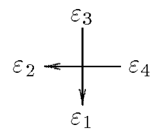
Лекция 2
Уравнение Янга–Бакстера и анзатц Бете

Рассмотрим другую модель классической статистической механики — *шестивершинную модель* или *модель льда.* Пусть на ребрах квадратной решетки живут «спины» $\varepsilon = \pm$, а взаимодействие имеет место в вершинах. Именно, каждой конфигурации спинов вокруг вершины



сопоставим больцмановский вес $R^{\varepsilon_3\varepsilon_4}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$. Стрелки здесь обозначают ориентацию решетки.

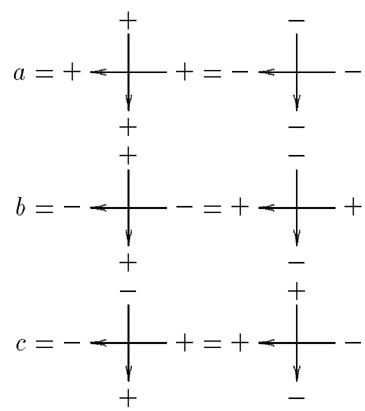
Конфигурацией C называется совокупность значений спинов на всех ребрах решетки. *Весом* конфигурации $W(C)$ называется произведение больцмановских весов во всех вершинах решетки. *Основной конфигурацией* называется конфигурация наибольшего веса. *Статистической суммой* называется сумма весов по всем конфигурациям $Z = \sum_C W(C)$. *Шестивершинной моделью* называется модель, в которой ненулевые веса имеются только при

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \tag{1}$$

и веса инвариантны по отношению к инверсии всех спинов:

$$R^{-\varepsilon_3\,-\varepsilon_4}_{-\varepsilon_1\,-\varepsilon_2} = R^{\varepsilon_3\varepsilon_4}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}. \tag{2}$$

Итак, вокруг каждой вершины допускается одна из следующих шести конфигураций



Матрицу R можно в этом случае записать в виде

$$R = \begin{pmatrix} a & & & \\ & b & c & \\ & c & b & \\ & & & a \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Рассмотрим модель на решетке размера $M \times N$ с циклическими граничными условиями и введем трансфер-матрицу столбца

$$T^{\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_N}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_N} = \sum_{\mu_1\ldots\mu_N} R^{\mu_2\varepsilon'_1}_{\mu_1\varepsilon_1} R^{\mu_3\varepsilon'_2}_{\mu_2\varepsilon_2} \ldots R^{\mu_1\varepsilon'_N}_{\mu_N\varepsilon_N}. \tag{4}$$

Матрицу R удобно рассматривать как оператор

$$R : \mathbf{C} \otimes \mathbf{C} \to \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}, \qquad v_{\varepsilon_1} \otimes v_{\varepsilon_2} \mapsto R^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\varepsilon'_1\varepsilon'_2} v_{\varepsilon'_1} \otimes v_{\varepsilon'_2}.$$

Здесь v_ε — естественный базис в пространстве $V = \mathbf{C}^2$. Если имеется набор идентичных пространств $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_k$, то через R_{ij} мы будем обозначать оператор, действующий на произведении $V_i \otimes V_j$ как R, а на других V_l как единичный оператор. Тогда трансфер-матрицу можно записать компактно в виде

$$T = \operatorname{tr}_{V_0}(R_{0N} \ldots R_{02} R_{01}). \tag{5}$$

Оператор под знаком следа заслуживает отдельного обозначения

$$L = R_{0N} \ldots R_{02} R_{01} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{6}$$

и называется *оператором монодромии.* Очевидно

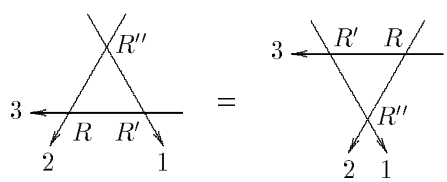
$$T = A + D. \tag{7}$$

Пространство $V_1 \otimes \ldots \otimes V_N$ называется *квантовым пространством*, а пространство V_0 — *вспомогательным пространством.* Оператор L рассматривается обычно как оператор в квантовом пространстве и как матрица — во вспомогательном пространстве. Операторы $A, \ldots, D$ действуют в квантовом пространстве.

