Лекция 20
Конформные семейства и конформные блоки

Пусть $\{\phi_I(x)\}$ — полный базис локальных полей в теории. Обычно предполагается, что произведение двух полей $\phi_I(x')\phi_J(x)$ можно разложить по этому базису:

$$\phi_I(x')\phi_J(x) = \sum_K C^K_{IJ}(x', x)\phi_c(x). \tag{1}$$

Функции $C^K_{IJ}(x', x)$ называются *структурными функциями.* В случае конформной теории поля и базиса, состоящего из полей фиксированных размерностей, имеем

$$\phi_I(z', \bar z')\phi_J(z, \bar z) = \sum_K (z' - z)^{\Delta_K - \Delta_I - \Delta_J}(\bar z' - \bar z)^{\bar\Delta_K - \bar\Delta_I - \bar\Delta_J} C^K_{IJ}\phi_K(x). \tag{2}$$

Теперь операторная алгебра описывается *структурными константами* C^K_{IJ}.

Структурные функции тесно связаны с корреляционными функциями в системе. Начнем с двухточечной корреляционной функции. Она просто выражается через одноточечные.

$$\langle\phi_I(x_1)\phi_J(x_2)\rangle = \sum_K C^K_{IJ}(x_1, x_2)\langle\phi_K(x)\rangle.$$

В конформной теории поля ненулевое вакуумное среднее на плоскости может иметь только поле конформной размерности 0. Предположим, что такое поле единственно и представляет собой единичное поле **1**. Поэтому в этом случае имеем

$$\langle\phi_I(x_1)\phi_J(x_2)\rangle = \frac{C^{\mathbf 1}_{IJ}}{z_{12}^{\Delta_I + \Delta_J}\bar z_{12}^{\bar\Delta_I + \bar\Delta_J}}, \qquad x_{12} = x_1 - x_2.$$

Трехточечная корреляционная функция равна

$$\langle\phi_I(x_1)\phi_J(x_2)\phi_K(x_3)\rangle = \sum_M \frac{C^{\mathbf 1}_{IM}C^M_{JK}}{z_{13}^{\Delta_I + \Delta_M} z_{23}^{\Delta_J + \Delta_K - \Delta_M}\bar z_{13}^{\bar\Delta_I + \bar\Delta_M}\bar z_{23}^{\bar\Delta_J + \bar\Delta_K - \bar\Delta_M}}.$$

Здесь мы сначала «слили» поля ϕ_J и ϕ_K и разложили результат по полям ϕ_M, а затем слили ϕ_I с ϕ_M. Мы могли бы сливать поля в другом порядке, например, сначала ϕ_I с ϕ_J, а потом ϕ_K, и получили бы другое выражение. Условие согласованности операторных разложений состоит в том, что все такие слияния должны дать один и тот же результат. Наиболее общее условие слияния получается при рассмотрении четырехточечных функций, но прежде чем их рассматривать, давайте воспользуемся тем, что мы знаем о конформной симметрии в двумерном пространстве, чтобы переписать разложение (2) более детально.

Мы уже знаем, что поля в конформной теории классифицируются представлениями двух копий алгебры Вирасоро. Поэтому естественно попробовать разбить сумму в сумму по *конформным семействам.* Пусть $\{\phi_i(x)\}$ — совокупность первичных полей в теории.[1] *Потомками* или *вторичными полями* мы будем называть операторы, получаемые действием генераторов алгебры Вирасоро на первичные поля, то есть линейные комбинации операторов вида

$$(\mathcal L_{-n_1}\ldots\mathcal L_{-n_k}\bar{\mathcal L}_{-m_1}\ldots\bar{\mathcal L}_{-m_l}\phi_i)(x),$$

Здесь $\mathcal L_n$ определены равенством

$$(\mathcal L_n\phi)(z) = \oint_{C_z}\frac{dw}{2\pi\mathrm i}(w - z)^{n+1}T(w)\phi(z). \tag{3}$$

Операторы $\bar{\mathcal L}_n$ определяются аналогично.

[1]Все первичные поля не образуют пространства. Пространство образуют только первичные поля данной размерности. Указанное множество представляет собой объединение базисов этих пространств.

