Лекция 1
Свободные безмассовые поля
в двумерном пространстве-времени

Рассмотрим свободное вещественное безмассовое бозонное поле в евклидовом пространстве с действием

$$S_E[\phi] = \int \frac{d^2x}{8\pi}\,(\partial_\mu\phi)^2 = \int \frac{d^2x}{2\pi}\,\partial\phi\,\bar\partial\phi = \int \frac{d\bar z\,dz}{4\pi i}\,\partial\phi\,\bar\partial\phi, \tag{1}$$

где использованы комплексные координаты $z = x^2 + ix^1$ и $\bar z = x^2 - ix^1$ и соответствующие операторы дифференцирования $\partial = \frac{1}{2}(\partial_2 - i\partial_1)$ и $\bar\partial = \frac{1}{2}(\partial_2 + i\partial_1)$. При переходе к пространству Минковского эти координаты переходят в координаты светового конуса $x_+ = iz = x^0 + x^1$, $x_- = i\bar z = x^0 - x^1$. Решение классических уравнений движения

$$\partial\bar\partial\phi = 0$$

имеет вид

$$\phi(x) = \varphi(z) + \overline{\varphi(z)} = \varphi(z) + \bar\varphi(\bar z). \tag{2}$$

Здесь $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция.

Легко вычислить тензор энергии-импульса по формуле

$$T_\mu^\nu = L\delta_\mu^\nu - \phi_{,\mu}\frac{\partial L}{\partial\phi_{,\nu}}.$$

В голоморфных координатах

$$T_{z\bar z} = T_{\bar z z} = 0, \qquad T_{zz} = \frac{1}{i\pi}\,T(z), \qquad T_{\bar z\bar z} = \frac{1}{i\pi}\,\bar T(\bar z), \tag{3}$$

где

$$T(z) = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2, \qquad \bar T(\bar z) = -\frac{1}{2}(\bar\partial\phi)^2. \tag{4}$$

При этом, скажем,

$$P_z = \tfrac{1}{2}P^{\bar z} = \int \frac{dz}{2\pi i}\,T(z).$$

Перейдем к квантованию. Действие можно переписать в виде

$$S_E = \frac{1}{2}(\phi, K\phi), \qquad (a,b) = \int d^2x\, a(x)b(x), \qquad K = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 = -\frac{1}{\pi}\partial\bar\partial.$$

Обратный оператор к K представляет собой (евклидов) пропагатор бозона:

$$KG_E(x) = \delta(x). \tag{5}$$

Заметим, что

$$\bar\partial\frac{1}{z} = \partial\frac{1}{\bar z} = \pi\delta(x). \tag{6}$$

Действительно, имеем

$$\int_{|x|\le R} d^2x\,\bar\partial\frac{1}{z} = \int_{|x|\le R} d^2x\,\nabla\left(\frac{1}{2z},\frac{i}{2z}\right) = \int dl\,\mathbf{n}\left(\frac{1}{2z},\frac{i}{2z}\right) = \int_0^{2\pi} d\vartheta\, r\frac{\cos\vartheta + i\sin\vartheta}{2re^{i\vartheta}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\vartheta = \pi.$$

Вне точки $x = 0$ решение уравнения (4) должно иметь вид (2). Будем искать центрально-симметричное решение, т. е. зависящее только от $|z|^2 = z\bar z$. Отсюда видно, что $\varphi(z) \sim \log z$:

$$\partial\bar\partial\log z\bar z = \partial\bar\partial(\log z + \log\bar z) = \partial\frac{1}{\bar z} = \pi\delta(x).$$

Здесь важно, что нельзя переставлять ∂ и $\bar\partial$. Для проверки сделаем вычисление полностью в полярных координатах:

$$\int d^2x\,\partial\bar\partial\log|z|^2 = \frac{1}{4}\int d^2x\,\nabla^2\log r^2 = \frac{1}{4}\int d\mathbf{n}\cdot\nabla\log r^2$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} r\,d\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r}\log r^2 = \pi.$$

Окончательно получаем

$$G_E(x) \equiv \langle\phi(x)\phi(0)\rangle = \log\frac{R^2}{z\bar z}, \tag{7}$$

где R — произвольная константа размерности длины. Фиксировать эту константу на плоскости, строго говоря, нельзя. Однако если мы будем рассматривать теорию на области конечного размера l с данными граничными условиями, то при $|x| \ll l$ корреляционные функции будут даваться формулой (4) с $R \sim l$. Кроме того, корреляционные функции производных от ϕ определены однозначно. Есть и другой класс полей с однозначно определенной корреляционной функцией.