Решение задачи о нахождении статистической суммы шестивершинной модели сводится к задаче о нахождении собственных значений трансфер-матрицы. Когда такого типа задача могла бы быть разрешима точно? По сути это вопрос о *квантовой интегрируемости* модели. Что такое квантовая интегрируемость, мы точно не знаем, но из классической механики мы знаем, что модель интегрируема тогда, когда в ней имеется достаточное количество интегралов движения в инволюции. Поэтому нам хотелось бы иметь достаточное количество операторов, коммутирующих с трансфер-матрицей и друг с другом. Предположим, что такие интегралы имеют снова вид трансфер-матрицы T' с какой-то другой матрицей R' вида (3). Итак, пусть имеются операторы T и T' вида (5) с R-матрицами вида (3). Когда они коммутируют? Достаточное (хотя и не необходимое) условие можно сформулировать так. Операторы T и T' коммутируют тогда, когда имеется матрица R'' вида (3), такая что

$$R''_{12} R'_{13} R_{23} = R_{23} R'_{13} R''_{12}. \tag{8}$$

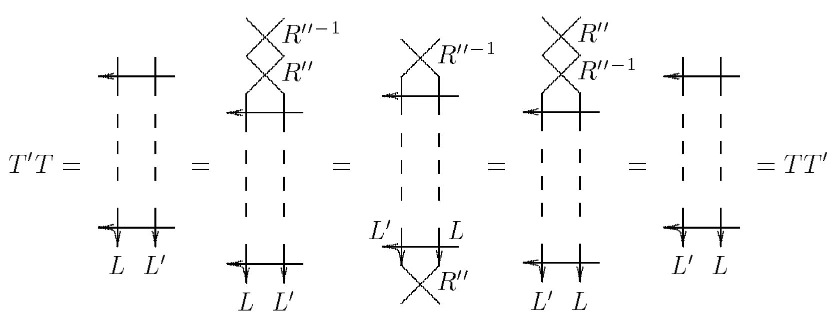
Графически это выглядит так:



(8′)

Это соотношение называется *уравнением Янга–Бакстера.*

Коммутативность трансфер-матриц T и T' при условии (8) легко доказать графически (циклические условия на вертикальных линиях подразумеваются):



В виде формул это записывается так. Из уравнения Янга–Бакстера следует, что

$$R''_{12} L'_1 L_2 = L_2 L'_1 R''_{12},$$

где операторы L_1' и L_2 действуют на одном и том же квантовом пространстве, но имеют разные вспомогательные пространства V_1 и V_2. Тогда

$$\begin{aligned}T'T &= \mathrm{tr}_{V_1\otimes V_2}(L_1'L_2) = \mathrm{tr}_{V_1\otimes V_2}((R''_{12})^{-1}R''_{12}L_1'L_2) = \mathrm{tr}_{V_1\otimes V_2}((R''_{12})^{-1}L_2L_1'R''_{12}) \\ &= \mathrm{tr}_{V_1\otimes V_2}(R''_{12}(R''_{12})^{-1}L_2L_1') = \mathrm{tr}_{V_1\otimes V_2}(L_2L_1') = TT'.\end{aligned}$$

Не будем выводить решение уравнения Янга–Бакстера последовательно, приведем только ответ. Понятно, что нормировка R-матриц не важна, поэтому R-матрицы можно параметризовать двумя переменными. Обозначим их λ и u. Удобно ввести тригонометрическую параметризацию

$$\begin{aligned}a(\lambda,u) &= \sin(\lambda-u),\\ b(\lambda,u) &= \sin u,\\ c(\lambda,u) &= \sin\lambda,\end{aligned}\tag{9}$$

если $c<a+b$, $a<b+c$, $b<a+c$, и

$$\begin{aligned}a(\lambda,u) &= \mathrm{sh}(\lambda-u),\\ b(\lambda,u) &= \mathrm{sh}\, u,\\ c(\lambda,u) &= \mathrm{sh}\,\lambda,\end{aligned}\tag{10}$$

если $c>a+b$. Случаи $a>b+c$ и $b>a+c$ не интересны (см. ниже).

