Лекция 6. Уравнения гравитационного поля и законы сохранения

Михаил Лашкевич

Действие для гравитационного поля

Теперь мы будем рассматривать метрику g как динамическую переменную. Предположим, что действие теории разбивается в сумму действия для полей материи в искривленном пространстве времени и для гравитации:

$$S_{\text{общ}}[\phi, g] = S_{\text{мат}}[\phi|g] + S_{\text{грав}}[g]. \tag{1}$$

Действие для гравитационного поля

Теперь мы будем рассматривать метрику g как динамическую переменную. Предположим, что действие теории разбивается в сумму действия для полей материи в искривленном пространстве времени и для гравитации:

$$S_{\text{общ}}[\phi, g] = S_{\text{мат}}[\phi|g] + S_{\text{грав}}[g]. \tag{1}$$

Уравнение движения для метрики можно представить в виде

$$T^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = 0, \tag{2}$$

Действие для гравитационного поля

Теперь мы будем рассматривать метрику g как динамическую переменную. Предположим, что действие теории разбивается в сумму действия для полей материи в искривленном пространстве времени и для гравитации:

$$S_{\text{общ}}[\phi, g] = S_{\text{мат}}[\phi|g] + S_{\text{грав}}[g]. \tag{1}$$

Уравнение движения для метрики можно представить в виде

$$T^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = 0, \tag{2}$$

где $T^{\mu\nu} = -2|g|^{-1/2}\delta S_{\text{мат}}/\delta g_{\mu\nu}$ — метрический тензор энергии импульса материи,

Действие для гравитационного поля

Теперь мы будем рассматривать метрику g как динамическую переменную. Предположим, что действие теории разбивается в сумму действия для полей материи в искривленном пространстве времени и для гравитации:

$$S_{\text{общ}}[\phi, g] = S_{\text{мат}}[\phi|g] + S_{\text{грав}}[g]. \tag{1}$$

Уравнение движения для метрики можно представить в виде

$$T^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = 0, \tag{2}$$

где $T^{\mu\nu} = -2|g|^{-1/2}\delta S_{\text{мат}}/\delta g_{\mu\nu}$ — метрический тензор энергии импульса материи,
а $T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = -2|g|^{-1/2}\delta S_{\text{грав}}/\delta g_{\mu\nu}$ — формальный метрический тензор энергии-импульса для гравитационного действия.

Действие для гравитационного поля

Теперь мы будем рассматривать метрику g как динамическую переменную. Предположим, что действие теории разбивается в сумму действия для полей материи в искривленном пространстве времени и для гравитации:

$$S_{\text{общ}}[\phi, g] = S_{\text{мат}}[\phi|g] + S_{\text{грав}}[g]. \tag{1}$$

Уравнение движения для метрики можно представить в виде

$$T^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = 0, \tag{2}$$

где $T^{\mu\nu} = -2|g|^{-1/2}\delta S_{\text{мат}}/\delta g_{\mu\nu}$ — метрический тензор энергии импульса материи,
а $T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = -2|g|^{-1/2}\delta S_{\text{грав}}/\delta g_{\mu\nu}$ — формальный метрический тензор энергии-импульса для гравитационного действия.
Найдем лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{грав}}$ гравитационного поля. Потребуем, чтобы

Теперь мы будем рассматривать метрику g как динамическую переменную. Предположим, что действие теории разбивается в сумму действия для полей материи в искривленном пространстве времени и для гравитации:

$$S_{\text{общ}}[\phi, g] = S_{\text{мат}}[\phi|g] + S_{\text{грав}}[g]. \tag{1}$$

Уравнение движения для метрики можно представить в виде

$$T^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = 0, \tag{2}$$

где $T^{\mu\nu} = -2|g|^{-1/2}\delta S_{\text{мат}}/\delta g_{\mu\nu}$ — метрический тензор энергии импульса материи,
а $T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = -2|g|^{-1/2}\delta S_{\text{грав}}/\delta g_{\mu\nu}$ — формальный метрический тензор энергии-импульса для гравитационного действия.
Найдем лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{грав}}$ гравитационного поля. Потребуем, чтобы

- Лагранжиан является скаляром, не зависящим от выбора системы координат.

Действие для гравитационного поля

Теперь мы будем рассматривать метрику g как динамическую переменную. Предположим, что действие теории разбивается в сумму действия для полей материи в искривленном пространстве времени и для гравитации:

$$S_{\text{общ}}[\phi, g] = S_{\text{мат}}[\phi|g] + S_{\text{грав}}[g]. \tag{1}$$

Уравнение движения для метрики можно представить в виде

$$T^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = 0, \tag{2}$$

где $T^{\mu\nu} = -2|g|^{-1/2}\delta S_{\text{мат}}/\delta g_{\mu\nu}$ — метрический тензор энергии импульса материи,
а $T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = -2|g|^{-1/2}\delta S_{\text{грав}}/\delta g_{\mu\nu}$ — формальный метрический тензор энергии-импульса для гравитационного действия.
Найдем лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{грав}}$ гравитационного поля. Потребуем, чтобы

- Лагранжиан является скаляром, не зависящим от выбора системы координат.
- Лагранжиан зависит от первых производных метрики не более чем квадратично и от вторых не более чем линейно.

Действие для гравитационного поля

Теперь мы будем рассматривать метрику g как динамическую переменную. Предположим, что действие теории разбивается в сумму действия для полей материи в искривленном пространстве времени и для гравитации:

$$S_{\text{общ}}[\phi, g] = S_{\text{мат}}[\phi|g] + S_{\text{грав}}[g]. \tag{1}$$

Уравнение движения для метрики можно представить в виде

$$T^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = 0, \tag{2}$$

где $T^{\mu\nu} = -2|g|^{-1/2}\delta S_{\text{мат}}/\delta g_{\mu\nu}$ — метрический тензор энергии импульса материи,
а $T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = -2|g|^{-1/2}\delta S_{\text{грав}}/\delta g_{\mu\nu}$ — формальный метрический тензор энергии-импульса для гравитационного действия.
Найдем лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{грав}}$ гравитационного поля. Потребуем, чтобы

- Лагранжиан является скаляром, не зависящим от выбора системы координат.
- Лагранжиан зависит от первых производных метрики не более чем квадратично и от вторых не более чем линейно.

Этим условиям удовлетворяют две величины: 1 и R. Поэтому примем

$$S_{\text{грав}} = -\frac{1}{16\pi G}\int d^d x\,\sqrt{|g|}(R + 2\Lambda), \tag{3}$$

где $G > 0$ и Λ — постоянные. Это действие называется действием Эйнштейна—Гильберта.

Лямбда-член

Постоянная G совпадает с ньютоновской гравитационной постоянной, а постоянная Λ называется космологической постоянной.

Лямбда-член

Постоянная G совпадает с ньютоновской гравитационной постоянной, а постоянная Λ называется космологической постоянной. Космологический член не содержит производных метрики и может быть отнесен к материи с тензором энергии-импульса

$$T_{\Lambda}^{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{4\pi G\sqrt{|g|}} \frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\Lambda}{8\pi G}\, g^{\mu\nu}. \tag{4}$$

Лямбда-член

Постоянная G совпадает с ньютоновской гравитационной постоянной, а постоянная Λ называется космологической постоянной. Космологический член не содержит производных метрики и может быть отнесен к материи с тензором энергии-импульса

$$T_\Lambda^{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{4\pi G\sqrt{|g|}} \frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g^{\mu\nu}. \tag{4}$$

Такая «материя», разлитая по всему пространству, имеет уравнение состояния

$$p = -\varepsilon = -\Lambda/8\pi G.$$

Этот член настолько мал, что существен лишь для эволюции Вселенной как целого. Мы будем его опускать.

