Лекция 11
Квантовые спиновые системы и $O(3)$-модель

В этой лекции мы опишем в терминах теории поля изотропные квантовые магнетики, в особенности, одномерные квантовые цепочки. Мы увидим, что в одномерном случае возникают некоторые особенности, которые приводят к тому, что эти модели распадаются на два основных класса универсальности.

Начнем с общего описания спина с помощью функционального интеграла. Как известно, функциональный интеграл всегда стартует с квазиклассической системы, так что кажется, что такое описание для спина не очень подходит. С квазиклассическим пределом спина $S \to \infty$ не связана никакая естественная динамика, которая приводила бы к квантованию спина. Поэтому начнем с обычного операторного подхода. Воспользуемся *преобразованием Швингера–Вигнера*:

$$S^a = \frac{1}{2}b^+\sigma^i b, \qquad b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}, \qquad b^+ = \begin{pmatrix} b_0^+ & b_1^+ \end{pmatrix}, \qquad a = x, y, z, \tag{1}$$

$$[b_\alpha, b_\beta] = [b_\alpha^+, b_\beta^+] = 0, \qquad [b_\alpha, b_\beta^+] = \delta_{\alpha\beta}. \tag{2}$$

Операторы S^i коммутируют как операторы спина:

$$[S^a, S^b] = \epsilon^{abc} S^c. \tag{3}$$

Таким образом преобразование Швингера–Вигнера представляет собой *бозонизацию* спиновых операторов.

Вычислим теперь квадрат спина. Пользуясь соотношением

$$\sigma^a_{\alpha\beta}\sigma^a_{\gamma\delta} = 2\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}, \tag{4}$$

Найдем

$$\boldsymbol{S}^2 = \frac{1}{4}(b^+b)(b^+b + 2). \tag{5}$$

Отсюда получаем

$$S(S+1) = \frac{N_b}{2}\left(\frac{N_b}{2} + 1\right),$$

где N_b — число бозонов. Таким образом условие того, что спин равен S имеет вид

$$b^+b = 2S. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь фоковское представление алгебры Гайзенберга (2) подробнее. Начнем, как всегда, с вакуумного состояния $|0\rangle$:

$$b_\alpha|0\rangle = 0. \tag{7}$$

Построим башню состояний

$$\begin{array}{ll}
N_b = 0 & |0\rangle \\
N_b = 1 & b_0^+|0\rangle \quad b_1^+|0\rangle \\
N_b = 2 & (b_0^+)^2|0\rangle \quad b_0^+b_1^+|0\rangle \quad (b_1^+)^2|0\rangle \\
N_b = 3 & (b_0^+)^3|0\rangle \quad (b_0^+)^2 b_1^+|0\rangle \quad b_0^+(b_1^+)^2|0\rangle \quad (b_1^+)^3|0\rangle \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Мы видим, что на каждом уровне N_b подпространство действительно N_b+1-мерно. Удобно написать в компонентах

$$S^z = \frac{1}{2}(b_0^+b_0 - b_1^+b_1), \qquad S^+ = \frac{1}{2}b_0^+b_1, \qquad S^- = \frac{1}{2}b_1^+b_0.$$

Отсюда легко найти

$$
\begin{aligned}
S^+(b_0^+)^{N_b-k}(b_1^+)^k|0\rangle &= \frac{k}{2}\,(b_0^+)^{N_b-k+1}(b_1^+)^{k-1}|0\rangle,\\
S_-(b_0^+)^{N_b-k}(b_1^+)^k|0\rangle &= \frac{N-k}{2}\,(b_0^+)^{N+b-k-1}(b_1^+)^{k+1}|0\rangle,\\
S^z(b_0^+)^{N_b-k}(b_1^+)^k|0\rangle &= \frac{N-2k}{2}\,(b_0^+)^{N_b-k}(b_1^+)^k|0\rangle.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Теперь давайте перейдем от операторов к функциональному интегралу. Для бозонных канонических переменных q_i, p_i с функцией Гамильтона $H(q,p)$ функциональный интеграл строится с помощью действия

$$
S^M[q,p] = \int dt\,(p\partial_t q - H(q,p)), \qquad S^E[q,p] = \int d\tau\,(-\mathrm{i}p\partial_\tau q + H(q,p)).
$$

