar{p}}(\bar{j},\bar{i};\bar{m}) z^{\Delta_m-\Delta_i-\Delta_j+N(p)}\bar{z}^{\bar{\Delta}_m-\bar{\Delta}_i-\bar{\Delta}_j+N(\bar{p})}\langle l|\phi_k(1,1)|m,p\bar{p}\rangle \\ &= \sum_{m,p,\bar{p}} C_{km}^l C_{ji}^m a_p(j,i;m) a_{\bar{p}}(\bar{j},\bar{i};\bar{m}) b_p(k,m;l) b_{\bar{p}}(\bar{k},\bar{m};\bar{l}) z^{\Delta_m-\Delta_i-\Delta_j+N(p)}\bar{z}^{\bar{\Delta}_m-\bar{\Delta}_i-\bar{\Delta}_j+N(\bar{p})}, \end{aligned}$$

где коэффициенты $b_p(\Delta_k, \Delta_m; \Delta_l)$ вычисляются непосредственно из соответствующих трехточек и тоже определяются исключительно конформной теорией. По определению, для самих первичных полей $a_0 = b_0 = 1$. Мы видим, что зависимости от z и $\bar{z}$ факторизуются (*голоморфная факторизация*):

$$G_{ijk}{}^l(z,\bar{z}) = \sum_m C_{km}^l C_{ji}^m \mathcal{F}_{ijk}{}^l(m;z)\bar{\mathcal{F}}_{ijk}{}^l(m;\bar{z}), \qquad (4)$$

где функции

$$\mathcal{F}_{ijk}{}^{l}(m;z) = \sum_p a_p(j,i;m) b_p(k,m;l) z^{\Delta_m - \Delta_i - \Delta_j + N(p)},$$
$$\bar{\mathcal{F}}_{ijk}{}^{l}(m;\bar{z}) = \sum_{\bar{p}} a_{\bar{p}}(\bar{j},\bar{i};\bar{m}) b_p(\bar{k},\bar{m};\bar{l}) \bar{z}^{\bar{\Delta}_m - \bar{\Delta}_i - \bar{\Delta}_j + N(\bar{p})}$$

называются *конформными блоками.* На прошлой лекции мы уже встречались с конформными блоками — функциями $F_1(z)$, $2F_2(z)$. Нам удобно нормировать конформные блоки условием

$$\mathcal{F}_{ijk}{}^{l}(m;z) = z^{\Delta_m - \Delta_i - \Delta_j}(1 + O(z)).$$

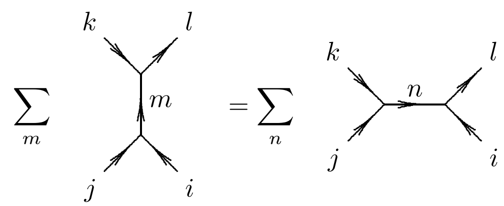
Соотношение (4) гарантирует желаемые свойства монодромии (например, однозначность) при обходе вокруг точки $z = 0$, т. е. желаемые свойства взаимной локальности полей ϕ_i и ϕ_j. Каковы же свойства монодромии при обходе вокруг точки $z = 1$? Давайте рассмотрим для этого операторное разложение ϕ_k и ϕ_j. В этом случае аналогично получим

$$G_{ijk}{}^{l}(z,\bar{z}) = s_{ij} s_{ik} s_{jk} \sum_m C^m_{jk} C^l_{mi} \mathcal{F}_{jki}{}^{l}(m;1-z) \bar{\mathcal{F}}_{jki}{}^{l}(m;1-\bar{z}), \tag{5}$$

где мы воспользовались преобразованием $z \to 1 - z$, а s_{ij} — множитель, равный по модулю 1, определяемый соотношением $\phi_i \phi_j = s_{ij} \phi_j \phi_i$. Соотношения (4) и (5) дают важное тождество, называемое *соотношением кроссинг-инвариантности* Белавина, Полякова и Замолодчикова (1983):

$$\sum_m C^l_{km} C^m_{ji} \mathcal{F}_{ijk}{}^{l}(m;z) \bar{\mathcal{F}}_{ijk}{}^{l}(m;\bar{z}) = s_{ij} s_{ik} s_{jk} \sum_n C^n_{jk} C^l_{ni} \mathcal{F}_{jki}{}^{l}(n;1-z) \bar{\mathcal{F}}_{jki}{}^{l}(n;1-\bar{z}) \tag{6}$$