Вариация действия

Заметим, что добавлением интеграла от полной дивергенции действие можно привести к виду

$$S_{\text{грав}}[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^dx\,\sqrt{|g|}\,\mathcal{R}(g, \partial_\bullet g), \tag{5}$$

Заметим, что добавлением интеграла от полной дивергенции действие можно привести к виду

$$S_{\text{грав}}[g] = -\frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{|g|}\, \mathcal{R}(g, \partial_\bullet g), \tag{5}$$

где $\mathcal{R}$ не является скаляром, зато зависит только от метрики и ее первых производных:

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}(\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\lambda}) \tag{6}$$

Заметим, что добавлением интеграла от полной дивергенции действие можно привести к виду

$$S_{\text{грав}}[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^d x\,\sqrt{|g|}\,\mathcal{R}(g,\partial_\bullet g), \tag{5}$$

где $\mathcal{R}$ не является скаляром, зато зависит только от метрики и ее первых производных:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= g^{\mu\nu}(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\lambda}) \\ &= \frac{1}{4}g_{\mu\nu,\rho}g_{\kappa\lambda,\sigma}\left(g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\kappa}g^{\nu\sigma}g^{\rho\lambda} - 2g^{\mu\nu}g^{\kappa\rho}g^{\lambda\sigma}\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Заметим, что добавлением интеграла от полной дивергенции действие можно привести к виду

$$S_{\text{грав}}[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^d x \sqrt{|g|}\,\mathcal{R}(g, \partial_\bullet g), \qquad (5)$$

где $\mathcal{R}$ не является скаляром, зато зависит только от метрики и ее первых производных:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= g^{\mu\nu}(\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\lambda}) \\ &= \frac{1}{4} g_{\mu\nu,\rho} g_{\kappa\lambda,\sigma}\left(g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\kappa}g^{\nu\sigma}g^{\rho\lambda} - 2g^{\mu\nu}g^{\kappa\rho}g^{\lambda\sigma}\right). \end{aligned} \qquad (6)$$

Значит, в ОТО нет дополнительных степеней свободы, связанных с производными от метрики.

Заметим, что добавлением интеграла от полной дивергенции действие можно привести к виду

$$S_{\text{грав}}[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^d x\,\sqrt{|g|}\,\mathcal{R}(g, \partial_\bullet g), \tag{5}$$

где $\mathcal{R}$ не является скаляром, зато зависит только от метрики и ее первых производных:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= g^{\mu\nu}(\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\lambda}) \\ &= \frac{1}{4} g_{\mu\nu,\rho} g_{\kappa\lambda,\sigma}\left(g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\kappa}g^{\nu\sigma}g^{\rho\lambda} - 2g^{\mu\nu}g^{\kappa\rho}g^{\lambda\sigma}\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Значит, в ОТО нет дополнительных степеней свободы, связанных с производными от метрики.

Теперь вернемся к исходной формуле и проварьируем действие по метрике:

$$\begin{aligned}\delta\int d^4x\,\sqrt{|g|}R = \delta\int d^4x\,\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x\,\left(\delta\sqrt{|g|}\,R + \sqrt{|g|}\,\delta g^{\mu\nu}\,R_{\mu\nu} + \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu}\right) \\ &= \int d^4x\,\left(\sqrt{|g|}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu}\right).\end{aligned}$$

Заметим, что добавлением интеграла от полной дивергенции действие можно привести к виду

$$S_{\text{грав}}[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^d x\,\sqrt{|g|}\,\mathcal{R}(g,\partial_{\bullet} g), \tag{5}$$

где $\mathcal{R}$ не является скаляром, зато зависит только от метрики и ее первых производных:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= g^{\mu\nu}(\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\lambda}) \\ &= \frac{1}{4} g_{\mu\nu,\rho} g_{\kappa\lambda,\sigma}\left(g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\kappa}g^{\nu\sigma}g^{\rho\lambda} - 2g^{\mu\nu}g^{\kappa\rho}g^{\lambda\sigma}\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Значит, в ОТО нет дополнительных степеней свободы, связанных с производными от метрики.

Теперь вернемся к исходной формуле и проварьируем действие по метрике:

$$\begin{aligned}\delta\int d^4x\,\sqrt{|g|}R &= \delta\int d^4x\,\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x\,\left(\delta\sqrt{|g|}\,R + \sqrt{|g|}\,\delta g^{\mu\nu}\,R_{\mu\nu} + \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu}\right) \\ &= \int d^4x\,\left(\sqrt{|g|}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu}\right).\end{aligned}$$

Оказывается, последний член под интегралом является полной дивергенцией,

$$\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda(\sqrt{|g|}w^\lambda) = \sqrt{|g|}w^{\lambda}{}_{;\lambda}, \qquad w^\lambda = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - g^{\lambda\mu}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}, \tag{7}$$

и, таким образом, дает нулевой вклад.

Добавляя вклад действия для полей материи, получаем уравнения Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{8}$$

Добавляя вклад действия для полей материи, получаем уравнения Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{8}$$

Это $d(d+1)/2$ уравнений, но не все они одинаковы. Чтобы разобраться, рассмотрим вклады в, содержащие вторые производные по времени $t = x^0$:

Добавляя вклад действия для полей материи, получаем уравнения Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{8}$$

Это $d(d+1)/2$ уравнений, но не все они одинаковы. Чтобы разобраться, рассмотрим вклады в, содержащие вторые производные по времени $t = x^0$:

$$R_{00} = -\frac{1}{2} g^{ij} \ddot{g}_{ij} + \cdots , \tag{9}$$

Уравнения Эйнштейна

Добавляя вклад действия для полей материи, получаем уравнения Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{8}$$

Это $d(d+1)/2$ уравнений, но не все они одинаковы. Чтобы разобраться, рассмотрим вклады в, содержащие вторые производные по времени $t = x^0$:

$$R_{00} = -\frac{1}{2} g^{ij} \ddot{g}_{ij} + \cdots, \quad R_{0i} = \frac{1}{2} g^{0j} \ddot{g}_{ij} + \cdots, \tag{9}$$

Добавляя вклад действия для полей материи, получаем уравнения Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} . \tag{8}$$

Это $d(d+1)/2$ уравнений, но не все они одинаковы. Чтобы разобраться, рассмотрим вклады в, содержащие вторые производные по времени $t = x^0$:

$$R_{00} = -\frac{1}{2} g^{ij} \ddot{g}_{ij} + \cdots , \quad R_{0i} = \frac{1}{2} g^{0j} \ddot{g}_{ij} + \cdots , \quad R_{ij} = -\frac{1}{2} g^{00} \ddot{g}_{ij} + \cdots . \tag{9}$$

Мы видим, что динамическими переменными являются только пространственные компоненты метрики g_{ij}. Переменные $g_{0\mu}$ не являются динамическими.

Добавляя вклад действия для полей материи, получаем уравнения Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{8}$$

Это $d(d+1)/2$ уравнений, но не все они одинаковы. Чтобы разобраться, рассмотрим вклады в, содержащие вторые производные по времени $t = x^0$:

$$R_{00} = -\frac{1}{2} g^{ij} \ddot{g}_{ij} + \cdots , \quad R_{0i} = \frac{1}{2} g^{0j} \ddot{g}_{ij} + \cdots , \quad R_{ij} = -\frac{1}{2} g^{00} \ddot{g}_{ij} + \cdots . \tag{9}$$

Мы видим, что динамическими переменными являются только пространственные компоненты метрики g_{ij}. Переменные $g_{0\mu}$ не являются динамическими.

Теперь поднимем один индекс и вычтем, где нужно, скаляр Риччи:

$$R^0_\mu - \frac{1}{2} \delta^0_\mu R = 0 + \cdots , \tag{10}$$

Мы видим, что d уравнений представляют собой связи,

Добавляя вклад действия для полей материи, получаем уравнения Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{8}$$

Это $d(d+1)/2$ уравнений, но не все они одинаковы. Чтобы разобраться, рассмотрим вклады в, содержащие вторые производные по времени $t = x^0$:

$$R_{00} = -\frac{1}{2} g^{ij} \ddot{g}_{ij} + \cdots , \quad R_{0i} = \frac{1}{2} g^{0j} \ddot{g}_{ij} + \cdots , \quad R_{ij} = -\frac{1}{2} g^{00} \ddot{g}_{ij} + \cdots . \tag{9}$$

Мы видим, что динамическими переменными являются только пространственные компоненты метрики g_{ij}. Переменные $g_{0\mu}$ не являются динамическими.

