Лекция 2
Вершинные операторы и операторные разложения

Мы уже говорили о том, что нам следует искать поля, корреляционные функции которых остаются конечными при стремящемся к бесконечности размере области R. В этой лекции мы рассмотрим класс таких полей.

Пусть Φ — произвольная линейная комбинация величин $\phi(x)$, взятых в разных точках. Тогда

$$\langle e^{\Phi}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\langle\Phi^{2n}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\binom{2n}{n}\frac{n!}{2^n}\langle\Phi^2\rangle^n = e^{\frac{1}{2}\langle\Phi^2\rangle}.$$

Мы хотим подставить $\Phi = i\sum\alpha_i\phi(x_i)$. Очевидно, что среднее $\langle\Phi^2\rangle$ будет содержать средние $\langle\phi^2(x_i)\rangle$, равные бесконечности. Давайте обрежем (4) на масштабе $r \ll R$ и положим

$$\langle\phi^2(x)\rangle = \log\frac{R^2}{r^2}.$$

Тогда

$$\langle e^{i\sum\alpha_i\phi(x_i)}\rangle = r^{\sum\alpha_i^2}R^{-(\sum\alpha_i)^2}\prod_{i<j}|x_i-x_j|^{2\alpha_i\alpha_j}. \tag{1}$$

Введем операторы

$$:e^{i\alpha\phi(x)}: = r^{-\alpha^2}e^{i\alpha\phi(x)}. \tag{2}$$

Эти операторы (*вершинные операторы*) и в самом деле представляют собой ряды $\sum\frac{1}{n!}:(i\alpha\phi)^n:$. Средние этих операторов не зависят от ультрафиолетового обрезания r. Второй множитель в (1) не может быть исключен изменением нормировки полей. Однако он стремится к нулю при $R\to\infty$, если $\sum\alpha_i\neq 0$.

Окончательно находим

$$\begin{aligned}\langle\prod_i :e^{i\alpha_i\phi(x_i)}:\rangle &= \prod_{i<j}|x_i-x_j|^{2\alpha_i\alpha_j} \quad \text{при } \sum_i\alpha_i = 0 \text{ и}\\ &= 0 \quad \text{в противном случае.}\end{aligned} \tag{3}$$

Множитель $\delta_{\sum\alpha_i,0}$ означает только то, что корреляционная функция равна нулю, если $\sum\alpha_i\neq 0$. Важное свойство этих корреляционных функций — голоморфная факторизуемость. Действительно, формально мы можем ввести поля $\varphi(z)$, $\bar\varphi(\bar z)$ с корреляционными функциями

$$\langle\varphi(z')\varphi(z)\rangle = \log\frac{R}{z'-z}, \qquad \langle\bar\varphi(\bar z')\bar\varphi(\bar z)\rangle = \log\frac{R}{\bar z'-\bar z}.$$

Нетрудно проверить, что корреляционная функция

$$\begin{aligned}\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}:\ldots:e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}:\rangle &= \prod_{i<j}(z_i-z_j)^{\alpha_i\alpha_j}. \quad \text{при } \sum_i\alpha_i = 0 \text{ и}\\ &= 0 \quad \text{в противном случае.}\end{aligned} \tag{4}$$

Аналогично для $\bar\varphi(\bar z)$. Голоморфная факторизуемость означает в данном случае, что

$$\langle\prod_i :e^{i\alpha_i\phi(x_i)}:\rangle = \langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}:\ldots:e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}:\rangle\langle :e^{i\alpha_1\bar\varphi(\bar z_1)}:\ldots:e^{i\alpha_N\bar\varphi(\bar z_N)}:\rangle. \tag{5}$$

Аналогичным свойством обладают более общие вершинные операторы

$$:(\partial^{k_1}\phi)^{l_1}\ldots(\partial^{k_m}\phi)^{l_m}(\bar\partial^{\bar k_1}\phi)^{\bar l_1}\ldots(\bar\partial^{\bar k_m}\phi)^{\bar l_m}e^{i\alpha\phi}:(x).$$