Поскольку нас будет интересовать система при конечных температурах, воспользуемся второй формулой для эвклидова пространства. Рассмотрим систему спинов $\boldsymbol{S}_i$ $i = 1,\ldots,N$ с гамильтонианом $H(\boldsymbol{S})$. Так как переменная $\mathrm{i}b_\alpha^+$ канонически сопряжена переменной b_α, имеем

$$
Z = \int Db\,Db^+\,e^{-S[b,b^+]}\prod_i \delta(b_i^+b_i - 2S_i), \qquad S[b,b^+] = \int d\tau\,\left(\sum_i b_i^+\partial_\tau b_i + H(\boldsymbol{S}(b,b^+))\right). \tag{9}
$$

Чтобы избавиться от дельта-функции, давайте запишем поля b, b^+ в полярных координатах:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= re^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\chi+\varphi)}\cos\frac{\theta}{2}, & b_0^+ &= re^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\chi+\varphi)}\cos\frac{\theta}{2},\\
b_1 &= re^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\chi-\varphi)}\sin\frac{\theta}{2}, & b_1 &= re^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\chi-\varphi)}\sin\frac{\theta}{2},\\
\boldsymbol{S} &= \frac{r^2}{2}(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Мера интегрирования в новых переменных имеет вид

$$
db_0^+\,db_0 db_1^+ db_1 = -\frac{1/}{2}r^3\,dr\,d\chi\,d\varphi\,\sin\theta\,d\theta.
$$

Легко видеть, что при $r^2 = 2S$

$$
b^+\partial_\tau b = \mathrm{i}S\partial_\tau\chi + \mathrm{i}S\cos\theta\partial_\tau\varphi.
$$

Поскольку гамильтониан $H(\boldsymbol{S})$ не зависит от переменных χ, видно, что интеграл по $D\chi$ сводится к постоянному множителю и может быть опущен. Остается интегрирование по двумерным углам

$$
\frac{db_0^+\,db_0 db_1^+ db_1\delta(b^+b - 2S)}{d\chi} \propto d\Omega = \sin\theta\,d\theta\,d\varphi = d\cos\theta\,d\varphi.
$$

Итак,

$$
Z = \int D\Omega\,\exp\left(-\int d\tau\,\left(\mathrm{i}\sum_i S_i\cos\theta_i\partial_\tau\varphi_i + H(\boldsymbol{S}(\theta,\varphi))\right)\right). \tag{11}
$$

Ясно, что это означает просто, что функциональный интеграл для спинов есть угловой интеграл по направлениям. Казалось бы, не бог весть что, но мы выяснили, что переменные $\cos\theta$ и φ канонически сопряжены друг другу. Неудобство, состоит в том, что член $\cos\theta\partial_\tau$ не инвариантен по отношению к поворотам. Хотелось бы просто перейти к интегрированию по единичному вектору

$$
\boldsymbol{N} = \boldsymbol{S}/S. \tag{12}
$$

Чтобы достичь этого, нужно сделать один трюк. Введем дополнительную нефизическую координату u и потребуем, чтобы поле $\boldsymbol{N}(u,\tau)$ удовлетворяло граничным условиям

$$
\boldsymbol{N}(0,\tau) = (1,0,0), \qquad \boldsymbol{N}(1,\tau) = \boldsymbol{N}(\tau). \tag{13}
$$

Иными словами

$$\cos\theta(0,\tau)=0,\qquad \varphi(0,\tau)=0,\qquad \cos\theta(1,\tau)=\cos\theta(\tau),\qquad \varphi(1,\tau)=\varphi(\tau).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\int d\tau\,\cos\theta\,\partial_\tau\varphi=\int d\tau\int_0^1 du\,\partial_u(\cos\theta\,\partial_\tau\varphi)=\int d\tau\int_0^1 du\,(\partial_u\cos\theta\,\partial_\tau\varphi+\cos\theta\,\partial_u\partial_\tau\varphi)\\ =\int d\tau\int_0^1 du\,(\partial_u\cos\theta\,\partial_\tau\varphi-\partial_\tau\cos\theta\,\partial_u\varphi).\end{aligned}$$