Остальные корреляционные функции можно найти по теореме Вика. По обычным правилам вводится символ нормального произведения. В частности, тензор энергии импульса следует определять как

$$T(z) = -\frac{1}{2}{:}(\partial\phi)^2{:}, \qquad \bar T(\bar z) = -\frac{1}{2}{:}(\bar\partial\phi)^2{:}. \tag{7}$$

Рассмотрим произведение $T(z')T(z)$ и приведем его к нормальному виду:

$$T(z')T(z) = \frac{1}{4}{:}\partial\phi(z')\partial\phi(z'){:}{:}\partial\phi(z)\partial\phi(z){:}$$
$$= \frac{1}{4}{:}(\partial\phi(z'))^2(\partial\phi(z))^2{:} + \langle\partial\phi(z')\partial\phi(z)\rangle{:}\partial\phi(z')\partial\phi(z){:} + \frac{1}{2}\langle\partial\phi(z')\partial\phi(z)\rangle^2$$
$$= \frac{1}{4}{:}(\partial\phi(z'))^2(\partial\phi(z))^2{:} - \frac{1}{(z'-z)^2}{:}\partial\phi(z')\partial\phi(z){:} + \frac{1}{2(z'-z)^4}.$$

Разлагая второй член в ряд Тейлора по $(z'-z)$, получаем

$$T(z')T(z) = \frac{1/2}{(z'-z)^4} + \frac{2T(z)}{(z'-z)^2} + \frac{\partial T(z)}{z'-z} + \cdots. \tag{8}$$

Здесь многоточие обозначает регулярные члены.

Теперь рассмотрим свободное майорановское фермионное поле:

$$S_E[\psi,\bar\psi] = \int\frac{d^2x}{2\pi}(\psi\bar\partial\psi - \bar\psi\partial\bar\psi). \tag{9}$$

Это действие можно получить следующим образом. Выберем γ-матрицы в пространстве Минковского в виде

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}.$$

Эти γ-матрицы — чисто мнимые и, следовательно, отвечают представлению Майораны. Это значит, что на фермионное двухкомпонентное поле Ψ можно наложить условие вещественности

$$\Psi^*(x) = \Psi(x). \tag{10}$$

Действительно, оператор $i\hat\partial = i\gamma^\mu\partial_\mu$ в этом случае чисто вещественный и стандартное действие $\int d^2x\,\bar\Psi\,i\hat\partial\Psi$ тоже вещественно (следует помнить, что фермионы антикоммутируют!). В координатах светового конуса это действие имеет вид

$$i\int d^2x\,(\psi_1\partial_-\psi_1 + \psi_2\partial_+\psi_2).$$

Переходя к евклидову пространству ($iS_M = -S_E$, $x^2 = -ix^0$), получаем

$$\int d^2x\,(\psi_1\bar\partial\psi_1 + \psi_2\partial\psi_2).$$

Заметим, что

$$(\psi_1\bar\partial\psi_1)^* = (\partial\psi_1^*)\psi_1^* = -\psi_1^*\partial\psi_1^*,$$

так что условие Майораны (10) не согласуется с вещественностью евклидова действия и, следовательно, неверно в мнимом времени. С вещественным действием согласуется условие $\psi_1^* = i\psi_2$. Переобозначая $\psi \sim \psi_1$, $\bar\psi \sim i\psi_2$, получаем действие (9) с условием

$$\psi^*(x) = \bar\psi(x). \tag{11}$$

Решение классических уравнений движения

$$\bar\partial\psi = 0, \qquad \partial\bar\psi = 0 \tag{12}$$

имеет вид

$$\psi(x) = \psi(z), \qquad \bar\psi(x) = \overline{\psi(z)} = \bar\psi(\bar z). \tag{13}$$