Вставка такого оператора в точку 0 породит состояние в бозонной теории. Чтобы описать это состояние более явно, разложим поле $\phi(x)$ по модам:

$$\phi(x) = Q - iP\log\frac{z\bar{z}}{R^2} - i\sum_{n\neq 0}\frac{a_n}{n}z^{-n} - i\sum_{n\neq 0}\frac{\bar{a}_n}{n}\bar{z}^{-n} \tag{6}$$

с ненулевыми коммутационными соотношениями

$$[P,Q] = -i, \qquad [a_m, a_n] = m\delta_{m+n,0}, \qquad [\bar{a}_m, \bar{a}_n] = m\delta_{m+n,0}. \tag{7}$$

Введем вакуум $|0\rangle$, такой что

$$P|0\rangle = 0, \qquad a_n|0\rangle = \bar{a}_n|0\rangle = 0 \quad (n > 0). \tag{8}$$

Легко проверить, что вакуумное среднее $\langle 0|\phi(x')\phi(x)|0\rangle$ совпадает с $\langle\phi(x')\phi(x)\rangle$, введенным в предыдущей лекции.

Введем собственное состояние импульса

$$|p\rangle = e^{ipQ}|0\rangle = \lim_{x\to 0}{:}e^{ip\phi(x)}{:}|0\rangle.$$

Тогда пространство состояний бозонного поля есть

$$\mathcal{H} = \bigoplus_p \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_p = \bigoplus_p \mathbf{C}[a_{-1}, a_{-2}, \ldots; \bar{a}_{-1}, \bar{a}_{-2}, \ldots]|p\rangle. \tag{9}$$

Пространства $\mathcal{H}_p = \mathbf{C}[a_{-1}, a_{-2}, \ldots]|p\rangle$ называются *фоковскими пространствами*. Описанная конструкция является основой голоморфной факторизации в случае бозона. Очевидно, что

$$\varphi(z) = Q - iP\log\frac{z}{R} - i\sum_{n\neq 0}\frac{a_n}{n}z^{-n},$$
$$\bar{\varphi}(\bar{z}) = Q - iP\log\frac{\bar{z}}{R} - i\sum_{n\neq 0}\frac{\bar{z}^{-n}}{in}\bar{a}_n,$$

Эти два нелокальных поля имеют общую пару нулевых мод P, Q. Это отвечает тому что разложение классического поля $\phi(x) = \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})$ неоднозначно: оно инвариантно по отношению к прибавлению константы к φ и вычитанию той же константы к $\bar{\varphi}$.

Рассмотрим теперь операторное разложение тензора энергии-импульса с вершинным оператором:

$$\begin{aligned} T(z'){:}e^{i\alpha\phi(x)}{:} &= -\frac{1}{2}{:}(\partial\phi(x'))^2{:}{:}e^{i\alpha\phi(x)}{:} \\ &= -\frac{1}{2}{:}(\partial\phi(x'))^2 e^{i\alpha\phi(x)}{:} - i\alpha\langle\partial\phi(x')\phi(x)\rangle{:}\partial\phi(x')e^{i\alpha\phi(x)}{:} + \frac{\alpha^2}{2}\langle\partial\phi(x')\phi(x)\rangle^2{:}e^{i\alpha\phi(x)}{:}. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для корреляционных функций и раскладывая нормальные произведения в ряд Тейлора по $x' - x$, получим

$$T(z'){:}e^{i\alpha\phi(x)}{:} = \frac{\frac{1}{2}\alpha^2{:}e^{i\alpha\phi(x)}{:}}{(z'-z)^2} + \frac{\partial{:}e^{i\alpha\phi(x)}{:}}{z'-z} + \cdots. \tag{10}$$