Графически его можно изобразить следующим образом



Если мы знаем конформные блоки, мы можем найти структурные константы C_{ijk}. Действительно, из кроссинг-симметрии следует, что конформные блоки в s-канале являются линейными комбинациями конформных блоков в t-канале:

$$\mathcal{F}_{ijk}{}^{l}(m;z) = \sum_n \alpha_{ijk}{}^{l}(m,n) \mathcal{F}_{kji}{}^{l}(n;1-z). \tag{7}$$

Коэффициенты $\alpha(m,n)$ обычно можно найти, вычисляя разложение конформных блоков $\mathcal{F}_{ijk}{}^{l}(m;z)$ вблизи точки $z = 1$. Подставим (7) в (4):

$$G_{ijk}{}^{l}(z,\bar{z}) = \sum_{m,n,n'} C^l_{km} C^m_{ji} \alpha_{ijk}{}^{l}(m,n) \bar{\alpha}_{ijk}{}^{l}(m,n') \mathcal{F}_{kji}{}^{l}(n;1-z) \bar{\mathcal{F}}_{kji}{}^{l}(n',1-\bar{z}).$$

Из совместимости этого разложения с (5) следует, что

$$\sum_m C^l_{km} C^m_{ji} \alpha_{ijk}{}^{l}(m,n) \bar{\alpha}_{ijk}{}^{l}(m,n') = \delta_{nn'} s_{ij} s_{ik} s_{jk} C^l_{in} C^n_{jk}. \tag{8}$$

Совместно с условиями нормировки

$$C^j_{i0} = \delta^j_i \quad (\phi_0(x) = 1) \tag{9}$$

и требованием, чтобы $C_{ijk} = \sum_{k'} g_{kk'} C_{ij}^{k'}$ удовлетворял свойству симметрии

$$C_{ijk} = s_{ij} C_{jik} = s_{jk} C_{ikj},$$

эти уравнения определяют структурные константы. Вообще говоря, решения этих уравнений могут быть не единственны. Однако во многих интересных случаях они единственны или их немного.

Рассмотрим теперь конформные блоки теории при $c < 1$. В этом случае модуль Верма алгебры Вирасоро содержит нуль-вектор на уровне mn, если

$$\Delta = \Delta_{mn} = \frac{1}{2}\alpha_{mn}(\alpha_{mn} - 2\alpha_0), \qquad \alpha_{mn} = \frac{1-m}{2}\alpha_+ + \frac{1-n}{2}\alpha_- \tag{10}$$

(*формула Каца*). Это значит, что конформные блоки соответствующих полей представляют собой решения систем дифференциальных уравнений, а промежуточный канал нумерует эти решения. Сейчас мы построим эти решения явно.

Есть простой способ построить алгебру Вирасоро с $c < 1$. Давайте возьмем свободный бозон, точнее его «голоморфную часть» $\varphi(z)$ с корреляционной функцией

$$\langle \varphi(z')\varphi(z) \rangle = \log \frac{R}{z' - z}.$$

В принципе мы знаем, что к тензору-энергии импульса можно прибавлять полную производную, хотя это и может повлиять на граничные условия. Рассмотрим такой тензор энергии-импульса

$$T(z) = -\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + i\alpha_0 \partial^2 \varphi. \tag{11}$$

Вычислив операторное разложение $T(z')T(z)$, мы получим, что центральный заряд изменился под действием дополнительного члена и стал равным

$$c = 1 - 12\alpha_0^2. \tag{12}$$

Можно также вычислить операторные разложения $T(z')V_\alpha(z)$, где

$$V_\alpha(z) = :e^{i\alpha\varphi(z)}:. \tag{13}$$

Мы получим, что такой вершинный оператор имеет конформную размерность

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\alpha_0). \tag{14}$$

Однако это вступает в противоречие с условием, что $\langle V_\alpha(z')V_\beta(z)\rangle$ отлично от нуля только при $\beta = -\alpha$, так как $\Delta_{-\alpha} \neq \Delta_\alpha$. Иными словами, теория не замыкается на сферу — имеется особенность в точке $z = \infty$. Заметим, что теперь

$$\Delta_\alpha = \Delta_{2\alpha_0 - \alpha}. \tag{15}$$

т. е.