Теперь поднимем один индекс и вычтем, где нужно, скаляр Риччи:

$$\begin{aligned} R^0_\mu - \frac{1}{2} \delta^0_\mu R &= 0 + \cdots , \\ R^i_j - \frac{\delta^i_j}{2} R &= \frac{1}{2} (g^{0k} g^{0l} - g^{00} g^{kl})(\delta^i_k \ddot{g}_{jl} - \delta^i_j \ddot{g}_{kl}) + \cdots . \end{aligned} \tag{10}$$

Мы видим, что d уравнений представляют собой связи, а динамических уравнений всего $d(d-1)/2$.

Изучим теперь переменные $g_{\mu\nu}$. Учтем инвариантность относительно преобразований координат. При малых преобразованиях $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ метрика преобразуется по закону

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}. \tag{11}$$

Уравнения Эйнштейна: динамические переменные

Изучим теперь переменные $g_{\mu\nu}$. Учтем инвариантность относительно преобразований координат. При малых преобразованиях $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ метрика преобразуется по закону

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}. \tag{11}$$

В окрестности любой регулярной точки многообразия мы можем выбрать синхронную систему координат $g_{0\mu} = \delta_{0\mu}$.

Уравнения Эйнштейна: динамические переменные

Изучим теперь переменные $g_{\mu\nu}$. Учтем инвариантность относительно преобразований координат. При малых преобразованиях $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ метрика преобразуется по закону

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}. \tag{11}$$

В окрестности любой регулярной точки многообразия мы можем выбрать синхронную систему координат $g_{0\mu} = \delta_{0\mu}$. Это оставляет $d(d-1)/2$ переменную g_{ij} и столько же переменных $\dot{g}_{ij}$. То есть для решения задачи Коши нужно в каждой точке задать $d(d-1)$ число.

Уравнения Эйнштейна: динамические переменные

Изучим теперь переменные $g_{\mu\nu}$. Учтем инвариантность относительно преобразований координат. При малых преобразованиях $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ метрика преобразуется по закону

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}. \tag{11}$$

В окрестности любой регулярной точки многообразия мы можем выбрать синхронную систему координат $g_{0\mu} = \delta_{0\mu}$. Это оставляет $d(d-1)/2$ переменную g_{ij} и столько же переменных $\dot{g}_{ij}$. То есть для решения задачи Коши нужно в каждой точке задать $d(d-1)$ число.

Учтем остаточную калибровочную свободу, не меняющую $g_{0\mu}$. Из (11) имеем

$$\xi_{0;0} = 0, \quad \xi_{i;0} = -\xi_{0;i}.$$

Уравнения Эйнштейна: динамические переменные

Изучим теперь переменные $g_{\mu\nu}$. Учтем инвариантность относительно преобразований координат. При малых преобразованиях $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ метрика преобразуется по закону

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}. \qquad (11)$$

В окрестности любой регулярной точки многообразия мы можем выбрать синхронную систему координат $g_{0\mu} = \delta_{0\mu}$. Это оставляет $d(d-1)/2$ переменную g_{ij} и столько же переменных $\dot{g}_{ij}$. То есть для решения задачи Коши нужно в каждой точке задать $d(d-1)$ число.

Учтем остаточную калибровочную свободу, не меняющую $g_{0\mu}$. Из (11) имеем

$$\xi_{0;0} = 0, \quad \xi_{i;0} = -\xi_{0;i}.$$

Эти уравнения выражают $\dot{\xi}_\mu$ через ξ_μ в любой момент времени.

Изучим теперь переменные $g_{\mu\nu}$. Учтем инвариантность относительно преобразований координат. При малых преобразованиях $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ метрика преобразуется по закону

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}. \tag{11}$$

В окрестности любой регулярной точки многообразия мы можем выбрать синхронную систему координат $g_{0\mu} = \delta_{0\mu}$. Это оставляет $d(d-1)/2$ переменную g_{ij} и столько же переменных $\dot{g}_{ij}$. То есть для решения задачи Коши нужно в каждой точке задать $d(d-1)$ число.
Учтем остаточную калибровочную свободу, не меняющую $g_{0\mu}$. Из (11) имеем

$$\xi_{0;0} = 0, \quad \xi_{i;0} = -\xi_{0;i}.$$

Эти уравнения выражают $\dot{\xi}_\mu$ через ξ_μ в любой момент времени. Итак, мы имеем d произвольных функций пространственных координат.

Изучим теперь переменные $g_{\mu\nu}$. Учтем инвариантность относительно преобразований координат. При малых преобразованиях $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ метрика преобразуется по закону

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}. \tag{11}$$

В окрестности любой регулярной точки многообразия мы можем выбрать синхронную систему координат $g_{0\mu} = \delta_{0\mu}$. Это оставляет $d(d-1)/2$ переменную g_{ij} и столько же переменных $\dot{g}_{ij}$. То есть для решения задачи Коши нужно в каждой точке задать $d(d-1)$ число.
Учтем остаточную калибровочную свободу, не меняющую $g_{0\mu}$. Из (11) имеем

$$\xi_{0;0} = 0, \quad \xi_{i;0} = -\xi_{0;i}.$$

Эти уравнения выражают $\dot{\xi}_\mu$ через ξ_μ в любой момент времени. Итак, мы имеем d произвольных функций пространственных координат.
Окончательно, для числа начальных данных в задаче Коши в каждой точке поверхности $x^0 = t_0$ имеем:

$$N = \underbrace{d(d-1)}_{\left[\substack{\text{переменных} \\ g_{ij}(x^1,\ldots,x^d)}\right]} - \tag{12}$$

Уравнения Эйнштейна: динамические переменные

Изучим теперь переменные $g_{\mu\nu}$. Учтем инвариантность относительно преобразований координат. При малых преобразованиях $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ метрика преобразуется по закону

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}. \tag{11}$$

В окрестности любой регулярной точки многообразия мы можем выбрать синхронную систему координат $g_{0\mu} = \delta_{0\mu}$. Это оставляет $d(d-1)/2$ переменную g_{ij} и столько же переменных $\dot{g}_{ij}$. То есть для решения задачи Коши нужно в каждой точке задать $d(d-1)$ число.
Учтем остаточную калибровочную свободу, не меняющую $g_{0\mu}$. Из (11) имеем

$$\xi_{0;0} = 0, \quad \xi_{i;0} = -\xi_{0;i}.$$

Эти уравнения выражают $\dot{\xi}_\mu$ через ξ_μ в любой момент времени. Итак, мы имеем d произвольных функций пространственных координат.
Окончательно, для числа начальных данных в задаче Коши в каждой точке поверхности $x^0 = t_0$ имеем:

$$N = \underbrace{d(d-1)}_{\left[\substack{\text{переменных} \\ g_{ij}(x^1,\ldots,x^d)}\right]} - \underbrace{d}_{\left[\substack{\text{связей} \\ R^0_\mu = 8\pi G T^0_\mu}\right]} - \tag{12}$$

Изучим теперь переменные $g_{\mu\nu}$. Учтем инвариантность относительно преобразований координат. При малых преобразованиях $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ метрика преобразуется по закону

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}. \tag{11}$$

В окрестности любой регулярной точки многообразия мы можем выбрать синхронную систему координат $g_{0\mu} = \delta_{0\mu}$. Это оставляет $d(d-1)/2$ переменную g_{ij} и столько же переменных $\dot{g}_{ij}$. То есть для решения задачи Коши нужно в каждой точке задать $d(d-1)$ число.
Учтем остаточную калибровочную свободу, не меняющую $g_{0\mu}$. Из (11) имеем

$$\xi_{0;0} = 0, \quad \xi_{i;0} = -\xi_{0;i}.$$

Эти уравнения выражают $\dot{\xi}_\mu$ через ξ_μ в любой момент времени. Итак, мы имеем d произвольных функций пространственных координат.
Окончательно, для числа начальных данных в задаче Коши в каждой точке поверхности $x^0 = t_0$ имеем:

$$N = \underbrace{d(d-1)}_{\left[\substack{\text{переменных} \\ g_{ij}(x^1,\dots,x^d)}\right]} - \underbrace{d}_{\left[\substack{\text{связей} \\ R^0_\mu = 8\pi G T^0_\mu}\right]} - \underbrace{d}_{\left[\substack{\text{остаточных} \\ \text{преобразований} \\ \xi^\mu(x^1,\dots,x^d)}\right]} = \tag{12}$$

Изучим теперь переменные $g_{\mu\nu}$. Учтем инвариантность относительно преобразований координат. При малых преобразованиях $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ метрика преобразуется по закону

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}. \tag{11}$$

В окрестности любой регулярной точки многообразия мы можем выбрать синхронную систему координат $g_{0\mu} = \delta_{0\mu}$. Это оставляет $d(d-1)/2$ переменную g_{ij} и столько же переменных $\dot{g}_{ij}$. То есть для решения задачи Коши нужно в каждой точке задать $d(d-1)$ число.