Чтобы понять смысл этого соотношения, рассмотрим поле $\Phi(x)$ с операторным разложением

$$\begin{aligned} T(z')\Phi(x) &= \frac{\Delta\Phi(x)}{(z'-z)^2} + \frac{\partial\Phi(x)}{z'-z} + \cdots, \\ \bar{T}(\bar{z}')\Phi(x) &= \frac{\bar{\Delta}\Phi(x)}{(\bar{z}'-\bar{z})^2} + \frac{\bar{\partial}\Phi(x)}{\bar{z}'-\bar{z}} + \cdots, \end{aligned} \tag{11}$$

Такое поле называют *первичным полем конформной размерности* $(\Delta, \bar{\Delta})$. Очевидно, что вершинные операторы представляют собой первичные поля конформной размерности $(\frac{1}{2}\alpha^2, \frac{1}{2}\alpha^2)$. Из соотношения (11) следуют коммутационные соотношения для L_n и $\Phi(x)$:

$$[L_n, \Phi(x)] = z^{n+1}\partial\Phi(x) + \Delta(n+1)z^n\Phi(x). \tag{12}$$

Так как L_n представляют собой генераторы конформных преобразований, имеем

$$\delta_{\varepsilon(z)}\Phi(x) = \varepsilon(z)\partial\Phi(x) + \Delta(\partial\varepsilon(z))\Phi(x).$$

Это соотношение легко интегрируется до конечных преобразований

$$\Phi(z, \bar{z}) \to (f'(z))^{\Delta}(\bar{f}'(\bar{z}))^{\bar{\Delta}}\Phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})). \tag{13}$$

Строго говоря, корреляционные функции инвариантны относительно замены (13), только когда $f(z)$ — дробно-линейное преобразование. Конформная размерность описывает изменение поля при масштабных преобразованиях $(z \to \lambda z)$ и поворотах $(z \to e^{i\vartheta}z)$. Очевидно, что $d = \Delta + \bar{\Delta}$ — масштабная размерность поля, а $s = \Delta - \bar{\Delta}$ — спин. Конформная инвариантность накладывает жесткие условия на корреляционные функции первичных полей. Легко показать, что

$$\begin{aligned}
\langle\Phi_1(x')\Phi_2(x)\rangle &= 0, \text{ если } \Delta_1 \neq \Delta_2 \text{ или } \bar{\Delta}_1 \neq \bar{\Delta}_2,\\
\langle\Phi_1(x')\Phi_2(x)\rangle &= \frac{\mathrm{const}}{(z'-z)^{2\Delta}(\bar{z}'-\bar{z})^{2\bar{\Delta}}}, \text{ если } \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta,\ \bar{\Delta}_1 = \bar{\Delta}_2 = \bar{\Delta},\\
\langle\Phi_3(x_3)\Phi_2(x_2)\Phi_1(x_1)\rangle &= \mathrm{const}\prod(z_j - z_i)^{\Delta_k - \Delta_i - \Delta_j}(\bar{z}_j - \bar{z}_i)^{\bar{\Delta}_k - \bar{\Delta}_i - \bar{\Delta}_j},
\end{aligned} \tag{14}$$

где i, j, k — перестановка индексов 1, 2, 3. Кроме того, четырехточечная корреляционная функция $\langle\Phi_4(x_4)\Phi_4(x_3)\Phi_2(x_2)\Phi_1(x_1)\rangle$ выражается через функцию

$$G(z, \bar{z}) = \lim_{Z\to\infty} Z^{2\Delta_4}\bar{Z}^{2\bar{\Delta}_4}\langle\Phi_4(Z, \bar{Z})\Phi_3(1,1)\Phi_2(z,\bar{z})\Phi_1(0,0)\rangle, \qquad z = \frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}. \tag{15}$$