Подынтегральное выражение в самом конце представляет собой якобиан преобразования от переменных (u,τ) к переменным $(\cos\theta,\varphi)$. Иными словами, это площадь, которую заметает на единичной сфере единичная площадка на плоскости (u,τ). По определению векторного произведения эта площадь равна по модулю $|\partial_u\boldsymbol{N}\times\partial_\tau\boldsymbol{N}|$. Если учесть знак, получаем

$$\int d\tau\,\cos\theta\,\partial_\tau\varphi=\int d\tau\int_0^1 du\,\boldsymbol{N}(\partial_u\boldsymbol{N}\times\partial_\tau\boldsymbol{N}).\tag{14}$$

Окончательно функциональный интеграл (9) записывается так:

$$\begin{aligned}&Z=\int D\boldsymbol{N}\,e^{-S_{\rm kin}[\boldsymbol{N}]-S_H[\boldsymbol{N}]},\\ &S_{\rm kin}[\boldsymbol{N}]=\mathrm{i}\int d\tau\int_0^1 du\,\sum_i S_i\boldsymbol{N}_i(\partial_u\boldsymbol{N}_i\times\partial_\tau\boldsymbol{N}_i),\qquad S_H[\boldsymbol{N}]=\int d\tau\,H(\boldsymbol{N}).\end{aligned}\tag{15}$$

Сразу же возникает вопрос о возможной неоднозначности действия $S_{\rm kin}$, которое, все-таки должно быть функционалом от поля $\boldsymbol{N}(\tau)=\boldsymbol{N}(1,\tau)$. Пусть $\boldsymbol{N}(u,\tau)$ и $\boldsymbol{N}'(u,\tau)$ — две функции, удовлетворяющие граничному условию (13) с одним и тем же значением $\boldsymbol{N}(\tau)$. Давайте теперь продолжим поле $\boldsymbol{N}(u,\tau)$ на полосу $-1\le u\le 1$ следующим образом:

$$\boldsymbol{N}(u,\tau)=\boldsymbol{N}'(-u,\tau)\ \text{при}\ -1\le u<0.$$

Тогда

$$S_{\rm kin}(\boldsymbol{N})-S_{\rm kin}(\boldsymbol{N}')=\mathrm{i}\sum_i S_i\int d\tau\int_{-1}^1 du\,\boldsymbol{N}(\partial_u\boldsymbol{N}\times\partial_\tau\boldsymbol{N}).\tag{16}$$

Мы можем считать теперь, что поле $\boldsymbol{N}(u,\tau)$ определено на окружности по переменной u, так как $\boldsymbol{N}(1,\tau)=\boldsymbol{N}(-1,\tau)$. Более того, при конечных температурах $T>0$ интеграл по τ берется от 0 до β с циклическим граничным условием: $\boldsymbol{N}(\beta)=\boldsymbol{N}(0)$. Естественно расширить это условие на все значения u: $\boldsymbol{N}(u,\beta)=\boldsymbol{N}(u,0)$. Таким образом $\boldsymbol{N}(u,\tau)$ осуществляет отображение двумерного тора T^2 на сферу S^2. Но из топологии (и здравого смысла) мы знаем, что все отображения тора на сферу тривиальны, то есть стягиваемы в точку, и площадь, которую тор заметет на сфере (с учетом знаков сторон) равна нулю. Поэтому

$$S_{\rm kin}[\boldsymbol{N}]-S_{\rm kin}[\boldsymbol{N}']=0.\tag{17}$$

Это очень важное заключение, которое было бы трудно получить в переменных θ, φ, так как там пришлось бы бороться с довольно сложной границей.

При $T=0$ возможна другая ситуация, когда внешнее поле фиксирует значения $\boldsymbol{N}$ при $\tau\to\pm\infty$. Тогда расширенное поле $\boldsymbol{N}(u,\tau)$ осуществляет отображение из S^2 в S^2. В этом случае возможны топологически нетривиальные отображения, когда первая сфера накрывает вторую $q\in\mathbb{Z}$ раз. Величина q может быть как положительной, так и отрицательной, и называется топологическим зарядом отображения. Тогда интеграл в правой части (16) будет равен $4\pi q$:

$$q=\frac{1}{4\pi}\int d^2x\,\boldsymbol{N}(\partial_1\boldsymbol{N}\times\partial_2\boldsymbol{N})=\frac{1}{8\pi}\int d^2x\,\epsilon^{\mu\nu}\boldsymbol{N}(\partial_\mu\boldsymbol{N}\times\partial_\nu\boldsymbol{N}).\tag{18}$$