В параметризации (9) или (10) решение уравнения Янга–Бакстера имеет вид

$$\begin{aligned}R &= R(\lambda,u_2-u_3),\\ R' &= R(\lambda,u_1-u_3),\\ R'' &= R(\lambda,u_1-u_2).\end{aligned}\tag{11}$$

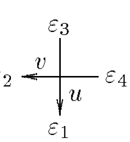
Параметр λ должен быть одинаков для всех трех матриц и в дальнейшем мы будем его опускать. Параметр u у всех трех матриц различен, хотя его значения и связаны соотношением. Важно, что для любых двух матриц R и R' с одинаковым значением λ имеется матрица R'' (с тем же, кстати, значением λ). Это значит, что имеется целое семейство коммутирующих трансфер-матриц $T(u)$ с произвольными u и фиксированным λ:

$$[T(u),T(u')] = 0 \quad \forall u,u'.\tag{12}$$

Переменная u называется *спектральным параметром*.

Заметим, что параметр u_i удобно приписать i-й линии, а R-матрицу записывать в виде

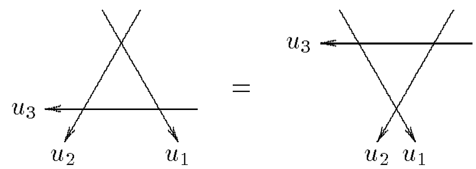
$$R(u-v)^{\varepsilon_3\varepsilon_4}_{\varepsilon_1\varepsilon_2} =$$



Соотношение Янга–Бакстера

$$R_{12}(u_1-u_2)R_{13}(u_1-u_3)R_{23}(u_2-u_3) = R_{23}(u_2-u_3)R_{13}(u_1-u_3)R_{12}(u_1-u_2)\tag{13}$$

можно тогда изобразить как



(13′)

В таком виде уравнение Янга–Бакстера возникло в теории поля как условие факторизации многочастичного рассеяния на двухчастичные. Заметим также, что R-матрицы (9) и (10) удовлетворяют соотношениям кроссинг-симметрии и унитарности вида

$$R(\lambda-u)_{\varepsilon_1\varepsilon_2}^{\varepsilon_3\varepsilon_4}=R(u)_{\varepsilon_4\,-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2\,-\varepsilon_3},\qquad R_{12}(u)R_{21}(-u)=a(u)a(-u). \tag{14}$$

Наличие континуального семейства интегралов движения, конечно, не означает, что их действительно бесконечно много. На самом деле часть из них зависимы, так что их количество конечно, но достаточно для интегрируемости. Избавиться от континуального параметра можно, учтя аналитичность трансфер-матрицы как функции u и рассмотрев производящий функционал

$$T^{-1}(0)T(u)=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n u^n}{n!}.$$

Гамильтонианы H_n коммутируют друг с другом

$$[H_m,H_n]=0\quad\forall m,n$$

и образуют семейство локальных интегралов движения, то есть интегралов движения вида $\sum_{i=1}^N I_{n,i}$, где I_i зависит только от конечного числа узлов $i,i+1,\dots,i+n$. На самом деле только первые N интегралов H_n независимы. Первый из них найти очень легко. Действительно, рассмотрим произведение

$$\begin{aligned}\check R(u)=R(u)P=\begin{pmatrix}a(u)&&&\\&c(u)&b(u)&\\&b(u)&c(u)&\\&&&a(u)\end{pmatrix}&=1\sin\lambda+\begin{pmatrix}-u\cos\lambda&&&\\&&u&\\&u&&\\&&&-u\cos\lambda\end{pmatrix}+O(u^2)\\ =\sin\lambda-(h+\text{ const })u+O(u^2),&\end{aligned}$$

где

$$h=-\frac{1}{2}(\sigma^x\otimes\sigma^x+\sigma^y\otimes\sigma^y-\cos\lambda\,\sigma^z\otimes\sigma^z).$$

В первом порядке по u именно эти слагаемые дадут вклад в H_1. Их не очень сложно собрать (например, в индексных обозначениях), и получить

$$H_1=H_{\mathrm{XXZ}}+\text{const}\,,$$

где H_{XXZ} — гамильтониан XXZ-модели Гайзенберга:

$$H_{\mathrm{XXZ}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(\sigma_n^x\sigma_{n+1}^x+\sigma_n^y\sigma_{n+1}^y+\Delta\sigma_n^z\sigma_{n+1}^z), \tag{15}$$