Пространство всех потомков поля $\phi_i(x)$ мы будем называть его конформным семейством $[\phi_i]$. Тогда произведение первичных полей можно разложить так

$$\phi_i(z',\bar{z}')\phi_j(z,\bar{z}) = \sum_k (z'-z)^{\Delta_k-\Delta_i-\Delta_j}(\bar{z}'-\bar{z})^{\bar{\Delta}_k-\bar{\Delta}_i-\bar{\Delta}_j} C_{ij}^k (\mathcal{L}_{ij}^k(z'-z)\bar{\mathcal{L}}_{ij}^k(\bar{z}'-\bar{z})\phi_k)(z,\bar{z}), \tag{4}$$

где $L_{ij}^k(z)$ — операторы, действующие на пространстве операторов, имеющие вид разложения по степеням z:

$$\mathcal{L}_{ij}^k(z) = 1 + z\beta_{ij}^k(1)\mathcal{L}_{-1} + z^2\Big(\beta_{ij}^k(2)\mathcal{L}_{-2} + \beta_{ij}^k(1,1)\mathcal{L}_{-1}^2\Big) + O(z^3). \tag{5}$$

Аналогично определяются операторы $\bar{\mathcal{L}}_{ij}^k(\bar{z})$.

Важный факт состоит в том, что коэффициенты $\beta_{ij}^k(n_1,\dots,n_\kappa)$ однозначно определяются конформной симметрией. Давайте убедимся в этом на примере первых нескольких коэффициентов. Для этого поместим разложение (4) в точку 0 и подействуем на вакуум. Тогда получим

$$\phi_i(z,\bar{z})|j\rangle = \sum_k C_{ij}^k L_{ij}^k(z)\bar{L}_{ij}^k(\bar{z})|k\rangle. \tag{6}$$

Здесь $|i\rangle = \phi_i(0,0)|0\rangle$, а операторы $L_{ij}^k(z)$, $\bar{L}_{ij}^k$ определяются через L_n, $\bar{L}_n$ так же, как $\mathcal{L}_{ij}^k(z)$ через $\mathcal{L}_n$.

Поскольку операторы L_m и $\bar{L}_n$ коммутируют, мы можем временно забыть о существовании $\bar{L}_n$ и вообще координаты $\bar{z}$ и написать условно

$$\begin{aligned}\phi_i(z)|j\rangle &= CL(z)|k\rangle + \cdots \\ &= \Big(1 + z\beta(1)L_{-1} + z^2\Big(\beta(2)L_{-2} + \beta(1,1)L_{-1}^2\Big) + O(z^3)\Big)|k\rangle + \cdots.\end{aligned}$$

Для компактности мы также опустили все индексы i, j, k. Подействуем справа на это уравнение операторами L_1 и L_2 (напомню, что они порождают весь набор L_n, $n>0$):

$$\begin{aligned}L_1\phi_i(z)|j\rangle &= \Big(2z\Delta_k\beta(1) + z^2\Big(3\beta(2) + 2(2\Delta_k+1)\beta(1,1)\Big)L_{-1} + O(z^3)\Big)|k\rangle + \cdots, \\ L_2\phi_i(z)|j\rangle &= \Big(z^2\Big((4\Delta_k + c/2)\beta(2) + 6\Delta_k\beta(1,1)\Big) + O(z^3)\Big)|k\rangle + \cdots.\end{aligned} \tag{7}$$

С другой стороны, к левым частям этих уравнений можно применить коммутационные соотношений, приведенные в предыдущей лекции, а потом снова разложить согласно (6):

$$\begin{aligned}L_1\phi_i(z)|j\rangle &= (z^2\partial + 2z\Delta_i)\phi_i(z)|j\rangle \\ &= (z^2\partial + 2z\Delta_i)z^{-\Delta_{ij}^k}\Big(1 + z\beta(1)L_{-1} + z^2\Big(\beta(2)L_{-2} + \beta(1,1)L_{-1}^2\Big) + O(z^3)\Big)|k\rangle + \cdots \\ &= z^{-\Delta_{ij}^k}\Big(z\Delta_{ik}^j + z^2(\Delta_{ik}^j + 1)\beta(1)L_{-1} + O(z^3)\Big)|k\rangle + \cdots, \\ L_2\phi_i(z)|j\rangle &= (z^3\partial + 3z^2\Delta_i)\phi_i(z)|j\rangle \\ &= (z^3\partial + 3z^2\Delta_i)z^{-\Delta_{ij}^k}\Big(1 + z\beta(1)L_{-1} + z^2\Big(\beta(2)L_{-2} + \beta(1,1)L_{-1}^2\Big) + O(z^3)\Big)|k\rangle + \cdots \\ &= z^{-\Delta_{ij}^k}(z^2(\Delta_i + \Delta_{ik}^j) + O(z^3))|k\rangle + \cdots.\end{aligned} \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (8), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}2\Delta_k\beta(1) &= \Delta_{ik}^j, \\ 3\beta(2) + 2(2\Delta_k+1)\beta(1,1) &= (\Delta_{ik}^j + 1)\beta(1), \\ (4\Delta_k + c/2)\beta(2) + 6\Delta_k\beta(1,1) &= 2\Delta_i + \Delta_k - \Delta_j.\end{aligned} \tag{9}$$