Тогда

$$S_{\text{kin}}[\boldsymbol{N}] - S_{\text{kin}}[\boldsymbol{N}'] = 4\pi \mathrm{i} \sum_i S_i q_i. \tag{19}$$

Следовательно

$$e^{-(S_{\text{kin}}[\boldsymbol{N}] - S_{\text{kin}}[\boldsymbol{N}'])} = e^{4\pi \mathrm{i} \sum_i S_i q_i} = 1 \text{ при целых или полуцелых спинах } S_i. \tag{20}$$

Теперь попробуем применить полученный результат к задаче о коллинеарном антиферромагнетике на кубической D-мерной решетке во внешнем магнитном поле. Будем считать, что взаимодействуют только ближайшие соседи:

$$H(\boldsymbol{N}) = \frac{JS^2}{2} \sum_{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_\mu} \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{e}_\mu} \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{r}} - S \sum_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{h} \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{r}}, \tag{21}$$

где первая сумма берется по всем узлам решетки $\boldsymbol{r}$ и векторам $\boldsymbol{e}_\mu$ ортонормированного базиса. Вблизи критической точки поле $\boldsymbol{N}$ должно в нулевом порядке осциллировать как $(-1)^{\boldsymbol{r}} \equiv (-1)^{j_1 + \dots + j_D}$, где $\boldsymbol{r} = a(j_1 \boldsymbol{e}_1 + \dots j_D \boldsymbol{e}_D)$. Естественно было бы написать $\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{r}} = (-)^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{n}(x, \tau)$, где $x = a\boldsymbol{r}$ — «непрерывная версия» переменной $\boldsymbol{r}$ при постоянной решетки a. Однако это недостаточно. Это легко понять, просто включив внешнее поле, перпендикулярное направлениям спинов. В этом случае все спины «перекосятся» и получиться, что $\boldsymbol{n}$ осциллирует с периодом $2a$, что недопустимо для скейлингового поля. Поэтому определим два поля:

$$\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{r}}(\tau) = (-)^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{n}(x, \tau)(1 - a^{2D} \boldsymbol{l}^2/2) + a^D \boldsymbol{l}(x, \tau), \qquad \boldsymbol{n}^2 = 1, \qquad \boldsymbol{n}\boldsymbol{l} = 0, a^{2D} \boldsymbol{l}^2 \ll 1. \tag{22}$$

Подставляя это выражение в (21) мы получаем в лидирующих порядках по $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{l}$:

$$H(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l}) = \int d^D x \, \left(\frac{\rho_s}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 + \frac{\chi_\perp S^2}{2} \boldsymbol{l}^2 - S \boldsymbol{h} \boldsymbol{l} \right), \tag{23}$$

где спиновая жесткость ρ_s и поперечная восприимчивость $\chi_\perp$ имеют вид

$$\rho_s = JS^2 a^{2-D}, \qquad \chi_\perp = 2DJa^D.$$

Подставляя теперь (22) в S_{kin}, получаем

$$S_{\text{kin}}[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l}] = S'[\boldsymbol{n}] + \mathrm{i}S \int d^D x \, d\tau \int_0^1 du \, \left(\boldsymbol{n}(\partial_u \boldsymbol{l} \times \partial_\tau \boldsymbol{n}) + \boldsymbol{n}(\partial_u \boldsymbol{n} \times \partial_\tau \boldsymbol{l}) \right), \tag{24}$$

где

$$S'[\boldsymbol{n}] = \mathrm{i}S \sum_{\boldsymbol{r}} (-1)^{\boldsymbol{r}} \int d\tau \int_0^1 du \, \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{r}} (\partial_u \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{r}} \times \partial_\tau \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{r}}). \tag{25}$$