где

$$\Delta=-\cos\lambda=\frac{a^2+b^2-c^2}{ab} \tag{16}$$

(последнее равенство верно при любых u). В случае $c>a+b$ имеем

$$\Delta=-\operatorname{ch}\lambda. \tag{16$'$}$$

Таким образом, чтобы найти собственные состояния шестивершинной модели, достаточно найти собственные состояния XXZ-модели Гайзенберга. На самом деле обе задачи равной сложности. Но XXZ-модель содержит важный намек на то, как следует решать эту задачу. Прежде всего, введем оператор полного спина

$$S^z=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sigma_n^z.$$

Из условия льда следует, что наши операторы коммутируют с ним:[a]

$$[T(u), S^z] = [H_{\mathrm{XXZ}}, S^z] = 0. \tag{17}$$

Отсюда следует, что собственные состояния имеют определенную проекцию полного спина S^z. Простейшее из таких состояний легко построить: это *псевдовакуумы*

$$|\Omega_\pm\rangle = \underbrace{v_\pm \otimes v_\pm \otimes \ldots \otimes v_\pm}_{N}, \tag{18}$$

в которых все спины повернуты вверх или все вниз. Очевидно,

$$S^z|\Omega_\pm\rangle = \pm\frac{N}{2}|\Omega_\pm\rangle, \qquad T(u)|\Omega_\pm\rangle = (a^N(u) + b^N(u))|\Omega_\pm\rangle.$$

Проблема в том, что эти состояния являются основными только в случае $\Delta > 1$. В этом случае $a > b+c$ (или $b > a+c$) и основными конфигурациями шестивершинной модели являются конфигурации, в которых все спины имеют один знак (или все на вертикальных ребрах один знак, а на горизонтальных — другой). Легко убедится, что для того, чтобы перевернуть один спин, необходимо в этом случае перевернуть также $\sim N$ спинов, так что в термодинамическом пределе вероятность переворота спина в точности равна нулю. Говорят, что в системе имеются *вмороженные* основные конфигурации. Нас будет интересовать случай $\Delta < 1$.

Состояния фиксированного спина $S^z = N/2 - k$ можно представить в виде линейной комбинации состояний

$$|n_1, \ldots, n_k\rangle = \sigma^-_{n_1} \ldots \sigma^-_{n_k}|\Omega_+\rangle, \qquad \sigma^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y), \tag{19}$$

причем все n_j должны быть различны. Поскольку гамильтониан H_{XXZ} переворачивает только соседние спины, собственные состояния гамильтониана будут выглядеть как плоские волны, когда $|n_i - n_j| > 1$ $(\forall i, j)$. Теперь сделаем основное

Предположение. *Рассеяние плоских волн в базисе (19) под действием H_{XXZ} безотражательное.*

Это значит, что волновые функции следует искать в виде

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_1 < \ldots < n_k} \sum_{\sigma \in S^k} A_{\sigma(1)\ldots\sigma(k)} \prod_{j=1}^{k} z_{\sigma(j)}^{n_j} |n_1, \ldots, n_k\rangle.$$

Такой вид волновой функции называется *(координатным) анзатцем Бете*. Действуя гамильтонианом H_{XXZ} можно найти отношения $A_{\ldots ji \ldots}/A_{\ldots ij \ldots} = S_{ij}$. Далее следует наложить условие периодичности

$$z_i^N = \prod_{j,\ j \neq i} S_{ij}(z_i, z_j), \tag{20}$$

которое дает систему уравнений на «импульсы» z_i, называемую системой *уравнений Бете*. Мы получим эту систему явно несколько другим путем.

Вернемся к представлению для L-оператора (6). Рассмотрим матричный элемент $B(u) = L(u)^+_-$. Этот элемент уменьшает спин на единицу:

$$[S^z, B(u)] = -1. \tag{21}$$

Подействуем этим оператором на псевдовакуум $|\Omega_+\rangle$. Мы получим плоскую волну

$$B(u)|\Omega_+\rangle = \sum_n b^n(u) c(u) a^{N-n-1}(u)|n\rangle.$$

[a] При этом они *не* коммутируют с S^x, S^y!