Найдем теперь тензор энергии-импульса. По общей формуле находим

$$T_z^z = \frac{1}{4\pi i}\psi\bar\partial\psi, \qquad T_{\bar z}^{\bar z} = -\frac{1}{4\pi i}\bar\psi\partial\bar\psi, \qquad T_z^{\bar z} = -\frac{1}{4\pi i}\psi\partial\psi, \qquad T_{\bar z}^z = \frac{1}{4\pi i}\bar\psi\bar\partial\bar\psi.$$

На уравнениях движения $T_z^z = T_{\bar z}^{\bar z} = 0$, т. е. $T_\mu^\mu = 0$. Ненулевые компоненты тензора энергии импульса в обозначениях (3) равны[a]

$$T(z) = -\frac{1}{2}\psi\partial\psi, \qquad \bar T(\bar z) = \frac{1}{2}\bar\psi\bar\partial\bar\psi. \tag{14}$$

Теперь рассмотрим квантование. Очевидно, $K = \frac{1}{\pi}\bar\partial$ для поля ψ и $K = \frac{1}{\pi}\partial$ для поля $-\bar\psi$. Соответственно,

$$\langle\psi(z')\psi(z)\rangle = \frac{1}{z'-z}, \qquad \langle\bar\psi(z')\bar\psi(z)\rangle = -\frac{1}{\bar z' - \bar z}. \tag{15}$$

Тензор энергии импульса определяем через нормальное произведение:

$$T(z) = -\frac{1}{2}{:}\psi\partial\psi{:}, \qquad \bar T(\bar z) = \frac{1}{2}{:}\bar\psi\bar\partial\bar\psi{:}. \tag{16}$$

Аналогично бозонному случаю находим

$$T(z')T(z) = \frac{1/4}{(z'-z)^4} + \frac{2T(z)}{(z'-z)^2} + \frac{\partial T(z)}{z'-z} + \cdots. \tag{17}$$

Это выражение отличается от (8) коэффициентом 1/4 в первом члене. В общем случае операторное произведение для компоненты тензора-энергии импульса имеет вид

$$T(z')T(z) = \frac{c/2}{(z'-z)^4} + \frac{2T(z)}{(z'-z)^2} + \frac{\partial T(z)}{z'-z} + \cdots. \tag{18}$$

Константа c называется *центральным зарядом* и характеризует теорию. В случае свободного бозона $c = 1$, а в случае фермиона $c = 1/2$.

[a] Можно ввести также майорано-вейлевские (киральные) фермионы, в действии которых которых отсутствует второе или первое слагаемое и, соответственно $\bar T = 0$ или $T = 0$.

Будем рассматривать картину радиального квантования. Именно, введем время τ и координату σ как

$$z = e^{\tau + i\sigma}, \qquad \bar{z} = e^{\tau - i\sigma}.$$

Это значит, что мы будет рассматривать теорию на цилиндре с образующей длины 2π, причем точка $z = 0$ соответствует бесконечному прошлому, а $z = \infty$ — бесконечному будущему. Масштабным преобразованием в координатах τ, σ мы всегда можем добиться произвольной длины образующей цилиндра.

Рассмотрим фурье-гармоники в этой картине:

$$L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z), \qquad T(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} L_n z^{-n-2}. \tag{19}$$

Давайте получим коммутационные соотношения для L_n. В принципе операторное разложение (18) некоммутативно только в точке $z' = z$ и уследить буквально за этой некоммутативностью довольно трудно. Лучше воспользоваться тем, что под произведением операторов мы понимаем *хронологическое* произведение. Благодаря этому мы можем считать, что в произведении

$$L_m L_n = \oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{dw}{2\pi i} T(z) T(w)$$

контур C_1 охватывает контур C_2 (находится в будущем по отношению к нему) и оба они охватывают 0. Тогда

$$[L_m, L_n] = \oint_{C_2} \frac{dw}{2\pi i} \oint_{C_w} \frac{dz}{2\pi i} T(z) T(w),$$