Учтем остаточную калибровочную свободу, не меняющую $g_{0\mu}$. Из (11) имеем

$$\xi_{0;0} = 0, \quad \xi_{i;0} = -\xi_{0;i}.$$

Эти уравнения выражают $\dot{\xi}_\mu$ через ξ_μ в любой момент времени. Итак, мы имеем d произвольных функций пространственных координат.

Окончательно, для числа начальных данных в задаче Коши в каждой точке поверхности $x^0 = t_0$ имеем:

$$N = \underbrace{d(d-1)}_{\left[\substack{\text{переменных}\\ g_{ij}(x^1,\ldots,x^d)}\right]} - \underbrace{d}_{\left[\substack{\text{связей}\\ R^0_\mu = 8\pi G T^0_\mu}\right]} - \underbrace{d}_{\left[\substack{\text{остаточных}\\ \text{преобразований}\\ \xi^\mu(x^1,\ldots,x^d)}\right]} = d(d-3) \tag{12}$$

Изучим теперь переменные $g_{\mu\nu}$. Учтем инвариантность относительно преобразований координат. При малых преобразованиях $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ метрика преобразуется по закону

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}. \qquad (11)$$

В окрестности любой регулярной точки многообразия мы можем выбрать синхронную систему координат $g_{0\mu} = \delta_{0\mu}$. Это оставляет $d(d-1)/2$ переменную g_{ij} и столько же переменных $\dot{g}_{ij}$. То есть для решения задачи Коши нужно в каждой точке задать $d(d-1)$ число.
Учтем остаточную калибровочную свободу, не меняющую $g_{0\mu}$. Из (11) имеем

$$\xi_{0;0} = 0, \quad \xi_{i;0} = -\xi_{0;i}.$$

Эти уравнения выражают $\dot{\xi}_\mu$ через ξ_μ в любой момент времени. Итак, мы имеем d произвольных функций пространственных координат.
Окончательно, для числа начальных данных в задаче Коши в каждой точке поверхности $x^0 = t_0$ имеем:

$$N = \underbrace{d(d-1)}_{\left[\substack{\text{переменных} \\ g_{ij}(x^1,\dots,x^d)}\right]} - \underbrace{d}_{\left[\substack{\text{связей} \\ R^0_\mu = 8\pi G T^0_\mu}\right]} - \underbrace{d}_{\left[\substack{\text{остаточных} \\ \text{преобразований} \\ \xi^\mu(x^1,\dots,x^d)}\right]} = d(d-3) \qquad (12)$$

То есть как динамическая система гравитация имеет $d(d-3)/2$ степеней свободы в каждой точке пространственно-подобной поверхности.

Сохранение энергии и импульса в ОТО

Уравнения Эйнштейна представляют собой условие обращение в нуль плотности энергии, плотности импульса и тензора напряжений материи и гравитации в каждой точке пространства времени:

$$T^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = 0, \quad T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = -\frac{1}{8\pi G}\left(R^{\mu\nu} - \frac{g^{\mu\nu}}{2}R\right).$$

Сохранение энергии и импульса в ОТО

Уравнения Эйнштейна представляют собой условие обращение в нуль плотности энергии, плотности импульса и тензора напряжений материи и гравитации в каждой точке пространства времени:

$$T^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = 0, \quad T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = -\frac{1}{8\pi G}\left(R^{\mu\nu} - \frac{g^{\mu\nu}}{2}R\right).$$

С точки зрения физической интуиции это очень неестественно. Хотелось бы определить энергию и импульс системы так, чтобы можно было говорить о конечных и сохраняющихся энергии и импульсе замкнутой системы в асимптотически плоском пространстве-времени.

Псевдотензор энергии-импульса Эйнштейна

Вспомним, что гравитационное действие можно представить в виде

$$S_{\text{грав}}[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^d x\,\sqrt{|g|}\,\mathcal{R}(g,\partial_\bullet g), \quad \mathcal{R} = g^{\mu\nu}(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\lambda}).$$

Псевдотензор энергии-импульса Эйнштейна

Вспомним, что гравитационное действие можно представить в виде

$$S_{\text{грав}}[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^d x\,\sqrt{|g|}\,\mathcal{R}(g,\partial_\bullet g), \quad \mathcal{R} = g^{\mu\nu}(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\lambda}).$$

Будем относиться к $-\sqrt{|g|}\mathcal{R}/16\pi G$ как к обыкновенному лагранжиану для полей $g_{\mu\nu}$ в плоском пространстве-времени. Введем соответствующий канонический тензор энергии-импульса:

$$\sqrt{|g|}t^E{}_\mu{}^\nu = -\frac{1}{16\pi G}\left(g_{\alpha\beta,\mu}\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{R})}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} - \delta^\nu_\mu\sqrt{|g|}\mathcal{R}\right). \tag{13}$$

Псевдотензор энергии-импульса Эйнштейна

Вспомним, что гравитационное действие можно представить в виде

$$S_{\text{грав}}[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^dx\,\sqrt{|g|}\,\mathcal{R}(g,\partial_\bullet g), \quad \mathcal{R} = g^{\mu\nu}(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\lambda}).$$

Будем относиться к $-\sqrt{|g|}\mathcal{R}/16\pi G$ как к обыкновенному лагранжиану для полей $g_{\mu\nu}$ в плоском пространстве-времени. Введем соответствующий канонический тензор энергии-импульса:

$$\sqrt{|g|}t^E{}_\mu{}^\nu = -\frac{1}{16\pi G}\left(g_{\alpha\beta,\mu}\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{R})}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} - \delta^\nu_\mu\sqrt{|g|}\mathcal{R}\right). \tag{13}$$

Эти величины не являются компонентами тензора в пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu}$. Говорят, что они образуют псевдотензор энергии-импульса Эйнштейна.

Вспомним, что гравитационное действие можно представить в виде

$$S_{\text{грав}}[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^d x\,\sqrt{|g|}\,\mathcal{R}(g,\partial_\bullet g),\quad \mathcal{R} = g^{\mu\nu}(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\lambda}).$$

Будем относиться к $-\sqrt{|g|}\mathcal{R}/16\pi G$ как к обыкновенному лагранжиану для полей $g_{\mu\nu}$ в плоском пространстве-времени. Введем соответствующий канонический тензор энергии-импульса:

$$\sqrt{|g|}t^E{}_\mu{}^\nu = -\frac{1}{16\pi G}\left(g_{\alpha\beta,\mu}\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{R})}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} - \delta^\nu_\mu\sqrt{|g|}\mathcal{R}\right). \tag{13}$$

Эти величины не являются компонентами тензора в пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu}$. Говорят, что они образуют псевдотензор энергии-импульса Эйнштейна. Однако сумма тензора энергии-импульса материи и псевдотензора энергии-импульса гравитации удовлетворяет уравнению непрерывности:

$$\left(\sqrt{|g|}(T_\mu{}^\nu + t^E{}_\mu{}^\nu)\right)_{,\nu} = 0, \tag{14}$$

Псевдотензор энергии-импульса Эйнштейна

Вспомним, что гравитационное действие можно представить в виде

$$S_{\text{грав}}[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^d x\,\sqrt{|g|}\,\mathcal{R}(g, \partial_\bullet g), \quad \mathcal{R} = g^{\mu\nu}(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\lambda}).$$

Будем относиться к $-\sqrt{|g|}\mathcal{R}/16\pi G$ как к обыкновенному лагранжиану для полей $g_{\mu\nu}$ в плоском пространстве-времени. Введем соответствующий канонический тензор энергии-импульса:

$$\sqrt{|g|}t^E{}_\mu{}^\nu = -\frac{1}{16\pi G}\left(g_{\alpha\beta,\mu}\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{R})}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} - \delta^\nu_\mu\sqrt{|g|}\mathcal{R}\right). \tag{13}$$