Роль импульса здесь играет u определяющее отношение $z = b(u)/a(u)$. Аналогично,

$$B(u_1)B(u_2)|\Omega_+\rangle = \sum_{n_1<n_2} b^{n_1}(u_1)c(u_1)a^{N-n_1-1}(u_1)b^{n_2-1}(u_2)c(u_2)a^{N-n_2}(u_2)|n_1, n_2\rangle$$
$$+ \sum_{n_1>n_2} b^{n_1}(u_1)c(u_1)a^{N-n_1-1}(u_1)b^{n_2+1}(u_2)c(u_2)a^{N-n_2-2}(u_2)|n_1, n_2\rangle.$$

Мы видим, что состояния

$$|u_1, u_2, \ldots, u_k\rangle = B(u_1)B(u_2)\ldots B(u_k)|\Omega_+\rangle \tag{22}$$

имеют структуру волновых функций Бете с $z_j = b(u_j)/a(u_j)$. Выражение (22) именуется *алгебраическим анзатцем Бете*. Чтобы понять, действительно ли это выражение дает собственные векторы, рассмотрим коммутационные соотношения, следующие из уравнения Янга–Бакстера:

$$R_{12}(u_1 - u_2)L_1(u_1)L_2(u_2) = L_2(u_2)L_1(u_1)R_{12}(u_1 - u_2).$$

Во-первых, $^{++}_{--}$-компонента этого соотношения дает

$$B(u_1)B(u_2) = B(u_2)B(u_1). \tag{23}$$

фЭто значит, что состояния (22) симметричны по $u_1, \ldots, u_k$. Во-вторых, из компонент $^{++}_{-+}$ и $^{-+}_{--}$ имеем соотношения

$$a(u_1 - u_2)B(u_1)A(u_2) = c(u_1 - u_2)B(u_2)A(u_1) + b(u_1 - u_2)A(u_2)B(u_1), \tag{24}$$
$$a(u_2 - u_1)B(u_1)D(u_2) = c(u_2 - u_1)B(u_2)D(u_1) + b(u_2 - u_1)D(u_2)B(u_1). \tag{25}$$

Из этих соотношений имеем

$$\begin{aligned} A(u)|u_1, \ldots, u_k\rangle &= \alpha(u; u_1, \ldots, u_k)|u_1, \ldots, u_k\rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{c(u_i - u)}{b(u_i - u)}\alpha(u_i; u_1, \ldots, \widehat{u}_i, \ldots, u_k)|u, u_1, \ldots, \widehat{u}_i, \ldots, u_k\rangle, \\ D(u)|u_1, \ldots, u_k\rangle &= \delta(u; u_1, \ldots, u_k)|u_1, \ldots, u_k\rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{c(u - u_i)}{b(u - u_i)}\delta(u_i; u_1, \ldots, \widehat{u}_i, \ldots, u_k)|u, u_1, \ldots, \widehat{u}_i, \ldots, u_k\rangle, \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\alpha(u; u_1, \ldots, u_k) = a^N(u)\prod_{i=1}^{k}\frac{a(u_i - u)}{b(u_i - u)}, \qquad \delta(u; u_1, \ldots, u_k) = b^N(u)\prod_{i=1}^{k}\frac{a(u - u_i)}{b(u - u_i)}. \tag{27}$$

Соотношения (26) доказываются по индукции.

Из соотношений (26) получаем

$$T(u)|u_1, \ldots, u_k\rangle = (\alpha(u; u_1, \ldots, u_k) + \delta(u; u_1, \ldots, u_k))|u_1, \ldots, u_k\rangle + \text{плохие члены}.$$

Чтобы вектор $|u_1, \ldots, u_k\rangle$ был собственным, сумма плохих членов должна быть равна нулю. В этом случае собственное значение трансфер-матрицы равно

$$\Lambda(u; u_1, \ldots, u_k) = a^N(u)\prod_{i=1}^{k}\frac{a(u_i - u)}{b(u_i - u)} + b^N(u)\prod_{i=1}^{k}\frac{a(u - u_i)}{b(u - u_i)}. \tag{28}$$

Отметим, что плохие члены, по сути, набегают в точках $n = 1, N$ и условие их сокращения эквивалентна условию периодичности (20).

Так как $\frac{c(u)}{b(u)} = -\frac{c(-u)}{b(-u)}$, плохие члены сокращаются, если

$$\alpha(u_i; u_1, \ldots, \widehat{u}_i, \ldots, u_k) = \delta(u_i; u_1, \ldots, \widehat{u}_i, \ldots, u_k)$$

или

$$\left(\frac{b(u_i)}{a(u_i)}\right)^N = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} \frac{a(u_j-u_i)b(u_i-u_j)}{b(u_j-u_i)a(u_i-u_j)}, \tag{29}$$

Это и есть уравнения Бете. Каждому решению уравнений Бете соответствует некоторый собственный вектор трансфер-матрицы (гамильтониана), так что состояния можно нумеровать наборами $\{u_i\}_{i=1}^k$.