Пусть теперь $|0\rangle$ — состояние, определенное условием

$$L_n|0\rangle = \bar{L}_n|0\rangle = 0 \text{ при } n \geq 0. \tag{16}$$

Бозонный вакуум (8) удовлетворяет этому соотношению. Произведение $\Phi(0)|0\rangle$ дает состояние $|\Delta, \bar{\Delta}\rangle$, удовлетворяющее условию

$$\begin{gathered}
L_n|\Delta, \bar{\Delta}\rangle = \bar{L}_n|\Delta, \bar{\Delta}\rangle = 0 \quad (n > 0),\\
L_0|\Delta, \bar{\Delta}\rangle = \Delta|\Delta, \bar{\Delta}\rangle, \qquad \bar{L}_0|\Delta, \bar{\Delta}\rangle = \bar{\Delta}|\Delta, \bar{\Delta}\rangle.
\end{gathered}$$

Сосредоточимся на «голоморфном» секторе. Рассмотрим *модуль Верма* алгебры Вирасоро

$$M(\Delta) = \mathbf{C}[L_1, L_2, \ldots]|\Delta\rangle. \tag{17}$$

Вообще говоря, модуль Верма приводим. Пусть имеется вектор $|\chi\rangle$, такой что

$$L_n|\chi\rangle = 0 \quad (n > 0), \qquad L_0|\chi\rangle = (\Delta + N)|\chi\rangle, \quad N > 0, \tag{18}$$

называемый *нуль-вектором* или *особым вектором*. Нуль-вектор ортогонален всем состояниям модуля Верма. Действительно, если $|\varphi\rangle = L_{-n_1}\ldots L_{-n_k}|\Delta\rangle$, то

$$\langle\varphi|\chi\rangle = \langle\Delta|L_{n_k}\ldots L_{n_1}|\chi\rangle = 0.$$

Наличие нуль-вектора означает, что в модуле Верма имеется инвариантное подпространство, т. е. подпространство, которое само является представлением алгебры Вирасоро. Если профакторизовать алгебру Вирасоро по этому инвариантному подпространству (проще, говоря, если положить $|\chi\rangle = 0$), то снова получится представление алгебры Вирасоро. Неприводимое представление получается, если профакторизовать модуль Верма по всем инвариантным подпространствам, т. е. если положить все нуль-векторы равными нулю. Поскольку нуль-вектор ортогонален всем векторам в модуле Верма (в том числе и самому себе), то это естественно и с физической точки зрения.

Рассмотрим простейшие случаи. Пусть $N = 1$. Тогда $L_{-1}|\Delta\rangle$ — единственный возможный нуль-вектор. Очевидно,

$$L_1 L_{-1}|\Delta\rangle = 2L_0|\Delta\rangle = 2\Delta|\Delta\rangle.$$

Это равно нулю при $\Delta = 0$, т. е. такой нуль-вектор имеется только в вакуумном модуле. Введем операторы $\mathcal{L}_n$, действующие на операторы по правилу

$$(\mathcal{L}_n\Phi)(x) = \oint \frac{dw}{2\pi i}\, w^{n+1} T(w)\Phi(x).$$

Тогда

$$(\mathcal{L}_n\Phi)(0)|0\rangle = L_n\Phi(0)|0\rangle.$$

Пусть $\Phi_0(x)$ — первичный оператор, переводящий вирасоровский вакуумный вектор в вакуумный вектор. Тогда $0 = (\mathcal{L}_{-1}\Phi_0)(x) = [L_{-1}, \Phi_0(x)] = \partial\Phi_0(x)$. Это значит, что $\Phi_0(x)$ — постоянный оператор. Мы будем всегда считать, что имеется единственный вакуумный вектор и что $\Phi_0 = 1$.