Первое уравнение имеет очевидное решение

$$\beta(1) = \frac{\Delta_{ik}^j}{2\Delta_k} = \frac{1}{2} + \frac{\Delta_i - \Delta_j}{2\Delta_k},$$

конечное при всех Δ_k, кроме $\Delta_k = 0$. Но при $\Delta_k = 0$ структурные константы отличны от нуля только при $\Delta_i = \Delta_j$, поэтому $\beta(1) = 1/2$. Кроме того, при $\Delta_k = 0$ норма вектора $L_{-1}|k\rangle$ стремится к нулю и вклад этого слагаемого в корреляционные функции исчезает.

Левая часть двух оставшихся уравнений в точности совпадает с левой частью уравнений для нуль-вектора второго уровня, рассмотренных в предыдущей лекции. Это значит, что уравнения решаются однозначно для всех значений Δ_k, кроме Δ_{12} и Δ_{21}, при которых имеется нуль-вектор. При этом в этих точках с формально бесконечным коэффициентом входит именно нуль-вектор. Таким образом, корреляционные функции опять будут конечными.

Итак, мы установили, что в точках общего положения первые три коэффициента $\beta^k_{ij}(.)$ однозначно определяются конформной симметрией, на в вырожденных точках по Δ_k неоднозначность связана с нуль-вектором и несущественна для корреляционных функций. Есть итерационная процедура, предложенная Ал. Замолодчиковым, позволяющая не только доказать, что все коэффициенты $\beta^k_{ij}(.)$ однозначно определяются конформной симметрией, но и эффективно вычислять эти коэффициенты численно.

Вернемся к корреляционным функциям. Самосогласованность теории требует, чтобы

$$\langle L_1\phi_i(x)\phi_j(0)\rangle = \langle \bar L_1\phi_i(x)\phi_j(0)\rangle = 0.$$

Используя коммутационное соотношение, находим

$$\begin{aligned}0 = \langle L_1\phi_i(x)\phi_j(0)\rangle = \langle L_1\phi_i(x)|j\rangle &= (z^2\partial + 2z\Delta_i)\langle\phi_i(x)|j\rangle \\ &= z(-(\Delta_i+\Delta_j)+2\Delta_i)\langle\phi_i(x)|j\rangle = z(\Delta_i-\Delta_j)\langle\phi_i(x)\phi_j(0)\rangle.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что парная корреляционная функция обращается в нуль, если $\Delta_i \neq \Delta_j$:

$$\langle\phi_i(x_1)\phi_j(x_2)\rangle = \begin{cases} \frac{C^{\mathbf{1}}_{ij}}{(z_1-z_2)^{2\Delta_i}(\bar z_1-\bar z_2)^{2\bar\Delta_i}}, & \text{если } \Delta_i=\Delta_j,\ \bar\Delta_i=\bar\Delta_j, \\ 0, & \text{если } \Delta_i\neq\Delta_j \text{ или } \bar\Delta_i\neq\bar\Delta_j. \end{cases} \tag{10}$$

Матрицу $C^{\mathbf{1}}_{ij}$ можно рассматривать как метрику в пространстве первичных полей. При желании ее можно подходящим преобразованием полей одной размерности диагонализовать и даже сделать единичной матрицей. Это просто зафиксирует нормировку полей.