$$V^\alpha(z) = V_{2\alpha_0 - \alpha}(z). \tag{16}$$

Чтобы преодолеть эту трудность можно переопределить вакуумное состояние на бесконечности. Именно, потребовать, чтобы

$$\langle 0, \alpha_0| = \lim_{z\to\infty} \langle 0| V_{-2\alpha_0}(z) z^{4\alpha_0^2} \tag{17}$$

и положить $\langle X \rangle = \langle 0, \alpha_0 | X | 0 \rangle$. Тогда

$$\langle V_{\alpha_N}(z_N) \dots V_{\alpha_1}(z_1) \rangle = \begin{cases} \prod_{i<j} (z_j - z_i)^{\alpha_i \alpha_j}, & \text{если } \sum \alpha_i = 2\alpha_0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{18}$$

В частности

$$\langle V_{2\alpha_0-\alpha}(z')V_\alpha(z)\rangle = \frac{1}{(z'-z)^{2\Delta_\alpha}}.$$

Среди вершинных операторов можно выделить несколько специальных полей. Во-первых, это «сопряженная единица» $V_{2\alpha_0}(z)$. Это оператор нулевой размерности. Во-вторых, имеется два оператора $V_\pm(z) = V_{\alpha_\pm}(z)$ размерности 1. Удобно рассмотреть интегралы от этих полей по некоторым контурам (*экранирующие операторы*

$$S_\pm = \int \frac{dz}{2\pi i} V_\pm(z). \tag{19}$$

Интегралы по замкнутым контурам коммутируют с алгеброй Вирасоро:

$$[L_n, \oint \frac{dw}{2\pi i}\, V_\pm(w)] = \oint \frac{dw}{2\pi i}\, [L_n, V_\pm(w)] = \oint \frac{dw}{2\pi i}\, \partial(z^{n+1}V_\pm(w)) = 0$$

Трудность состоит в том, что устроить замкнутый контур довольно сложно. Давайте рассмотрим состояния $|\alpha\rangle = V_\alpha(0)|0\rangle$ и фоковские модули над ними. Давайте выясним, когда интеграл по окружности $\int_{z_0}^{z_0 e^{2\pi i}} \frac{dz}{2\pi i}\, V_-(z)|\alpha\rangle$ является интегралом по замкнутому контуру, т. е. не зависит от начальной точки z_0:

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^{z_0 e^{2\pi i}} \frac{dz}{2\pi i}\, V_-(z)|\alpha\rangle &= \int_{z_0}^{z_0 e^{2\pi i}} \frac{dz}{2\pi i}\, V_-(z)V_\alpha(0)|0\rangle \\ &= \int_{z_0}^{z_0 e^{2\pi i}} \frac{dz}{2\pi i}\, z^{\alpha\alpha_-} :V_-(z)V_\alpha(0):|0\rangle \\ &= \int_{z_0}^{z_0 e^{2\pi i}} \frac{dz}{2\pi i}\, z^{\alpha\alpha_-}(V_{\alpha+\alpha_-}(0) + O(z))|0\rangle.\end{aligned} \tag{20}$$

Очевидно, это так, когда $\alpha\alpha_- = m-1 \in \mathbf{Z}$. Так как $\alpha_+\alpha_- = -2$, имеем $\alpha = \frac{1-m}{2}\alpha_+ = \alpha_{m1}$, т. е. когда модуль Верма имеет нуль-вектор на уровне m. Легко проверить, что интеграл (20) равен нулю при $m > 0$. Однако он не обязан быть равным нулю на всем фоковском модуле. Рассмотрим простейший случай $m = 1$ или $\alpha = 0$. Тогда первые векторы в фоковском модуле — это $|0\rangle$ и $a_{-1}|0\rangle = \partial\varphi(0)|0\rangle$. Посмотрим, как действует на них S_-. Фоковский модуль не имеет структуры модуля Верма, поскольку $L_{-n}|0\rangle = 0$. В то же время вектор $a_{-1}|0\rangle$ находится как раз на уровне 1 и удовлетворяет соотношению $L_1 a_{-1}|0\rangle \sim |0\rangle$. Так или иначе, он должен выпадать из спектра физических операторов. Посмотрим как на него действует экранирующий оператор: $S_- a_{-1}|0\rangle \sim |\alpha_-\rangle \neq 0$. Оказывается, на фоковских модулях $\mathcal{F}_{m1}$ физические векторы удовлетворяют условию $S_-|v\rangle = 0$.