Эти величины не являются компонентами тензора в пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu}$. Говорят, что они образуют псевдотензор энергии-импульса Эйнштейна. Однако сумма тензора энергии-импульса материи и псевдотензора энергии-импульса гравитации удовлетворяет уравнению непрерывности:

$$\left(\sqrt{|g|}(T_\mu{}^\nu + t^E{}_\mu{}^\nu)\right)_{,\nu} = 0, \tag{14}$$

так что вектор

$$P^E_\mu = \int d^{d-1}x\,\sqrt{|g|}(T_\mu{}^0 + t^E{}_\mu{}^0) \quad \text{сохраняется: } \dot{P}^E_\mu = 0. \tag{15}$$

Вспомним, что гравитационное действие можно представить в виде

$$S_{\text{грав}}[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^d x\,\sqrt{|g|}\,\mathcal{R}(g,\partial_\bullet g),\quad \mathcal{R} = g^{\mu\nu}(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\lambda}).$$

Будем относиться к $-\sqrt{|g|}\mathcal{R}/16\pi G$ как к обыкновенному лагранжиану для полей $g_{\mu\nu}$ в плоском пространстве-времени. Введем соответствующий канонический тензор энергии-импульса:

$$\sqrt{|g|}t^E{}_\mu{}^\nu = -\frac{1}{16\pi G}\left(g_{\alpha\beta,\mu}\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{R})}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} - \delta^\nu_\mu\sqrt{|g|}\mathcal{R}\right). \tag{13}$$

Эти величины не являются компонентами тензора в пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu}$. Говорят, что они образуют псевдотензор энергии-импульса Эйнштейна. Однако сумма тензора энергии-импульса материи и псевдотензора энергии-импульса гравитации удовлетворяет уравнению непрерывности:

$$\left(\sqrt{|g|}(T_\mu{}^\nu + t^E{}_\mu{}^\nu)\right)_{,\nu} = 0, \tag{14}$$

так что вектор

$$P^E_\mu = \int d^{d-1}x\,\sqrt{|g|}(T_\mu{}^0 + t^E{}_\mu{}^0)\quad \text{сохраняется: } \dot{P}^E_\mu = 0. \tag{15}$$

Используя уравнения Эйнштейна, получим

$$\sqrt{|g|}(T_\mu{}^\nu + t^E{}_\mu{}^\nu) = \underbrace{\sqrt{|g|}(-(T_{\text{грав}})_\mu{}^\nu + t^E{}_\mu{}^\nu)}_{\text{зависит только от метрики}} \tag{16}$$

Псевдотензор энергии-импульса Эйнштейна

Вспомним, что гравитационное действие можно представить в виде

$$S_{\text{грав}}[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^dx\,\sqrt{|g|}\,\mathcal{R}(g,\partial_\bullet g),\quad \mathcal{R} = g^{\mu\nu}(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\lambda}).$$

Будем относиться к $-\sqrt{|g|}\mathcal{R}/16\pi G$ как к обыкновенному лагранжиану для полей $g_{\mu\nu}$ в плоском пространстве-времени. Введем соответствующий канонический тензор энергии-импульса:

$$\sqrt{|g|}t^E{}_\mu{}^\nu = -\frac{1}{16\pi G}\left(g_{\alpha\beta,\mu}\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{R})}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} - \delta^\nu_\mu\sqrt{|g|}\mathcal{R}\right). \qquad (13)$$

Эти величины не являются компонентами тензора в пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu}$. Говорят, что они образуют псевдотензор энергии-импульса Эйнштейна. Однако сумма тензора энергии-импульса материи и псевдотензора энергии-импульса гравитации удовлетворяет уравнению непрерывности:

$$\left(\sqrt{|g|}(T_\mu{}^\nu + t^E{}_\mu{}^\nu)\right)_{,\nu} = 0, \qquad (14)$$

так что вектор

$$P^E_\mu = \int d^{d-1}x\,\sqrt{|g|}(T_\mu{}^0 + t^E{}_\mu{}^0) \quad \text{сохраняется: } \dot{P}^E_\mu = 0. \qquad (15)$$

Используя уравнения Эйнштейна, получим

$$\sqrt{|g|}(T_\mu{}^\nu + t^E{}_\mu{}^\nu) = \underbrace{\sqrt{|g|}(-(T_{\text{грав}})_\mu{}^\nu + t^E{}_\mu{}^\nu)}_{\text{зависит только от метрики}} = \underbrace{\partial_\lambda\tau^{E\,\nu\lambda}_\mu}_{\text{дивергенция}},\quad \tau^{E\,\nu\lambda}_\mu = -\tau^{E\,\lambda\nu}_\mu. \qquad (16)$$

Суперпотенциал

Функция $\tau_{\mu}^{E\,\nu\lambda}$ называется суперпотенциалом.

Суперпотенциал

Функция $\tau_\mu^{E\,\nu\lambda}$ называется суперпотенциалом. Суперпотенциал определен неоднозначно. Например, он может иметь вид

$$\tau_\mu^{E\,\nu\lambda} = |g|^{-1/2} g_{\mu\kappa} \chi^{\kappa\nu\lambda\rho}{}_{,\rho}, \quad \chi^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda} - g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda}). \tag{17}$$

Суперпотенциал

Функция $\tau_\mu^{E\,\nu\lambda}$ называется суперпотенциалом. Суперпотенциал определен неоднозначно. Например, он может иметь вид

$$\tau_\mu^{E\,\nu\lambda} = |g|^{-1/2} g_{\mu\kappa} \chi^{\kappa\nu\lambda\rho}{}_{,\rho}, \quad \chi^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda} - g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda}). \tag{17}$$

С его помощью вектор импульса записывается как интеграл по границе пространственно-подобной поверхности:

$$P_\mu^E = \int_S df_\nu\, \partial_\lambda \tau_\mu^{E\,\nu\lambda} = \frac{1}{2}\oint_{\partial S} df_{\nu\lambda}\, \tau_\mu^{E\,\nu\lambda}, \tag{18}$$

где

$$df_{\mu_1\dots\mu_k} = \frac{1}{(d-k)!}\epsilon_{\mu_1\dots\mu_d}\, dx^{\mu_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d}$$

Функция $\tau_\mu^{E\,\nu\lambda}$ называется суперпотенциалом. Суперпотенциал определен неоднозначно. Например, он может иметь вид

$$\tau_\mu^{E\,\nu\lambda} = |g|^{-1/2} g_{\mu\kappa} \chi^{\kappa\nu\lambda\rho}{}_{,\rho}, \quad \chi^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} - g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda}). \tag{17}$$

С его помощью вектор импульса записывается как интеграл по границе пространственно-подобной поверхности:

$$P_\mu^E = \int_S df_\nu \, \partial_\lambda \tau_\mu^{E\,\nu\lambda} = \frac{1}{2} \oint_{\partial S} df_{\nu\lambda} \, \tau_\mu^{E\,\nu\lambda}, \tag{18}$$

где

$$df_{\mu_1 \ldots \mu_k} = \frac{1}{(d-k)!} \epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_d} \, dx^{\mu_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_d}$$

Если пространство является асимптотически плоским, $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$ при $|\boldsymbol{r}| \to \infty$, энергия и импульс системы выражаются через асимптотику метрики. Это аналогично тому, как в ньютоновской механике полная масса системы выражается через асимптотику гравитационного потенциала.