Рассмотрим теперь трехточечную корреляционную функцию:

$$\begin{aligned}\langle\phi_i(x_1)\phi_j(x_2)\phi_k(x_3)\rangle &= \sum_m \frac{C^m_{jk}\langle\phi_i(x_1)(\mathcal{L}^m_{jk}z_{23}\bar{\mathcal{L}}^m_{jk}\bar z_{23}\phi_m)(x_3)\rangle}{z_{23}^{\Delta_j+\Delta_k-\Delta_m}\bar z_{23}^{\bar\Delta_j+\bar\Delta_k-\bar\Delta_m}} \\ &= \sum_m \frac{C^m_{jk}\langle\phi_i(x_1)\phi_m(x_3)\rangle + O\left(\left|\frac{z_{23}}{z_{13}}\right|\right)}{z_{23}^{\Delta_j+\Delta_k-\Delta_m}\bar z_{23}^{\bar\Delta_j+\bar\Delta_k-\bar\Delta_m}} \\ &= \frac{\sum'_m C^{\mathbf{1}}_{im}C^m_{jk} + O\left(\left|\frac{z_{23}}{z_{13}}\right|\right)}{z_{13}^{2\Delta_i}\bar z_{13}^{2\bar\Delta_i}z_{23}^{\Delta_j+\Delta_k-\Delta_m}\bar z_{23}^{\bar\Delta_j+\bar\Delta_k-\bar\Delta_m}}.\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $\sum'_m$ означает сумму по семействам m с теми же конформными размерностями, что и семейство i. При этом мы, по сути, считали, что $|z_1-z_3| \gg |z_2-z_3|$. Это значит, что по z_2-z_3 мы нашли самый сингулярный член. Это позволяет найти явный вид трехточечных функций.

Пусть

$$C_{ijk} = \sum_m{}' C^{\mathbf{1}}_{im}C^m_{ji}. \tag{12}$$

Тогда трехточечная функция имеет вид

$$\langle\phi_i(x_1)\phi_j(x_2)\phi_k(x_3)\rangle = \frac{C_{ijk}}{z_{ij}^{\Delta^k_{ij}}\bar z_{ij}^{\bar\Delta^k_{ij}}z_{ik}^{\Delta^j_{ik}}\bar z_{ik}^{\bar\Delta^j_{ik}}z_{jk}^{\Delta^i_{jk}}\bar z_{jk}^{\bar\Delta^i_{jk}}}, \tag{13}$$

где

$$\Delta^k_{ij} = \Delta_i+\Delta_j-\Delta_k, \qquad \bar\Delta^k_{ij} = \bar\Delta_i+\bar\Delta_j-\bar\Delta_k.$$

В пределе $|z_1 - z_3| \gg |z_2 - z_3|$ выражение (13) переходит в лидирующий член в последней строчке (11).

Рассмотрим теперь четырехточечные функции. Если у нас есть четыре комплексные переменные $z_1, \ldots, z_4$, мы можем ввести переменную

$$w = \frac{(z_4 - z_3)(z_2 - z_1)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}, \tag{14}$$

называемую *двойным отношением*. Пусть $z_3 = z$. Тогда двойное отношение определяет конформное дробно-линейное преобразование от переменной z к w:

$$w(z) = \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_2} \cdot \frac{z_4 - z}{z - z_1}.$$

Заметим, что $w(z_1) = \infty$, $w(z_3) = 1$, $w(z_4) = 0$, то есть это преобразование переводит любые три точки z_1, z_3, z_4 в $0, 1, \infty$. Применим это преобразование к четырехточечной корреляционной функции

$$\langle \phi_i(x_1)\phi_j(x_2)\phi_k(x_3)\phi_l(x_4)\rangle$$

в функцию

$$\langle \phi_i(\infty,\infty)\phi_j(1,1)\phi_k(w,\bar{w})\phi_l(0,0)\rangle = \langle i|\phi_j(1,1)\phi_k(w,\bar{w})|l\rangle.$$

Здесь под $\phi_i(\infty)$ понимается предел

$$\phi_i(\infty,\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z\to\infty} z^{2\Delta_i}\bar{z}^{2\bar{\Delta}_i}\phi_i(z,\bar{z})\rangle.$$

Будем исследовать эту последнюю функцию. Давайте получим разложение вблизи точки $w = 0$:

$$\langle i|\phi_j(1,1)\phi_k(w,\bar{w})|l\rangle = \sum_m \frac{C_{kl}^m}{w^{\Delta_{kl}^m}\bar{w}^{\bar{\Delta}_{kl}^m}} \langle i|\phi_j(1,1)L_{kl}^m(w)\bar{L}_{kl}^m(\bar{w})|m\rangle.$$

