Лекция 14
Устранение расходимостей в квантовой электродинамике

Рассмотрим сначала поправки к фотонному пропагатору. Удобно написать

$$(D^{-1})^{\mu\nu}(k) = ig^{\mu\nu}(k^2 + i0) - i\Pi^{\mu\nu}(k), \tag{1}$$

где $\Pi^{\mu\nu}(k) = -i\Gamma^{\mu\nu}(k)$ — *поляризационный оператор.* Заметим, что из классического закона сохранения заряда $\partial_\mu j^\mu = 0$ имеем

$$(p-q)_\mu \cdot \bar\psi_q \gamma^\mu \psi_p = 0.$$

Поскольку функции Грина свободной теории представляют собой линейные комбинации классических решений, это значит, что для фермионной петли

$$I^{\mu_1\cdots\mu_n}(k_1,\ldots,k_n) = -\int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\,\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}G(k_1-k_2+q)\ldots\gamma^{\mu_n}G(k_n-k_1+q))$$

имеем

$$k_{i,\mu_i}I^{\mu_1\cdots\mu_n}(k_1,\ldots,k_n) = 0.$$

Отсюда следует, что петлевые поправки в $(D^{-1})^{\mu\nu}$ строго поперечны:

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = k_\mu \Pi^{\nu\mu}(k) = 0$$

и

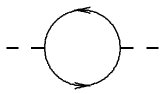
$$\Pi^{\mu\nu}(k) = \Pi(k^2)\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right). \tag{2}$$

Обратно

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\Pi^{\mu\nu}(k). \tag{3}$$

Давайте теперь вычислим вклад первого порядка по e^2:

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = \Pi^{\mu\nu}_{(1)}(k) + \Pi^{\mu\nu}_{(2)}(k),$$

$i\Pi^{\mu\nu}_{(1)}(k) =$ 

$$= -(-i\mu^{(4-D)/2}e)^2 \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\,\frac{i^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu(\hat p + m)\gamma^\nu(\hat p + \hat k + m))}{(p^2 - m^2 + i0)((p+k)^2 - m^2 + i0)}.$$

$$= -\mu^{4-D}e^2\int_0^1 dx\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\,\frac{\mathrm{tr}(\gamma^\mu(\hat p + m)\gamma^\nu(\hat p + \hat k + m))}{(p^2x + (p+k)^2(1-x) - m^2 + i0)^2},$$

$i\Pi^{\mu\nu}_{(2)}(k) =$ 

$$= -i(Z_A - 1)(g^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu) - i(Z_A Z_\lambda^{-1} - 1)\lambda^{-1}k^\mu k^\nu.$$

Из (2) заключаем, что

$$Z_\lambda = Z_A,$$

т. е. перенормировка не меняет члена, фиксирующего калибровку.

Рассмотрим теперь первое слагаемое. Заменой

$$p \to p - kx$$

приводим интеграл к виду

$$i\Pi^{\mu\nu}_{(1)}(k) = -\mu^{4-D}e^2\int_0^1 dx\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\,\frac{\mathrm{tr}(\gamma^\mu(\hat p + \hat k(1-x) - m)\gamma^\nu(\hat p - \hat k x - m))}{(p^2 + k^2x(1-x) - m^2 + i0)^2}$$

$$= -\mu^{4-D}e^2\int_0^1 dx\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\,\frac{\mathrm{tr}(\gamma^\mu\hat p\gamma^\nu\hat p) - x(1-x)\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\hat k\gamma^\nu\hat k) + m^2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)}{(p^2 + k^2x(1-x) - m^2 + i0)^2}$$

Учитывая тождество
$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu \hat{p}\gamma^\nu \hat{p}) = 2^{D/2}(2p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu}p^2)$$
находим
$$i\Pi^{\mu\nu}_{(1)}(k) = 2^{D/2+1}\mu^{4-D}e^2 k^\mu k^\nu \int_0^1 dx \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{x(1-x)}{(p^2+k^2x(1-x)-m^2+i0)^2}$$
$$+ \text{ члены, пропорциональные } g^{\mu\nu}.$$

Используя тождество (2) мы сможем легко восстановить остальные члены:
$$i\Pi_{(1)}(k^2) = -2^{D/2+1}\mu^{4-D}e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{x(1-x)}{(p^2+k^2x(1-x)-m^2+i0)^2}.$$

С помощью формул из Лекции 6 находим
$$\Pi(k^2) = -k^2 \frac{2^{(D-4)/2}e^2}{2\pi^2}\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{(D-4)/2}\Gamma\left(\frac{4-D}{2}\right)\int_0^1 dx\, x(1-x)\left(1-x(1-x)\frac{k^2}{m^2}\right)^{(D-4)/2}$$
$$-(Z_A-1)k^2.$$

Подставляя $D = 4-2\varepsilon$, $\varepsilon \to 0$, получим
$$\frac{\Pi(k^2)}{k^2} = -\frac{e^2}{12\pi^2\varepsilon} - (Z_A-1) + \frac{e^2}{12\pi^2}\left(\log\frac{m^2}{2\pi\mu^2} + \mathbf{C}\right) + \frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^1 dx\, x(1-x)\log\left(1-x(1-x)\frac{k^2}{m^2}\right). \quad (4)$$