Здесь было также использовано, что $\boldsymbol{l}(\partial_u \boldsymbol{n} \times \partial_\tau \boldsymbol{n}) = 0$. Со слагаемым S' мы попробуем разобраться позже, а пока упростим два других слагаемых:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}(\partial_u \boldsymbol{l} \times \partial_\tau \boldsymbol{n}) &= \partial_u (\boldsymbol{n}(\boldsymbol{l} \times \partial_\tau \boldsymbol{n})) - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{l} \times \partial_u \partial_\tau \boldsymbol{n}), \\ \boldsymbol{n}(\partial_u \boldsymbol{n} \times \partial_\tau \boldsymbol{l}) &= -\partial_\tau (\boldsymbol{n}(\boldsymbol{l} \times \partial_u \boldsymbol{n})) + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{l} \times \partial_u \partial_\tau \boldsymbol{n}). \end{aligned}$$

Далее, в силу граничных условий

$$\int d\tau \, \partial_\tau f(\tau) = 0, \qquad \int du \, \partial_u f(u) = f(1) - f(0). \tag{26}$$

Поэтому

$$S_{\text{kin}}[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l}] = S'[\boldsymbol{n}] - \mathrm{i}S \int d^D x \, d\tau \, \boldsymbol{l}(\boldsymbol{n} \times \partial_\tau \boldsymbol{n}). \tag{27}$$

Итак,

$$\begin{aligned} Z &= \int D\boldsymbol{n} \, D\boldsymbol{l} \, e^{-S'[\boldsymbol{n}] - S_{\text{eff}}[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l}]}, \\ S_{\text{eff}}[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l}] &= \int d^D x \, d\tau \, \left(\frac{\rho_s}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 + \frac{\chi_\perp S^2}{2} \boldsymbol{l}^2 - S\boldsymbol{l}(\mathrm{i}\boldsymbol{n} \times \partial_\tau \boldsymbol{n} + \boldsymbol{h}) \right). \end{aligned}$$

Интеграл по $D\boldsymbol{l}$, во-первых, квадратичен, а во-вторых, не содержит производных от $\boldsymbol{l}$. Поэтому его легко взять:

$$
\begin{aligned}
&Z = \int D\boldsymbol{n}\, e^{-S'[\boldsymbol{n}]-S_{\text{eff}}[\boldsymbol{n}]},\\
&S_{\text{eff}}[\boldsymbol{n}] = \int d^D x\, d\tau\, \left(\frac{\rho_s}{2}\left((\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 + c^{-2}(\partial_\tau \boldsymbol{n})^2\right) - \frac{\mathrm{i}}{\chi_\perp}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{n}\times\partial_\tau\boldsymbol{n}) - \frac{\boldsymbol{h}^2}{\chi_\perp}\right),
\end{aligned}
\tag{28}
$$

где $c = \sqrt{\rho_s \chi_\perp}$ — скорость спиновых волн. По сути, мы получили все ту же $O(3)$-модель в $D+1$ измерении, правда с весьма специфической зависимостью от внешнего поля. У нас осталось одно беспокойство — член $S'[\boldsymbol{n}]$. Формально этот член мал по сравнению с остальными, но он содержит мнимую часть, поэтому может существенно изменить поведение системы.

Рассмотрим случай $D=1$. В этом случае нетрудно вычислить добавку $S'[\boldsymbol{n}]$. Действительно,

$$
\begin{aligned}
S'[\boldsymbol{n}] &= \mathrm{i}S\sum_j (-1)^j \int d\tau \int_0^1 du\, \boldsymbol{n}_j(\partial_u \boldsymbol{n}_j \times \partial_\tau \boldsymbol{n}_j)\\
&= \mathrm{i}S\sum_k \int d\tau \int_0^1 du\, \left(\boldsymbol{n}_{2k}(\partial_u \boldsymbol{n}_{2k}\times\partial_\tau \boldsymbol{n}_{2k}) - \boldsymbol{n}_{2k-1}(\partial_u \boldsymbol{n}_{2k-1}\times\partial_\tau \boldsymbol{n}_{2k-1})\right)
\end{aligned}
$$

Рассмотрим конечную (но длинную) цепочку с четным числом узлов и с фиксированными граничными условиями. Воспользуемся при этом формулой суммирования

$$
\sum_{j=0}^n f(j) \simeq \frac{f(0)+f(n)}{2} + \int_0^n dx\, f(x).
$$

Если $n = 2m-1$, имеем

$$
\sum_{j=0}^{2m-1} (-1)^j f(j) \simeq \frac{f(0)-f(2m-1)}{2} + \int dx\, f(x) e^{\mathrm{i}\pi x} \simeq \frac{f(0)-f(2m-1)}{2} = -\frac{1}{2}\int dx\, f'(x).
$$