Обобщим эту конструкцию. Рассмотрим операторы

$$Q_\pm^{(n)}(z_0) = \int_{z_0}^{z_0 e^{2\pi i}} \frac{dz_1}{2\pi i} \int_{z_1}^{z_1 e^{2\pi i}} \frac{dz_2}{2\pi i} \ldots \int_{z_1}^{z_1 e^{2\pi i}} \frac{dz_n}{2\pi i} V_\pm(z_1)V_\pm(z_2)\ldots V_\pm(z_n).$$

Эти операторы не зависят от z_0, действуя на фоковское пространство $\mathcal{F}_\alpha$, если $\alpha_\pm\big(n\alpha + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha_\pm\big)$ — целое число. Легко проверить, что это имеет место на модулях с $\alpha = \alpha_{mn}$ для $Q_-^{(n)}$ и $Q_+^{(m)}$, причем при $m, n > 0$ эти операторы действуют нулем на старших векторах. Можно нарисовать такую коммутативную (с точностью до множителей) диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{-m\,n} & \xleftarrow{Q_+^{(m)}} & \mathcal{F}_{mn} \\ \downarrow{\scriptstyle Q_-^{(n)}} & & \downarrow{\scriptstyle Q_-^{(n)}} \\ \mathcal{F}_{-m\,-n} & \xleftarrow{Q_+^{(m)}} & \mathcal{F}_{m\,-n} \end{array}$$

Обратим внимание на то, что $V_{-m\,-n}(z) = V^{mn}(z)$. В модуле $\mathcal{F}_{-m\,-n}$ $(m,n>0)$ имеется нуль-вектор, равный $Q_-^{(n)}|\alpha_{-m\,n}\rangle$. Действительно,

$$L_k Q_-^{(n)}|\alpha_{-m\,n}\rangle = Q_-^{(n)} L_k |\alpha_{-m\,n}\rangle = 0.$$

Поэтому в модуле $\mathcal{F}_{-m\,-n}$ следует считать равными векторы, разность которых есть действие $Q_-^{(n)}$ на какой-то вектор. Иными словами в точках общего положения по c имеем для неприводимого модуля алгебры Вирасоро $(m,n>0)$

$$\mathcal{H}^{\mathrm{Vir}}_{m,n} \simeq \mathrm{Ker}_{\mathcal{F}_{mn}}\, Q_-^{(n)} \simeq \mathcal{F}_{-m\,-n}/\,\mathrm{Im}_{\mathcal{F}_{-m\,n}}\, Q_-^{(n)}.$$

Давайте теперь рассмотрим произведение

$$V_{m_2n_2}(z) Q_+^{(k)}(z) Q_-^{(l)}(z) V_{m_1n_1}(0)$$

Если z мало, то издалека этот оператор выглядит как потомок поля $V_{\alpha'}(0)$ с $\alpha' = \alpha_{m_1n_1} + \alpha_{m_2n_2} - k\alpha_+ - l\alpha_-$, т. е. $V_{m'n'}(0)$ с

$$\begin{aligned} m' &= m_1 + m_2 - 1 - 2k, \\ n' &= n_1 + n_2 - 1 - 2l. \end{aligned} \tag{21}$$

Очевидно, что $k < m_1$, $l < n_1$. Некоторая манипуляция с контурами дает возможность увидеть, что $k < m_2$, $l < n_2$. Отсюда следует, что

$$\begin{gathered} |m_1 - m_2| + 1 \le m' \le m_1 + m_2 - 1, \quad m_1 + m_2 - 1 - m' \in 2\mathbf{Z}, \\ |n_1 - n_2| + 1 \le n' \le n_1 + n_2 - 1, \quad n_1 + n_2 - 1 - n' \in 2\mathbf{Z}. \end{gathered} \tag{22}$$