Рассмотрим простейшее условие перенормировки: пропагатор ведет себя как свободный при $k^2 \to 0$, т. е.
$$\frac{\Pi(k^2)}{k^2} \to 0 \quad \text{при} \quad k^2 \to 0. \quad (5)$$

Тогда мы получим
$$Z_A = Z_\alpha^{-1} = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2\varepsilon} + \frac{e^2}{12\pi^2}\left(\log\frac{m^2}{2\pi\mu^2} + \mathbf{C}\right), \quad (6)$$
$$\frac{\Pi(k^2)}{k^2} = \frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^1 dx\, x(1-x)\log\left(1-x(1-x)\frac{k^2}{m^2}\right)$$
$$= -\frac{e^2}{60\pi^2}\frac{k^2}{m^2} + O(k^4). \quad (7)$$

Замечание. *При переходе в координатное пространство это дает поправку к закону Кулона (см. Берестецкий, Лифшиц, Питаевский):*
$$\varphi(r) \sim \frac{1}{4\pi r}\left(1 + \frac{e^2}{16\pi^{3/2}}\frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}}\right), \qquad r \gg m^{-1}.$$

Рассмотрим другое условие перенормировки. Пусть
$$\Pi(-M^2) = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим случай $M^2 \gg m^2$, когда
$$\int_0^1 dx\, x(1-x)\log\left(1+x(1-x)\frac{M^2}{m^2}\right) \simeq -\frac{5}{18} + \frac{1}{6}\log\frac{M^2}{m^2}.$$

В этом случае

$$Z_A = Z_\alpha^{-1} = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2\varepsilon} + \frac{e^2}{12\pi^2}\left(\log\frac{M^2}{2\pi\mu^2} + \mathbf{C} - \frac{5}{3}\right), \tag{9}$$

$$\frac{\Pi(k^2)}{k^2} = \frac{e^2}{12\pi^2}\log\frac{-k^2 - i0}{M^2}, \qquad |k^2| \gg m^2. \tag{10}$$

Из (9) получаем

$$e_0^2 = e^2 - \frac{e^4}{12\pi^2}\left(-\frac{1}{\varepsilon} + \mathbf{C} - \frac{5}{3} + \log\frac{M^2}{2\pi\mu^2}\right).$$

Левая часть не зависит от точки перенормировки M^2. Дифференцируя уравнение по $\log M^2$ и сохраняя лишь главные вклады, получим уравнение Гелл-Манна–Лоу:

$$\frac{de^2}{d\log M^2} = \frac{e^4}{12\pi^2}. \tag{11}$$

Решая это уравнение, находим

$$e^2(M^2) = \frac{e^2(M'^2)}{1 - \frac{e^2(M'^2)}{12\pi^2}\log\frac{M^2}{M'^2}}, \qquad M^2, M'^2 \gg m^2. \tag{12}$$

Кроме того, ясно, что решение (12) верно только когда второе слагаемое в знаменателе меньше первого:

$$M^2 \ll M'^2 e^{12\pi^2/e^2(M'^2)}.$$

Решение (12) можно напрямую использовать для вычисления асимптотики пропагатора фотона при $|k^2| \gg m^2$. Действительно, рассмотрим пропагатор в калибровке Ландау

$$D_{\mu\nu}(k) = D(k^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)$$

с условием перенормировки (5). Обозначим через $D(k^2, M^2)$ скалярный множитель такого же пропагатора с условием (8). Тогда

$$Z_A D(k^2) = Z_A(M^2) D(k^2, M^2)$$

— неперенормированный пропагатор. Отсюда

$$D(k^2) = \frac{Z_A(M^2)}{Z_A} D(k^2, M^2) = \frac{Z_\alpha}{Z_\alpha(M^2)} D(k^2, M^2) = \frac{e^2(M^2)}{e^2} D(k^2, M^2).$$

Положив $M^2 = -k^2$ и учтя, что $D(k^2, -k^2) = 1$, получаем

$$D(k^2) = \frac{e^2(-k^2)}{e^2}. \tag{13}$$

При M^2 сравнимом с m^2 правая часть (11) изменится, в частности, будет зависеть явно от M^2/m^2. Тем не менее, можно не выписывать точное решение точного уравнения, а предположить, что на масштабах от 0 до m^2 константа $e^2(M^2)$ изменяется незначительно и примерно равно e^2, а на больших масштабах применимо уравнение (11). Тогда

$$D(k^2) \simeq -\frac{i}{k^2}\frac{1}{1 - \frac{e^2}{12\pi^2}\log\frac{|k^2|}{Cm^2}}, \qquad |k^2| \gg m^2, \tag{14}$$

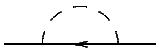
где C — численная константа порядка единицы. Поскольку при больших M^2 величина $e(M^2)$ зависит по сути только от $|M^2|$, то (14) верно не только при отрицательных k^2, но и при любых больших по модулю k^2.