Более явно перепишем уравнения Бете в виде

$$\left(\frac{\sin u_i}{\sin(\lambda-u_i)}\right)^N = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} \frac{\sin(u_i-u_j+\lambda)}{\sin(u_i-u_j-\lambda)} \qquad \text{при } c<a+b \text{ и т. д. } (|\Delta|<1), \tag{30}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sh} u_i}{\operatorname{sh}(\lambda-u_i)}\right)^N = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} \frac{\operatorname{sh}(u_i-u_j+\lambda)}{\operatorname{sh}(u_i-u_j-\lambda)} \qquad \text{при } c>a+b \ (\Delta<-1). \tag{31}$$

Режим $\Delta<-1$ соответствует наличию двух основных конфигураций шестивершинной модели, для которых конфигурации вокруг всех вершин имеют c-тип, и двукратному (в термодинамическом пределе) вырождению основного состояния XXZ-модели. Возбужденные состояния в XXZ-модели отделены от основного щелью. В этом случае говорят об антисегнетоэлектрическом упорядочении шестивершинной модели и антиферромагнитном основном состоянии XXZ-модели. В режиме $|\Delta|<1$ имеется бесконечно много (на бесконечной решетке) основных конфигураций шестивершинной модели (неупорядоченное критическое состояние) и бесщелевой спектр вблизи основного состояния в XXZ-модели. В обоих случаях основному состоянию отвечают состояния с $S^z=0$ или $S^z=\pm\frac{1}{2}$ в зависимости от четности n.

Покажем, как найти наибольшее собственное значение $\Lambda_{\max}(u)$ в этой модели в термодинамическом пределе. Сделаем следующие предположения:

1) В основном состоянии плоские волны не содержат ни экспоненциально растущих, ни экспоненциально спадающий членов, так что $|z_i|\equiv|b(u_i)/a(u_i)|=1$ или $u_i=\lambda/2+iv_i$ с вещественными v_i.

2) В основном состоянии v_i сгущаются в термодинамическом пределе, образуя непрерывные зоны без дырок и отдельно стоящих значений.

3) В основном состоянии $S^z/N\to 0$.

Для определенности будем рассматривать случай $|\Delta|<1$.

Уравнения Бете удобно прологорифмировать. Введем обозначения

$$e^{ip(v)}=\frac{\sin(\lambda/2+iv)}{\sin(\lambda/2-iv)}, \qquad e^{i\theta(v)}=\frac{\sin(\lambda+iv)}{\sin(\lambda-iv)}.$$

Мы выбираем ветвь логарифма, такую что $p(0)=\theta(0)=0$. Уравнения Бете записываются в виде

$$e^{iNp(v_i)}=(-)^{k-1}\prod_{j=1}^{k} e^{i\theta(v_i-v_j)}.$$

Прологорифмировав, получим

$$Np(v_i)=2\pi I_i+\sum_{j=1}^{k}\theta(v_i-v_j),$$

где I_i — целое либо полуцелое в зависимости от четности k. Условие 2) мы можем теперь уточнить:

2') В основном состоянии все I_i образуют набор последовательных целых при нечетных k и полуцелых при четных k чисел.

В этом виде утверждение, по-видимому, верно не только в термодинамическом пределе. При малых k можно также показать, что

2a) Наибольшее собственное значение трансфер-матрицы в секторе с данным S^z достигается при симметричном распределении I_i (и v_i) вокруг нуля.

Имеем для основного состояния

$$p(v_{i+1}) - p(v_i) = 2\pi + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}(\theta(v_{i+1}-v_j) - \theta(v_i - v_j)).$$

В пределе $N \to \infty$ имеем

$$p'(v) = 2\pi\rho(v) + \int_{-v_1}^{v_1} dv'\, \theta'(v-v')\rho(v') \tag{32}$$

или

$$\rho(v) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin\lambda}{\operatorname{ch} 2v - \cos\lambda} - \int_{-v_1}^{v_1}\frac{dv'}{\pi}\,\frac{\sin 2\lambda}{\operatorname{ch} 2(v-v') - \cos 2\lambda}\,\rho(v'), \tag{32$'$}$$