Теперь сделаем основное утверждение. Конформные блоки модели с $c < 1$ имеют вид (Фейгин, Фукс, 1983)

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_{m_1n_1,m_2n_2,m_3n_3}{}^{m_4n_4}(m,n;z) \\ &\quad = (A^{mn}_{m_1n_1,m_2n_2} A^{m_4n_4}_{mn,m_3n_3})^{-1} \\ &\qquad \times \langle V_{-m_4\,-n_4}(\infty) V_{m_3n_3}(1) Q_+^{(K-k)}(1) Q_-^{(L-l)}(1) V_{m_2n_2}(z) Q_+^{(k)}(z) Q_-^{(l)}(z) V_{m_1n_1}(0)\rangle, \\ &\qquad\quad K = \tfrac12(m_1+m_2+m_3-m_4) - 1, \quad k = \tfrac12(m_1+m_2-m-1), \\ &\qquad\quad L = \tfrac12(n_1+n_2+n_3-n_4) - 1, \qquad l = \tfrac12(n_1+n_2-n-1), \\ &\qquad\qquad A^{mn}_{m_1n_1,m_2n_2} = \langle V(\infty) V(1) Q_+^{(k)}(1) Q_-^l(1) V(0)\rangle. \end{aligned} \tag{23}$$

Действительно, легко проверить, что при $z \to 0$ эти выражения имеют вид $z^{\Delta_{mn} - \Delta_{m_1n_1} - \Delta_{m_2n_2}}(1 + O(z))$. С другой стороны, операторы $Q_\pm$ коммутируют с алгеброй Вирасоро и не портят конформных свойств полей. Обратите внимание, что общее число K операторов S_+ и общее число L операторов S_- не зависят от m и n. Это значит, что конформные блоки для разных промежуточных состояний различаются только выбором контуров интегрирования, но не видом подынтегрального выражения. Дело в том, что все конформные блоки являются решениями одних и тех же дифференциальных уравнений гипергеометрического типа, а интегралы (23) представляют собой интегральные представления решений этих уравнений. Теперь вычисление коэффициентов α в (7) сводится к перекручиванию контуров и вычислению трехточечных корреляционных функций. Это проделали Доценко и Фатеев в 1984 г. и, решив уравнения (8) для случая диагонального спаривания, т. е. полей $\phi_{mn}(x)$ размерностей $(\Delta_{mn}, \Delta_{mn})$, нашли явно структурные константы конформных моделей.

Особый случай составляют конформные модели с центральным зарядом

$$c = 1 - 6\frac{(q-p)^2}{pq}, \qquad p,q \in \mathbf{Z}, \qquad q > p > 1. \tag{24}$$

В этом случае $\alpha_+/\alpha_- = q/p$ — рациональное число, поэтому

$$\alpha_{m+p\, n+q} = \alpha_{mn}$$

и

$$\Delta_{mn} = \Delta_{p-m,q-n} = \frac{(qm-pn)^2-(q-p)^2}{4pq}. \tag{25}$$

Это значит, что модуль Верма со старшим весом Δ_{mn} содержит по крайней мере два нуль-вектора: на уровне mn и на уровне $(p-m)(q-n)$. При этом размерности $\Delta_{mn}+mn$ и $\Delta_{mn}+(p-m)(q-n)$ тоже удовлетворяют формуле Каца и соответствующие подмодули имеют пару общих нуль-векторов. Их подмодули имеют тоже пару общих нуль-векторов и т. д. Эту структуру можно изобразить диаграммой:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & v_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
u_1 \arrow[d] \arrow[drr] & & u_1' \arrow[d] \arrow[dll] \\
u_2 \arrow[d] \arrow[drr] & & u_2' \arrow[d] \arrow[dll] \\
u_3 \arrow[d] \arrow[drr] & & u_3' \arrow[d] \arrow[dll] \\
  & \dots &
\end{tikzcd}$$