Функция $\tau_\mu^{E\nu\lambda}$ называется суперпотенциалом. Суперпотенциал определен неоднозначно. Например, он может иметь вид

$$\tau_\mu^{E\nu\lambda} = |g|^{-1/2} g_{\mu\kappa} \chi^{\kappa\nu\lambda\rho}{}_{,\rho}, \quad \chi^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda} - g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda}). \tag{17}$$

С его помощью вектор импульса записывается как интеграл по границе пространственно-подобной поверхности:

$$P_\mu^E = \int_S df_\nu\, \partial_\lambda \tau_\mu^{E\nu\lambda} = \frac{1}{2}\oint_{\partial S} df_{\nu\lambda}\, \tau_\mu^{E\nu\lambda}, \tag{18}$$

где

$$df_{\mu_1\dots\mu_k} = \frac{1}{(d-k)!}\epsilon_{\mu_1\dots\mu_d}\, dx^{\mu_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_d}$$

Если пространство является асимптотически плоским, $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$ при $|\boldsymbol{r}| \to \infty$, энергия и импульс системы выражаются через асимптотику метрики. Это аналогично тому, как в ньютоновской механике полная масса системы выражается через асимптотику гравитационного потенциала. Недостаток псевдотензора Эйнштейна состоит в том, что он ни в каком смысле не симметричен. Поэтому через него нельзя выразить момент импульса. Этот недостаток исправляет псевдотензор Ландау—Лифшица.

Псевдотензор энергии-импульса Ландау—Лифшица

Рассмотрим некоторую точку x пространства времени. В ее окрестности выберем систему координат, в которой $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) = 0 \Leftrightarrow g_{\mu\nu,\lambda}(x) = 0$. В бесконечно малой окрестности этой точки система координат описывает свободно падающий объем. То есть, гравитационное поле в точке x равно нулю.

Псевдотензор энергии-импульса Ландау—Лифшица

Рассмотрим некоторую точку x пространства времени. В ее окрестности выберем систему координат, в которой $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) = 0 \Leftrightarrow g_{\mu\nu,\lambda}(x) = 0$. В бесконечно малой окрестности этой точки система координат описывает свободно падающий объем. То есть, гравитационное поле в точке x равно нулю.

Определим псевдотензор энергии-импульса Ландау—Лифшица $t^{\mu\nu}$ так, чтобы он был равен нулю в точке x.

Псевдотензор энергии-импульса Ландау—Лифшица

Рассмотрим некоторую точку x пространства времени. В ее окрестности выберем систему координат, в которой $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) = 0 \Leftrightarrow g_{\mu\nu,\lambda}(x) = 0$. В бесконечно малой окрестности этой точки система координат описывает свободно падающий объем. То есть, гравитационное поле в точке x равно нулю.

Определим псевдотензор энергии-импульса Ландау—Лифшица $t^{\mu\nu}$ так, чтобы он был равен нулю в точке x. Тогда имеем

$$|g|T^{\mu\nu} = -|g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = \partial_\lambda \tau^{\mu\nu\lambda},$$

где $\tau^{\mu\nu\lambda}$ — суперпотенциал Ландау—Лифшица:

$$\tau^{\mu\nu\lambda} = -\tau^{\mu\lambda\nu} = \chi^{\mu\nu\lambda\rho}{}_{,\rho}. \tag{19}$$

Псевдотензор энергии-импульса Ландау—Лифшица

Рассмотрим некоторую точку x пространства времени. В ее окрестности выберем систему координат, в которой $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) = 0 \Leftrightarrow g_{\mu\nu,\lambda}(x) = 0$. В бесконечно малой окрестности этой точки система координат описывает свободно падающий объем. То есть, гравитационное поле в точке x равно нулю.

Определим псевдотензор энергии-импульса Ландау—Лифшица $t^{\mu\nu}$ так, чтобы он был равен нулю в точке x. Тогда имеем

$$|g|T^{\mu\nu} = -|g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = \partial_\lambda \tau^{\mu\nu\lambda},$$

где $\tau^{\mu\nu\lambda}$ — суперпотенциал Ландау—Лифшица:

$$\tau^{\mu\nu\lambda} = -\tau^{\mu\lambda\nu} = \chi^{\mu\nu\lambda\rho}{}_{,\rho}. \tag{19}$$

Теперь в произвольной системе координат положим

$$|g|t^{\mu\nu} = |g|t^{\nu\mu} = |g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}} + \tau^{\mu\nu\lambda}{}_{,\lambda}. \tag{20}$$

Рассмотрим некоторую точку x пространства времени. В ее окрестности выберем систему координат, в которой $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) = 0 \Leftrightarrow g_{\mu\nu,\lambda}(x) = 0$. В бесконечно малой окрестности этой точки система координат описывает свободно падающий объем. То есть, гравитационное поле в точке x равно нулю.
Определим псевдотензор энергии-импульса Ландау—Лифшица $t^{\mu\nu}$ так, чтобы он был равен нулю в точке x. Тогда имеем

$$|g|T^{\mu\nu} = -|g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = \partial_\lambda \tau^{\mu\nu\lambda},$$

где $\tau^{\mu\nu\lambda}$ — суперпотенциал Ландау—Лифшица:

$$\tau^{\mu\nu\lambda} = -\tau^{\mu\lambda\nu} = \chi^{\mu\nu\lambda\rho}{}_{,\rho}. \tag{19}$$

Теперь в произвольной системе координат положим

$$|g|t^{\mu\nu} = |g|t^{\nu\mu} = |g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}} + \tau^{\mu\nu\lambda}{}_{,\lambda}. \tag{20}$$

Соответственно, величина

$$|g|(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = \tau^{\mu\nu\lambda}{}_{,\lambda} \tag{21}$$

Рассмотрим некоторую точку x пространства времени. В ее окрестности выберем систему координат, в которой $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) = 0 \Leftrightarrow g_{\mu\nu,\lambda}(x) = 0$. В бесконечно малой окрестности этой точки система координат описывает свободно падающий объем. То есть, гравитационное поле в точке x равно нулю.
Определим псевдотензор энергии-импульса Ландау—Лифшица $t^{\mu\nu}$ так, чтобы он был равен нулю в точке x. Тогда имеем

$$|g|T^{\mu\nu} = -|g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = \partial_\lambda \tau^{\mu\nu\lambda},$$

где $\tau^{\mu\nu\lambda}$ — суперпотенциал Ландау—Лифшица:

$$\tau^{\mu\nu\lambda} = -\tau^{\mu\lambda\nu} = \chi^{\mu\nu\lambda\rho}{}_{,\rho}. \tag{19}$$

Теперь в произвольной системе координат положим

$$|g|t^{\mu\nu} = |g|t^{\nu\mu} = |g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}} + \tau^{\mu\nu\lambda}{}_{,\lambda}. \tag{20}$$

Соответственно, величина

$$|g|(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = \tau^{\mu\nu\lambda}{}_{,\lambda} \tag{21}$$

удовлетворяет уравнению непрерывности

$$(|g|(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}))_{,\nu} = 0. \tag{22}$$

Отсюда следует, что импульс системы, определенный как

$$P^\mu = \int_S df_\nu \, |g|(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \oint_{\partial S} df_{\nu\lambda} \, \tau^{\mu\nu\lambda} \tag{23}$$

сохраняется в асимптотически плоском пространстве-времени: $\dot{P}^\mu = 0$.

Отсюда следует, что импульс системы, определенный как

$$P^\mu = \int_S df_\nu \, |g|(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \oint_{\partial S} df_{\nu\lambda} \, \tau^{\mu\nu\lambda} \tag{23}$$

сохраняется в асимптотически плоском пространстве-времени: $\dot{P}^\mu = 0$. Более того,

$$P^\mu = P^{E\mu}.$$

Отсюда следует, что импульс системы, определенный как

$$P^{\mu} = \int_S df_{\nu}\, |g|(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \oint_{\partial S} df_{\nu\lambda}\, \tau^{\mu\nu\lambda} \tag{23}$$

сохраняется в асимптотически плоском пространстве-времени: $\dot{P}^{\mu} = 0$. Более того,

$$P^{\mu} = P^{E\mu}.$$

Момент импульса системы определяется выражением

$$J^{\mu\nu} = \int_S df_{\lambda}\, |g| \left(x^{\mu}(T^{\nu\lambda} + t^{\nu\lambda}) - x^{\nu}(T^{\mu\lambda} + t^{\mu\lambda}) \right) \tag{24}$$

Отсюда следует, что импульс системы, определенный как

$$P^\mu = \int_S df_\nu \, |g|(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \oint_{\partial S} df_{\nu\lambda} \, \tau^{\mu\nu\lambda} \tag{23}$$