Теперь пусть $N = 2$. В этом случае $|\chi\rangle = (aL_{-2} + bL_{-1}^2)|\Delta\rangle$. Следует проверить что $L_1|\chi\rangle = L_2|\chi\rangle = 0$.[a] Мы имеем

$$\begin{aligned} L_1(aL_{-2} + bL_{-1}^2)|\Delta\rangle &= (3a + 2(2\Delta+1)b)L_{-1}|\Delta\rangle, \\ L_2(aL_{-2} + bL_{-1}^2)|\Delta\rangle &= ((4 + \tfrac{c}{2})a + 6\Delta b)|\Delta\rangle. \end{aligned}$$

Отсюда получаем уравнения

$$\begin{aligned} 3a + 2(2\Delta+1)b = 0, \\ \left(4a + \tfrac{c}{2}\right)a + 6\Delta b = 0. \end{aligned}$$

Чтобы система имела нетривиальное решение, необходимо чтобы определитель ее коэффициентов равнялся нулю:

$$18\Delta - (2\Delta+1)(8a + c) = 0.$$

Решая эту систему относительно Δ, находим

$$\Delta = \tfrac{1}{16}\left(5 - c \pm \sqrt{(c-1)(c-25)}\right), \qquad |\chi\rangle = \left(L_{-2} - \frac{3}{2(2\Delta+1)}L_{-1}^2\right)|\Delta\rangle. \tag{19}$$

В случае бозонного поля $c = 1$ конформная размерность $\Delta = 1/4$. Имеется два таких поля $:e^{\pm\frac{i}{\sqrt{2}}\phi}:$, для которых нуль-векторы явно равны нулю.

Более интересен случай свободного фермиона $c = 1/2$. В этом случае

$$\Delta_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad \Delta_2 = \tfrac{1}{16}.$$

Поля размерности 1/2 легко построить. Действительно, из корреляционной функции мы видим, что поле $\psi(z)$ имеет размерность $(1/2, 0)$, поле $\bar\psi(\bar z)$ — $(0, 1/2)$. Их произведение $\varepsilon(x) = \psi\bar\psi$ имеет размерность $(1/2, 1/2)$ и представляет собой множитель при массе в массивном случае. В контексте двумерных моделей статистической физики масса играет роль температурного параметра (отклонения температуры от критической), а оператор $\varepsilon(x)$ можно рассматривать как плотность энергии.

[a] Это следует проверять и в общем случае, так как все L_n возникают в коммутаторах L_1 и L_2.

Что же представляет собой поле размерности $\Delta = 1/16$? В следующей лекции мы увидим, что имеется два таких поля $\sigma(x)$ и $\mu(x)$ с операторными разложениями

$$\psi(z')\sigma(x) = (z'-z)^{-1/2}(\mu(x) + O(z'-z)),$$
$$\psi(z')\mu(x) = (z'-z)^{-1/2}(\sigma(x) + O(z'-z)).$$

Эти *спиновые операторы* не взаимно-локальны с ψ, $\bar\psi$ и друг с другом. При обходе, например, ψ вокруг σ по замкнутому контуру, набегает множитель -1. Это можно представлять собой так. Рассмотрим плоскость с выколотыми точками. Чтобы сделать область связной, проведем разрезы из выколотых точек до бесконечности. После построения решений уравнения Дирака в этой области следует сшить решения на берегах разрезов. Но фермионное поле определено с точностью до знака. Поэтому, чтобы иметь возможность правильно проквантовать задачу, следует рассмотреть решения как с условием $\psi_{\mathrm{left}} = \psi_{\mathrm{right}}$ на левом и правом берегу разреза, так и с условием $\psi_{\mathrm{left}} = -\psi_{\mathrm{right}}$. В первом случае решение можно аналитически продолжить на соответствующую выколотую точку, а во втором случае в выколотую точку можно посадить полулокальный оператор, который бы и обеспечивал требуемое условие сшивки.

Известно, что модель свободного майорановского фермиона представляет собой непрерывный предел модели Изинга в критической точке. Действительно, модель Изинга решается переходом к решеточным фермионным полям с квадратичным гамильтонианом. В непрерывном пределе вблизи критической точки это поле сводится к простому ротационно-инвариантному евклидову фермиону. Мы увидим, что спиновый оператор σ можно интерпретировать как «спиновую» переменную $\pm$ в узлах модели Изинга.