Заметим, что структурные константы инвариантны по отношению к замене $(m,n) \to (p-m, q-n)$ в любом из трех индексов, поскольку они зависят только от конформных размерностей. Это значит, что можно выполнить следующую редукцию: отождествить поля $\phi_{mn}(x)$ и $\phi_{p-m\, q-n}(x)$. В этом случае операторные разложения замыкаются в области

$$1 \le m \le p-1, \quad 1 \le n \le q-1. \tag{26}$$

Ниже мы будем писать первичные поля в виде таблицы:

$$\begin{array}{cccc}
\phi_{1\,q-1} & \phi_{2\,q-1} & \dots & \phi_{p-1\,q-1} \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\phi_{1\,2} & \phi_{2\,2} & \dots & \phi_{p-1\,2} \\
\phi_{1\,1} & \phi_{2\,1} & \dots & \phi_{p-1\,1}
\end{array}$$

При этом правило слияния (22) меняется:

$$\begin{gathered}
|m_1-m_2|+1 \le m' \le m_1+m_2-1, 2p-m_1-m_2-1, \\
|n_1-n_2|+1 \le n' \le n_1+n_2-1, 2q-n_1-n_2-1.
\end{gathered} \tag{27}$$

Таким образом, минимальные модели содержат конечное число первичных полей $\lceil pq/2 \rceil$. Особую роль играют теории с $q=p+1$, $p \ge 2$:

$$c = 1 - \frac{6}{p(p+1)}. \tag{28}$$

Дело в том, что это унитарные теории, не содержащие полей отрицательных конформных размерностей. Нормируем состояние $|\Delta\rangle$ условием $\langle\Delta|\Delta\rangle = 1$. Тогда норма состояния $L_{-1}|\Delta\rangle$ равна

$$\langle\Delta|L_1L_{-1}|\Delta\rangle = 2\langle\Delta|L_0|\Delta\rangle = 2\Delta.$$

Таким образом, необходимым условием унитарности представления является положительность размерностей.

Унитарная теория с $p=2$ имеет центральный заряд $c=0$ и содержит только одно первичное поле (и вообще только одно поле) 1. Это «пустая» теория. В случае $p=3$ центральный заряд равен $c=1/2$ и мы имеем модель свободного фермиона. Таблица первичных полей и таблица размерностей имеют вид

$$\begin{array}{cc} \varepsilon & 1 \\ \sigma & \sigma \\ 1 & \varepsilon \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{array}$$

Следующая теория $p=4$ имеет центральный заряд $c=7/10$ и таблицу размерностей

$$\begin{array}{ccc} \frac{3}{2} & \frac{7}{16} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{80} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{80} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{7}{16} & \frac{3}{2} \end{array}$$

Что есть классический предел конформных теорий? Давайте перенормируем алгебру Вирасоро:

$$\tilde{L}_n = \lambda L_n.$$

Тогда

$$[\tilde{L}_m, \tilde{L}_n] = \lambda(m-n)L_{m+n} + \frac{\lambda^2 c}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}.$$

Если $\lambda \to 0$, можно заменить коммутатор скобкой Пуассона. Однако сам по себе этот предел ничего не меняет в теории. Давайте устремим λ к нулю так, чтобы остались конечными оба члена в коммутаторе. Иными словами, пусть произведение λc в этом пределе остается конечным. Поскольку в нашем классе моделей $c<1$, мы будем считать, что

$$c \to -\infty \tag{29}$$

и будем удерживать $\lambda c = -1$. Определим скобку Пуассона как

$$\{F, G\}_{PB} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{i}{\lambda}[F, G],$$

т. е. $\lambda = \hbar$. Тогда

$$\{\tilde{L}_m, \tilde{L}_n\}_{PB} = i(m-n)\tilde{L}_{m+n} - im(m^2-1)\delta_{m+n,0}. \tag{30}$$

Мы видим, что классический предел нельзя осуществить по унитарным моделям, для которых $c>0$. В классическом пределе $\alpha_0 \to \infty$, так что $\alpha_+ \simeq 2\alpha_0 \to \infty$, $\alpha_- \simeq -\alpha_0^{-1} \to 0$. Поля ϕ_{mn} имеют в этом пределе размерности

$$\Delta_{mn} = \frac{|c|(m^2-1)}{24} - \frac{n-1}{2}.$$

Это значит, что состояния с $m>1$ следует исключить из классического спектра.