где C_w — маленький контур вокруг w. Подставляя сюда (18), беря интеграл по частям в третьем слагаемом и вычисляя вычет в точке $z = w$, получаем

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{c}{12} m(m^2 - 1) \delta_{m+n,0}. \tag{20}$$

Алгебра Ли с образующими L_n, c и коммутационными соотношениями (20) называется *алгеброй Вирасоро*. Для компоненты $\bar{T}$ можно ввести свои генераторы $\bar{L}_n$, удовлетворяющие таким же коммутационным соотношениям.[b] Оператор $\bar{L}_0$ играет роль гамильтониана в картине, в которой роль времени играет «переменная светового конуса» $\log \bar{z} = \tau - i\sigma$. Тогда очевидно, что L_n коммутируют с гамильтонианом и являются интегралами движения. На классическом уровне можно сказать, что уравнение $\bar{\partial} z^{n+1} T(z) = 0$ означает, что $z^{n+1} T(z)$ является сохраняющимся током. Итак, мы получили систему с бесконечным числом интегралов движения.

Обсудим физический смысл полученных результатов. Прежде всего, мы рассматриваем случае, когда

$$T^\mu_\mu = 0$$

по крайней мере на уравнениях движения. Это условие означает наличие конформной инвариантности системы. Действительно, поскольку $T^{\mu\nu}$ пропорционален вариации действия по $g_{\mu\nu}$, нулевой след означает, что действие инвариантно при преобразованиях, при которых метрика умножается на скаляр, а это и есть конформные преобразования. В двумерном случае конформные преобразования представляют собой любые аналитические преобразования $z \to f(z)$, $\bar{z} \to \overline{f(z)}$ и $z \to \overline{f(z)}$, $\bar{z} \to f(z)$. Пространство этих преобразований бесконечномерно, так что следует ожидать, что алгебра Вирасоро отражает эту бесконечномерную симметрию. Среди преобразований этого типа важную роль играют дробно-линейные преобразования (преобразования Мебиуса)

$$z \to \frac{az + b}{cz + d}. \tag{21}$$

[b] Вообще говоря, центральные заряды c и $\bar{c}$ двух этих алгебр могут не совпадать, но для свободного бозона и свободного майорановского фермиона они совпадают.

Среди всех конформных преобразований эти преобразования выделены тем, что они взаимно-однозначны на сфере $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$. Эти преобразования образуют группу $SL(2,\mathbf{R})$. Действительно, преобразованию (21) можно сопоставить матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, причем композиции преобразований отвечает произведение матриц. Коэффициенты $a,\dots,d$ можно нормировать условием $ad-bc=1$.

Группа Мебиуса порождается следующими элементами:

$$\begin{array}{ll} \text{сдвиги:} & z\to z+b, \\ \text{дилатации:} & z\to az, \\ \text{инверсия:} & z\to 1/z. \end{array}$$

Рассмотрим бесконечно-малые преобразования

$$z\to z+\varepsilon_{-1}, \qquad z\to z(1+\varepsilon_0), \qquad z^{-1}\to z^{-1}-\varepsilon_1.$$

Эти преобразования действуют на функции как $\delta g(z)=-\sum\varepsilon_n l_n g(z)$, причем

$$l_{-1}=-\partial, \qquad l_0=-z\partial, \qquad l_1=-z^2\partial.$$

Общим конформным преобразованиям

$$z\to z+\sum_{n\in\mathbf{Z}}\varepsilon_n z^{n+1}$$

отвечают операторы

$$l_n=-z^{n+1}\partial \tag{22}$$

с коммутационными соотношениями

$$[l_m,l_n]=(m-n)l_{m+n}. \tag{23}$$

Алгебра (23) отличается от алгебры Вирасоро дополнительным соотношением $c=0$. Обратите внимание, что подалгебра алгебры Вирасоро, порожденная L_0, $L_{\pm1}$ совпадает с подалгеброй, порожденной операторами l_0, $l_{\pm1}$, т. е. с алгеброй $sl(2,\mathbf{R})$. Это значит, что группа дробно-линейных преобразований остается симметрией теории и после квантования. Полная же алгебра конформных зарядов деформируется, но остается бесконечномерной.