где $p'(v)$, $\theta'(v)$ — производные от $p(v)$, $\theta(v)$ по v, а $\rho(v) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N(v_{i+1}-v_i)}$ — плотность корней вблизи точки v, которая и будет неизвестной функцией в этом уравнении. Интервал $[a, b]$ определяется из условия минимума энергии и условия

$$\int_{-v_1}^{v_1} dv\rho(v) = \frac{k}{N}. \tag{33}$$

В пределе $N \to \infty$ можно ожидать, что одно из слагаемых в (28) много больше другого, поэтому

$$\begin{aligned}\log\kappa(u) \equiv \lim_{N\to\infty}\frac{\log\Lambda(u)}{N} = \max\Bigg(&\log a(u) + \int_{-v_1}^{v_1} dv\,\rho(v)\log\frac{a(iv-u+\lambda/2)}{b(iv-u+\lambda/2)},\\ &\log b(u) + \int_{-v_1}^{v_1} dv\,\rho(v)\log\frac{a(u-iv-\lambda/2)}{b(u-iv-\lambda/2)}\Bigg).\end{aligned} \tag{34}$$

Уравнение (32) нетрудно решить методом Фурье при $v_1 = \infty$. Положим

$$\rho(v) = \int dk\,\rho_k e^{ikv}, \qquad p'(v) = \int dk\, p_k e^{ikv}, \qquad \theta'(v) = \int dk\,\theta_k e^{ikv}. \tag{35}$$

Тогда

$$\rho_k = \frac{p_k}{2\pi} - \theta_k\rho_k,$$

т. е.

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi}\frac{p_k}{1+\theta_k}.$$

Нетрудно проверить, что

$$p_k = \frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2}(\pi-\lambda)k}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}\pi k}, \qquad \theta_k = \frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2}(\pi-2\lambda)k}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}\pi k}.$$

Отсюда получаем

$$\rho_k = \frac{1}{4\pi\operatorname{ch}\frac{1}{2}\lambda k}. \tag{36}$$

Очевидно

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv\,\rho(v) = 2\pi\rho_0 = \frac{1}{2},$$

а значит $k = N/2$ и $S^z = 0$ (конечно, с точностью до членов порядка 1). Таким образом, это решение соответствует основному состоянию системы.

Учитывая, что

$$\int \frac{dv}{2\pi}\, e^{-ikv} \log\left|\frac{\sin(\lambda - iv + w)}{\sin(iv - w)}\right| = \frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2}(\lambda+2w)k \operatorname{sh}\frac{1}{2}(\pi-\lambda)k}{k \operatorname{sh}\frac{1}{2}\pi k},$$

можно убедится, что оба значения под знаком максимума в (34) совпадают и дают

$$\begin{aligned}\log\kappa(u) &= \log a(u) + \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \frac{\operatorname{sh} uk \operatorname{sh}\frac{\pi-\lambda}{2}k}{2k\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}k\operatorname{ch}\frac{\lambda}{2}k} \\ &= \log b(u) + \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \frac{\operatorname{sh}(\lambda-u)k \operatorname{sh}\frac{\pi-\lambda}{2}k}{2k\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}k\operatorname{ch}\frac{\lambda}{2}k}.\end{aligned} \tag{37}$$

В случае $\Delta < -1$ синусы заменяются на гиперболические синусы и функции $p'(v)$ и $\theta'(v)$ оказываются периодическими по v с периодом π. Это значит, что интеграл Фурье в (35) заменяется на ряд Фурье. Поэтому окончательная формула для свободной энергии имеет вид ряда

$$\begin{aligned}\log\kappa(u) &= \log a(u) + u + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda m}\operatorname{sh} 2um}{m\operatorname{ch}\lambda m} \\ &= \log b(u) + \lambda - u + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda m}\operatorname{sh} 2(\lambda-u)m}{m\operatorname{ch}\lambda m}.\end{aligned} \tag{38}$$

Задача 1. *Используя свойства R-матрицы (14) и предположение об аналитичности $\kappa(u)$ в интервале $[-\lambda,\lambda]$, показать, что*

$$\kappa(\lambda-u) = \kappa(u), \qquad \kappa(u)\kappa(-u) = a(u)a(-u).$$

Показать, что (37), (38) дают единственное решение этих уравнений, не имеющее особенностей при $-\lambda < \operatorname{Re} u < \lambda$.

Задача 2. *Доказать соотношения (26) по индукции по k.*

Задача 3. *Покажите, что анзатц Бете (29) можно получить из формулы для собственных значений (28) и требования аналитичности собственного значения как функции u.*