По-другому,

$$
\sum_{j=0}^{2m-1} (-1)^j f(j) = -\sum_{k=0}^{m-1}(f(2k+1)-f(2k)) \simeq -\sum_{k=0}^{m-1} f'(2k) \simeq \frac{1}{2} int dx\, f'(x)
$$

Аналогично

$$
\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j f(j) \simeq \frac{f(2m)-f(1)}{2} \simeq \frac{1}{2}\int dx\, f'(x)
$$

или

$$
\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j f(j) = \sum_{k=1}^{m}(f(2k)-f(2k-1)) \simeq \sum_{k=1}^{m} f'(2k-1) \simeq \frac{1}{2}\int dx\, f'(x).
$$

Таким образом, от выбора начальной точки зависит знак альтернированной суммы. Мы увидим, что в нашем случае знак не имеет значения. Поэтому получаем

$$
S'[\boldsymbol{n}] \simeq \pm \mathrm{i}\frac{S}{2}\int dx\, d\tau \int_0^1 du\, \partial_x(\boldsymbol{n}(\partial_u \boldsymbol{n}\times\partial_\tau \boldsymbol{n})).
$$

Теперь воспользуемся тождеством

$$
\partial_x(\boldsymbol{n}(\partial_u \boldsymbol{n}\times\partial_\tau \boldsymbol{n})) + \partial_u(\boldsymbol{n}(\partial_\tau \boldsymbol{n}\times\partial_x \boldsymbol{n})) + \partial_\tau(\boldsymbol{n}(\partial_x \boldsymbol{n}\times\partial_u \boldsymbol{n})) = 0.
$$

Таким образом, мы можем выразить производную по x через сумму производный по τ и по u. В силу условий (26) вклад производной по τ пропадет, а интеграл от производной по u даст значение полей при $u=1$. Получаем

$$
S'[\boldsymbol{n}] = \pm \mathrm{i}\frac{S}{2}\int dx\, d\tau\, \boldsymbol{n}(\partial_x \boldsymbol{n}\times\partial_\tau \boldsymbol{n}) = \pm 2\pi S q,
\tag{29}
$$

где q — топологический заряд конфигурации $\boldsymbol{n}(x,\tau)$. Напомним, что при фиксированных граничных условиях и конечной температуре пространство (x,τ) топологически эквивалентно сфере. Это значит, что статистическая сумма распадается в сумму по конфигурациям различной топологии:

$$Z = \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{\pm 2\pi \mathrm{i} Sq} Z_q = \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-)^{2Sq} Z_q, \qquad Z_q = \int D\boldsymbol{n}\, \delta_{q[\boldsymbol{n}],q} e^{-S_{\mathrm{eff}}[\boldsymbol{n}]}. \tag{30}$$

Мы видим, что

$$Z = \begin{cases} \sum_q Z_q, & S \text{ — целое,} \\ \sum_q (-1)^q Z_q, & S \text{ — полуцелое.} \end{cases} \tag{31}$$

Важный факт состоит в том, что все одномерные спиновые цепочки распадаются на *два класса универсальности*. Мы увидим, что в случае целого спина система имеет массивный спектр, в то время как в случае полуцелого спина спектр безмассовый. Эти утверждения составляют содержание *гипотезы Холдейна*.

Под конец, запишем систему без внешнего поля как релятивистскую сигма-модель. Положим $x^1 = x$, $x^2 = c\tau$ (или $x^0 = ct$), $g = \rho_s^{-1}$. Кроме того, предположим произвольный коэффициент θ при топологическом члене в действии. Получаем

$$S[\boldsymbol{n}] = \frac{1}{2g}\int d^2x\, (\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 + \mathrm{i}\frac{\theta}{8\pi}\int d^2x\, \boldsymbol{n}(\partial_\mu \boldsymbol{n} \times \partial_\nu \boldsymbol{n})\epsilon^{\mu\nu}, \qquad \boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3), \qquad \boldsymbol{n}^2 = 1. \tag{32}$$

Задачи

1. Проверить преобразование Швингера–Вигнера, получив (3) из (1), (2). Вывести также (4), (5).
2. Получить действие в функциональном интеграле (11).