Рассмотрим теперь обратный пропагатор электрона:

$$G^{-1}(p) = -i(\hat{p} - m - \Sigma(\hat{p})), \tag{15}$$

где $\Sigma(\hat{p}) = i\Gamma(p)$ — *собственно-энергетическая (массовая) часть.* Имеем

$$\Sigma(\hat{p}) = \Sigma_{(1)}(\hat{p}) + \Sigma_{(2)}(\hat{p}),$$

$-i\Sigma_{(1)}(\hat{p}) =$  $= (-i\mu^{(4-D)/2}e)^2 \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{(-i)i\gamma^\mu(\hat{p}-\hat{k}+m)\gamma_\mu}{(k^2+i0)((p-k)^2-m^2+i0)}$

$$= -\mu^{4-D}e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\mu(\hat{p}-\hat{k}+m)\gamma_\mu}{(k^2x+(p-k)^2(1-x)-m^2+i0)^2},$$

$-i\Sigma_{(2)}(\hat{p}) =$  $= i(Z_\psi - 1)\hat{p} - i(Z_\psi Z_m - 1)m.$

Рассмотрим первый член. Заменой $k \to k + px$, получим

$$\begin{aligned}-i\Sigma_{(1)}(\hat{p}) &= -\mu^{4-D}e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\mu(\hat{p}(1-x)-\hat{k}+m)\gamma_\mu}{(k^2-m^2x+p^2x(1-x)+i0)^2} \\ &= -\mu^{4-D}e^2 \int_0^1 dx\, \gamma^\mu(\hat{p}(1-x)+m)\gamma_\mu \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2-m^2x+p^2x(1-x)+i0)^2}\end{aligned}$$

Применяя те же формулы, что и в предыдущем случае, и учитывая, что

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = D, \qquad \gamma^\mu\hat{p}\gamma_\mu = (2-D)\hat{p},$$

найдем

$$\Sigma_{(1)}(\hat{p}) = -\frac{ie^2}{16\pi^2}\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{(D-4)/2} \Gamma\left(\frac{4-D}{2}\right) \int_0^1 dx\,((2-D)\hat{p}(1-x)+Dm)\left(x - x(1-x)\frac{p^2}{m^2}\right)^{(D-4)/2}.$$

Раскладывая вблизи $D = 4$, находим

$$\begin{aligned}\Sigma(\hat{p}) = &-\frac{e^2(\hat{p}-4m)}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \log\frac{m^2}{4\pi\mu^2} - \mathbf{C}\right) \\ &+ \frac{e^2}{16\pi^2}\left(\hat{p} - 2m + 2\int_0^1 dx\,(\hat{p}(1-x)-2m)\log\left(x - x(1-x)\frac{p^2}{m^2}\right)\right) \\ &- (Z_\psi - 1)\hat{p} + (Z_\psi Z_m - 1)m.\end{aligned} \tag{16}$$

Введем теперь условие перенормировки:

$$\Sigma(\hat{p}) = \Sigma'(\hat{p}) = 0 \quad \text{при} \quad \hat{p} = \tilde{m}. \tag{17}$$

Здесь за точку перенормировки принято некоторое значение $\tilde{m}$, вообще говоря, отличное от m. Тогда

$$\begin{aligned}Z_\psi - 1 = &-\frac{e^2}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \log\frac{m^2}{4\pi\mu^2} - \mathbf{C}\right) \\ &+ \frac{e^2}{16\pi^2}\left(1 + 2\int_0^1 dx\,\log\left(x - x(1-x)\frac{\tilde{m}^2}{m^2}\right) - 4\int_0^1 dx\,\frac{\tilde{m}(\tilde{m}(1-x)-2m)(1-x)}{m^2-(1-x)\tilde{m}^2}\right),\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}(Z_\psi - 1)\tilde{m} - (Z_\psi Z_m - 1)m = 1 &- \frac{e^2(\tilde{m}-4m)}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \log\frac{m^2}{4\pi\mu^2} - \mathbf{C}\right) \\ &+ \frac{e^2}{16\pi^2}\left(\tilde{m} - 2m + 2\int_0^1 dx\,(\tilde{m}(1-x)-2m)\log\left(x - x(1-x)\frac{\tilde{m}^2}{m^2}\right)\right),\end{aligned} \tag{19}$$

Обратим внимание на то, что второй интеграл в (18) *расходится* на массовой поверхности, т. е. при $\tilde{m} = m$. Это говорит о невозможности получить конечное значение для $G(p)$ при условии перенормировки (17) с $\tilde{m} = m$. Это пример *инфракрасной расходимости*, возникающей от безмассовости фотона. На самом деле инфракрасные расходимости сокращаются во всех физически осмысленных сечениях рассеяния (но не амплитудах!). В следующий раз мы увидим, что это связано с испусканием мягких фотонов во всех процессах рассеяния. Отметим также, что более аккуратный ренормгрупповой анализ показывает, что на самом деле

$$G(p) \sim (p^2 - m^2)^{-1+\frac{e^2}{4\pi^2}(3-\lambda)},$$

т. е. полюс заменяется на точку ветвления.