сохраняется в асимптотически плоском пространстве-времени: $\dot{P}^\mu = 0$. Более того,

$$P^\mu = P^{E\mu}.$$

Момент импульса системы определяется выражением

$$J^{\mu\nu} = \int_S df_\lambda \, |g| \left(x^\mu (T^{\nu\lambda} + t^{\nu\lambda}) - x^\nu (T^{\mu\lambda} + t^{\mu\lambda}) \right) \tag{24}$$

и тоже выражается через интеграл по границе

$$J^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \oint_{\partial S} df_{\alpha\beta} \, (x^\mu \tau^{\nu\alpha\beta} - x^\nu \tau^{\mu\alpha\beta} + \chi^{\mu\alpha\beta\nu}). \tag{25}$$

Отсюда следует, что импульс системы, определенный как

$$P^\mu = \int_S df_\nu\,|g|(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\oint_{\partial S} df_{\nu\lambda}\,\tau^{\mu\nu\lambda} \tag{23}$$

сохраняется в асимптотически плоском пространстве-времени: $\dot{P}^\mu = 0$. Более того,

$$P^\mu = P^{E\mu}.$$

Момент импульса системы определяется выражением

$$J^{\mu\nu} = \int_S df_\lambda\,|g|\,\Big(x^\mu(T^{\nu\lambda} + t^{\nu\lambda}) - x^\nu(T^{\mu\lambda} + t^{\mu\lambda})\Big) \tag{24}$$

и тоже выражается через интеграл по границе

$$J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\oint_{\partial S} df_{\alpha\beta}\,(x^\mu\tau^{\nu\alpha\beta} - x^\nu\tau^{\mu\alpha\beta} + \chi^{\mu\alpha\beta\nu}). \tag{25}$$

Центр инерции системы в данной системе координат определяется формулой

$$X^i = \frac{\int d^{d-1}x\,|g|(T^{00} + t^{00})x^i}{\int d^{d-1}x\,|g|(T^{00} + t^{00})} \tag{26}$$

В асимптотически плоском пространстве центр инерции движется с постоянной скоростью.

Синхронная система отсчета — это система координат с метрикой

$$g_{00} = 1, \quad g_{0i} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij}\, dx^i dx^j \,. \tag{27}$$

Синхронная система отсчета — это система координат с метрикой

$$g_{00} = 1, \quad g_{0i} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij}\, dx^i dx^j \,. \tag{27}$$

Задача. Найдите символы Кристоффеля в синхронной системе координат.

Синхронная система отсчета — это система координат с метрикой

$$g_{00} = 1, \quad g_{0i} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij}\, dx^i dx^j. \tag{27}$$

Задача. Найдите символы Кристоффеля в синхронной системе координат.

$$\Gamma^0_{0\mu} = \Gamma^\mu_{00} = 0, \qquad \Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij,0}, \qquad \Gamma^i_{j0} = \frac{1}{2}\gamma^{ik}\gamma_{kj,0}, \qquad \Gamma^i_{jk} = \tilde{\Gamma}^i_{jk},$$

где $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ — пространственные символы Кристоффеля, вычисленные по метрике γ_{ij}.

Синхронная система отсчета — это система координат с метрикой

$$g_{00} = 1, \quad g_{0i} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij}\, dx^i dx^j . \tag{27}$$

Задача. Найдите символы Кристоффеля в синхронной системе координат.

$$\Gamma^0_{0\mu} = \Gamma^\mu_{00} = 0, \qquad \Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij,0}, \qquad \Gamma^i_{j0} = \frac{1}{2}\gamma^{ik}\gamma_{kj,0}, \qquad \Gamma^i_{jk} = \tilde{\Gamma}^i_{jk},$$

где $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ — пространственные символы Кристоффеля, вычисленные по метрике γ_{ij}.

Задача. Напишите уравнения геодезических.

Синхронная система отсчета — это система координат с метрикой

$$g_{00} = 1, \quad g_{0i} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij}\, dx^i dx^j. \tag{27}$$

Задача. Найдите символы Кристоффеля в синхронной системе координат.

$$\Gamma^0_{0\mu} = \Gamma^\mu_{00} = 0, \qquad \Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij,0}, \qquad \Gamma^i_{j0} = \frac{1}{2}\gamma^{ik}\gamma_{kj,0}, \qquad \Gamma^i_{jk} = \tilde{\Gamma}^i_{jk},$$

где $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ — пространственные символы Кристоффеля, вычисленные по метрике γ_{ij}.

Задача. Напишите уравнения геодезических.

$$\ddot{x}^0 + \Gamma^0_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \qquad \ddot{x}^i + 2\Gamma^i_{j0}\dot{x}^i\dot{x}^0 + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^i\dot{x}^k = 0. \tag{28}$$

Синхронная система отсчета — это система координат с метрикой

$$g_{00} = 1, \quad g_{0i} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij}\, dx^i dx^j. \tag{27}$$

Задача. Найдите символы Кристоффеля в синхронной системе координат.

$$\Gamma^0_{0\mu} = \Gamma^\mu_{00} = 0, \qquad \Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij,0}, \qquad \Gamma^i_{j0} = \frac{1}{2}\gamma^{ik}\gamma_{kj,0}, \qquad \Gamma^i_{jk} = \tilde{\Gamma}^i_{jk},$$

где $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ — пространственные символы Кристоффеля, вычисленные по метрике γ_{ij}.

Задача. Напишите уравнения геодезических.

$$\ddot{x}^0 + \Gamma^0_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \qquad \ddot{x}^i + 2\Gamma^i_{j0}\dot{x}^i\dot{x}^0 + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^i\dot{x}^k = 0. \tag{28}$$

Вы видите, что если $\dot{x}^i(0) = 0$, то и $\dot{x}^i(\tau) = 0 \ \forall\tau$.

Синхронная система отсчета — это система координат с метрикой

$$g_{00} = 1, \quad g_{0i} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij}\, dx^i dx^j . \tag{27}$$

Задача. Найдите символы Кристоффеля в синхронной системе координат.

$$\Gamma^0_{0\mu} = \Gamma^\mu_{00} = 0, \qquad \Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij,0}, \qquad \Gamma^i_{j0} = \frac{1}{2}\gamma^{ik}\gamma_{kj,0}, \qquad \Gamma^i_{jk} = \tilde{\Gamma}^i_{jk},$$

где $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ — пространственные символы Кристоффеля, вычисленные по метрике γ_{ij}.

Задача. Напишите уравнения геодезических.

$$\ddot{x}^0 + \Gamma^0_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \qquad \ddot{x}^i + 2\Gamma^i_{j0}\dot{x}^i\dot{x}^0 + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^i\dot{x}^k = 0. \tag{28}$$

Вы видите, что если $\dot{x}^i(0) = 0$, то и $\dot{x}^i(\tau) = 0\ \forall\tau$. Значит линии $x^i = \mathrm{const}$ образуют конгруэнцию геодезических, а $t = \tau + \mathrm{const}$.

Синхронная система отсчета — это система координат с метрикой

$$g_{00} = 1, \quad g_{0i} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij}\, dx^i dx^j. \tag{27}$$

Задача. Найдите символы Кристоффеля в синхронной системе координат.

$$\Gamma^0_{0\mu} = \Gamma^\mu_{00} = 0, \qquad \Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij,0}, \qquad \Gamma^i_{j0} = \frac{1}{2}\gamma^{ik}\gamma_{kj,0}, \qquad \Gamma^i_{jk} = \tilde{\Gamma}^i_{jk},$$

где $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ — пространственные символы Кристоффеля, вычисленные по метрике γ_{ij}.

Задача. Напишите уравнения геодезических.

$$\ddot{x}^0 + \Gamma^0_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \qquad \ddot{x}^i + 2\Gamma^i_{j0}\dot{x}^i\dot{x}^0 + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^i\dot{x}^k = 0. \tag{28}$$

Вы видите, что если $\dot{x}^i(0) = 0$, то и $\dot{x}^i(\tau) = 0$ $\forall\tau$. Значит линии $x^i = \mathrm{const}$ образуют конгруэнцию геодезических, а $t = \tau + \mathrm{const}$.