Очевидно, что $\langle i|L_{kl}^m(w)\bar{L}_{kl}^m(\bar{w}) = \langle i|$. В силу коммутационных соотношений операторов $L_n, \bar{L}_n$ с первичными операторами коммутаторы $L_{kl}^m(w)$ и $\bar{L}_{kl}^m(\bar{w})$ дают дифференциальные операторы $D_{jkl}^m(w,z)$ и $\bar{D}_{jkl}^m(\bar{w},\bar{z})$:

$$\begin{aligned} \phi_j(z,\bar{z})L_{kl}^m(w) &= D_{jkl}^m(w,z)\phi_j(z,\bar{z}) + \sum_{n=1}^{\infty} L_{-n}(\ldots), \\ \phi_j(z,\bar{z})\bar{L}_{kl}^m(w) &= \bar{D}_{jkl}^m(\bar{w},\bar{z})\phi_j(z,\bar{z}) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{L}_{-n}(\ldots). \end{aligned} \tag{15}$$

Выражения, обозначенные многоточиями в скобках, нас не интересуют, поскольку убивают состояние $\langle i|$. В первых порядках по степеням w получаем

$$\begin{aligned} D_{jkl}^m(w,z) = 1 &- w\beta_{kl}^m(1)(z^2\partial_z + 2\Delta_j z) \\ &- w^2\Big(\beta_{kl}^m(2)(z^3\partial_z + 3\Delta_j z^2) - \beta_{kl}^m(1,1)(z^2\partial_z + 2\Delta_j z)^2\Big) + O(w^3). \end{aligned} \tag{16}$$

Очевидно, что $D_{jkl}^m(w,z)$ представляет собой дифференциальный оператор по z, а $\bar{D}_{jkl}^m(\bar{w},\bar{z})$ — по $\bar{z}$. Также очевидно, что они коммутируют:

$$[D_{jkl}^m(w,z), \bar{D}_{jkl}^m(\bar{w},\bar{z})] = 0. \tag{17}$$

Подставляя (15), получаем

$$\begin{aligned} \langle i|\phi_j(1,1)\phi_k(w,\bar{w})|l\rangle &= \sum_m \frac{C_{kl}^m}{w^{\Delta_{kl}^m}\bar{w}^{\bar{\Delta}_{kl}^m}}\ D_{jkl}^m(w,z)\bar{D}_{jkl}^m(\bar{w},\bar{z})\langle i|\phi_j(z,\bar{z})|m\rangle\big|_{z=\bar{z}=1} \\ &= \sum_m \frac{C_{ijm}C_{kl}^m}{w^{\Delta_{kl}^m}\bar{w}^{\bar{\Delta}_{kl}^m}}\ D_{jkl}^m(w,z)z^{-\Delta_{jm}^i}\Big|_{z=1}\ \bar{D}_{jkl}^m(\bar{w},\bar{z})\bar{z}^{-\bar{\Delta}_{jm}^i}\Big|_{\bar{z}=1}\ . \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{ij}_{lk}(m|w) &= w^{-\Delta^m_{kl}}\ D^m_{jkl}(w,z) z^{-\Delta^i_{jm}}\Big|_{z=1}\ , \\
\bar{\mathcal{F}}^{ij}_{lk}(m|\bar{w}) &= \bar{w}^{-\Delta^m_{kl}}\ \bar{D}^m_{jkl}(\bar{w},\bar{z}) \bar{z}^{-\bar{\Delta}^i_{jm}}\Big|_{\bar{z}=1}\ .
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Для нас важно, что *конформные блоки* $\mathcal{F}^{ij}_{lk}(m|w)$ и $\bar{\mathcal{F}}^{ij}_{lk}(m|\bar{w})$ являются аналитическими функциями w и, соответственно, $\bar{w}$ и полностью определяются конформной алгеброй.

Четырехточечная корреляционная функция, таким образом, имеет вид

$$
\langle i|\phi_j(1,1)\phi_k(w,\bar{w})|l\rangle = \sum_m C_{ijm} C^m_{kl} \mathcal{F}^{ij}_{lk}(m|w) \bar{\mathcal{F}}^{ij}_{lk}(m|\bar{w}). \tag{19}
$$

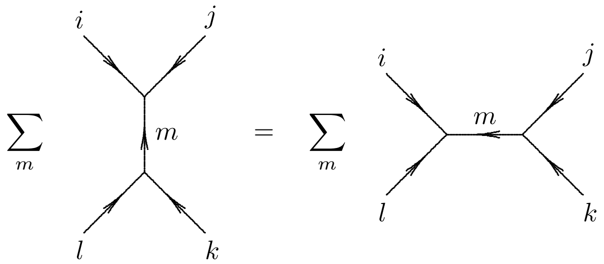
Мы можем переставить поля $\phi_j(1,1)$, $\phi_k(w,\bar{w})$, $\phi_l(0,0)$ и написать

$$
\begin{aligned}
\langle i|\phi_j(1,1)\phi_k(w,\bar{w})|l\rangle &= Z_{jk} Z_{jl} Z_{kl} \langle i|\phi_l(1,1)\phi_k(1-w,1-\bar{w})|j\rangle \\
&= Z_{jk} Z_{jl} Z_{kl} \sum_m C_{ilm} C^m_{kj} \mathcal{F}^{il}_{jk}(m|1-w) \bar{\mathcal{F}}^{il}_{jk}(m|1-\bar{w}),
\end{aligned}
\tag{20}
$$

где Z_{ij} — коэффициент, возникающий от перестановки операторов ϕ_i и ϕ_j. В случае локальных операторов он равен ± 1 в зависимости от спинов. Выражения (19) и (20) можно рассматривать как s- и t-канальные вычисления корреляционной функции, которые, очевидно, должны приводить к одному и тому же результату. Мы получаем так называемое *условие кроссинг-симметрии*

$$
\sum_m C_{ijm} C^m_{kl} \mathcal{F}^{ij}_{lk}(m|w) \bar{\mathcal{F}}^{ij}_{lk}(m|\bar{w}) = Z_{jk} Z_{jl} Z_{kl} \sum_m C_{ilm} C^m_{kj} \mathcal{F}^{il}_{jk}(m|1-w) \bar{\mathcal{F}}^{il}_{jk}(m|1-\bar{w}). \tag{21}
$$

Графически его можно изобразить так:



В вершинах графиков находятся структурные константы (входящей линии отвечает нижний индекс, а выходящей — верхний). Всему графику в целом сопоставляется произведение двух конформных блоков («левого» и «правого»). Условие кроссинг-симметрии выражает *ассоциативность* операторной алгебры, то есть тот факт, что произведение $\phi_j\phi_k\phi_l$ можно разлагать как $(\phi_j(\phi_k\phi_l))$ или как $((\phi_j\phi_k)\phi_l)$, получая один и тот же результат.

Условие кроссинг-симметрии можно рассматривать как уравнение на структурные константы, причем любое решение для данного набора полей сопоставляется некоторой конформной теории поля. Старшие n-точечные корреляционные функции выражаются аналогично через структурные константы C^k_{ij} и n-точечные конформные блоки, которые определяются аналогично четырехточечным. Таким образом условие кроссинг-симметрии представляет собой *условие бутстрапа* для конформной теории поля.

Для того, чтобы решить условие кроссинг-симметрии, нужно научиться переразлагать конформные блоки в s-канале через конформные блоки в t-канале:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{ij}_{lk}(m;w) &= \sum_{m'} K^{ij}_{lk}(m,m') \mathcal{F}^{il}_{jk}(m';1-w), \\
\bar{\mathcal{F}}^{ij}_{lk}(m;\bar{w}) &= \sum_{m'} \bar{K}^{ij}_{lk}(m,m') \bar{\mathcal{F}}^{il}_{jk}(m';1-\bar{w}).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Подставляя разложения (22) в условие кроссинг-симметрии (21), получаем *уравнение ассоциативности*:

$$
\sum_{m''} C_{ijm''} C^{m''}_{kl} K^{ij}_{lk}(m'',m) \bar{K}^{ij}_{lk}(m'',m') = Z_{jk} Z_{jl} Z_{kl} C_{ilm} C^m_{kj} \delta_{mm'}. \tag{23}
$$

Но чтобы найти коэффициенты $K^{ij}_{lk}(m,m')$, $\bar{K}^{ij}_{lk}(m,m')$ необходимо найти эффективное представление для конформных блоков. Мы обсудим это в Лекции 22.

Задачи

1. Для произвольного поля $\phi(x)$ выразить коммутаторы $[L_n, \phi(x)]$ через операторы $(\mathcal{L}_n\phi)(x)$.

2. Записать явно, как выражается произвольная четырехточечная функция $\langle\phi_i(x_1)\phi_j(x_2)\times \phi_k(x_3)\phi_l(x_4)\rangle$ через функцию в переменных двойного отношения $\langle\phi_i(\infty,\infty)\phi_j(1,1)\phi_k(w,\bar{w})\phi_l(0,0)\rangle$.

3. Найти первые три слагаемых в разложении конформного блока $\mathcal{F}^{ij}_{lk}(m;w)$ по степеням w.