Эта конгруэнция ограничена в пространстве фокальными точками. Если сузить область пространства, можно продлить конгруэнцию дальше, но не дальше каустики, то есть огибающей поверхности кривых:

$$\det(\gamma_{ij}) = 0.$$

Синхронная система отсчета — это система координат с метрикой

$$g_{00}=1,\quad g_{0i}=0\qquad\Leftrightarrow\qquad ds^2=dt^2-\gamma_{ij}\,dx^i dx^j. \tag{27}$$

Задача. Найдите символы Кристоффеля в синхронной системе координат.

$$\Gamma^0_{0\mu}=\Gamma^\mu_{00}=0,\qquad \Gamma^0_{ij}=\frac{1}{2}\gamma_{ij,0},\qquad \Gamma^i_{j0}=\frac{1}{2}\gamma^{ik}\gamma_{kj,0},\qquad \Gamma^i_{jk}=\tilde\Gamma^i_{jk},$$

где $\tilde\Gamma^i_{jk}$ — пространственные символы Кристоффеля, вычисленные по метрике γ_{ij}.

Задача. Напишите уравнения геодезических.

$$\ddot x^0+\Gamma^0_{ij}\dot x^i\dot x^j=0,\qquad \ddot x^i+2\Gamma^i_{j0}\dot x^i\dot x^0+\Gamma^i_{jk}\dot x^i\dot x^k=0. \tag{28}$$

Вы видите, что если $\dot x^i(0)=0$, то и $\dot x^i(\tau)=0\ \forall\tau$. Значит линии $x^i=\mathrm{const}$ образуют конгруэнцию геодезических, а $t=\tau+\mathrm{const}$.

Эта конгруэнция ограничена в пространстве фокальными точками. Если сузить область пространства, можно продлить конгруэнцию дальше, но не дальше каустики, то есть огибающей поверхности кривых:

$$\det(\gamma_{ij})=0.$$

Таким образом синхронную систему координат можно определить в достаточном малой пространственно-временной окрестности любой точки.

Собственное время τ связано с действием свободной частицы соотношением $\tau = -S/m$.

Собственное время τ связано с действием свободной частицы соотношением $\tau = -S/m$. Поэтому оно как функция конечной точки удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби:

$$g^{\mu\nu}\tau_{,\mu}\tau_{,\nu} = 1. \tag{29}$$

Собственное время τ связано с действием свободной частицы соотношением $\tau = -S/m$. Поэтому оно как функция конечной точки удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби:

$$g^{\mu\nu}\tau_{,\mu}\tau_{,\nu} = 1. \tag{29}$$

При этом, как мы знаем

$$\tau_{,\mu} = g_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu}. \tag{30}$$

Собственное время τ связано с действием свободной частицы соотношением $\tau = -S/m$. Поэтому оно как функция конечной точки удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби:

$$g^{\mu\nu}\tau_{,\mu}\tau_{,\nu} = 1. \tag{29}$$

При этом, как мы знаем

$$\tau_{,\mu} = g_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu}. \tag{30}$$

Пусть мы имеем полный интеграл, зависящий от постоянных $y^1, \ldots, y^{d-1}$:

$$\tau = f(y^1, \ldots, y^{d-1}; x^0, x^1, \ldots, x^{d-1}). \tag{31}$$

Собственное время τ связано с действием свободной частицы соотношением $\tau = -S/m$. Поэтому оно как функция конечной точки удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби:

$$g^{\mu\nu}\tau_{,\mu}\tau_{,\nu} = 1. \tag{29}$$

При этом, как мы знаем

$$\tau_{,\mu} = g_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu}. \tag{30}$$

Пусть мы имеем полный интеграл, зависящий от постоянных $y^1, \ldots, y^{d-1}$:

$$\tau = f(y^1, \ldots, y^{d-1}; x^0, x^1, \ldots, x^{d-1}). \tag{31}$$

Геодезические определяются из уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = z_i. \tag{32}$$

Собственное время τ связано с действием свободной частицы соотношением $\tau = -S/m$. Поэтому оно как функция конечной точки удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби:

$$g^{\mu\nu}\tau_{,\mu}\tau_{,\nu} = 1. \tag{29}$$

При этом, как мы знаем

$$\tau_{,\mu} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu. \tag{30}$$

Пусть мы имеем полный интеграл, зависящий от постоянных $y^1, \ldots, y^{d-1}$:

$$\tau = f(y^1, \ldots, y^{d-1}; x^0, x^1, \ldots, x^{d-1}). \tag{31}$$

Геодезические определяются из уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = z_i. \tag{32}$$

Переопределяя $f \to f + z_i y^i$, запишем эти уравнения в виде

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = 0. \tag{33}$$

Собственное время τ связано с действием свободной частицы соотношением $\tau = -S/m$. Поэтому оно как функция конечной точки удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби:

$$g^{\mu\nu}\tau_{,\mu}\tau_{,\nu} = 1. \tag{29}$$

При этом, как мы знаем

$$\tau_{,\mu} = g_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu}. \tag{30}$$

Пусть мы имеем полный интеграл, зависящий от постоянных $y^1, \ldots, y^{d-1}$:

$$\tau = f(y^1, \ldots, y^{d-1}; x^0, x^1, \ldots, x^{d-1}). \tag{31}$$

Геодезические определяются из уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = z_i. \tag{32}$$

Переопределяя $f \to f + z_i y^i$, запишем эти уравнения в виде

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = 0. \tag{33}$$

Положим $y^0 = \tau$. Уравнения (31), (33) задают функцию $x(y) = x(y^0, \ldots, y^{d-1})$.

Собственное время τ связано с действием свободной частицы соотношением $\tau = -S/m$. Поэтому оно как функция конечной точки удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби:

$$g^{\mu\nu}\tau_{,\mu}\tau_{,\nu} = 1. \tag{29}$$

При этом, как мы знаем

$$\tau_{,\mu} = g_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu}. \tag{30}$$

Пусть мы имеем полный интеграл, зависящий от постоянных $y^1, \ldots, y^{d-1}$:

$$\tau = f(y^1, \ldots, y^{d-1}; x^0, x^1, \ldots, x^{d-1}). \tag{31}$$

Геодезические определяются из уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = z_i. \tag{32}$$

Переопределяя $f \to f + z_i y^i$, запишем эти уравнения в виде

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = 0. \tag{33}$$

Положим $y^0 = \tau$. Уравнения (31), (33) задают функцию $x(y) = x(y^0, \ldots, y^{d-1})$. Тогда в силу (33) имеем

$$dy^0 = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu(y).$$

Собственное время τ связано с действием свободной частицы соотношением $\tau = -S/m$. Поэтому оно как функция конечной точки удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби:

$$g^{\mu\nu}\tau_{,\mu}\tau_{,\nu} = 1. \tag{29}$$

При этом, как мы знаем

$$\tau_{,\mu} = g_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu}. \tag{30}$$

Пусть мы имеем полный интеграл, зависящий от постоянных $y^1, \dots, y^{d-1}$:

$$\tau = f(y^1, \dots, y^{d-1}; x^0, x^1, \dots, x^{d-1}). \tag{31}$$

Геодезические определяются из уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = z_i. \tag{32}$$

Переопределяя $f \to f + z_i y^i$, запишем эти уравнения в виде

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = 0. \tag{33}$$

Положим $y^0 = \tau$. Уравнения (31), (33) задают функцию $x(y) = x(y^0, \dots, y^{d-1})$. Тогда в силу (33) имеем

$$dy^0 = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu(y).$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} = 0. \tag{34}$$

Задача. Выразите ds^2 через dy^μ.

Задача. Выразите ds^2 через dy^μ.

$$ds^2 = (dy^0)^2 - \gamma_{ij}\, dy^i dy^j, \qquad \gamma_{ij} = -g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}. \tag{35}$$

Задача. Выразите ds^2 через dy^μ.

$$ds^2 = (dy^0)^2 - \gamma_{ij}\, dy^i dy^j, \qquad \gamma_{ij} = -g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}. \tag{35}$$

Вот вывод:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^0}dy^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}dy^i\right)\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^0}dy^0 + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^i}dy^i\right)$$

Задача. Выразите ds^2 через dy^μ.

$$ds^2 = (dy^0)^2 - \gamma_{ij}\, dy^i dy^j, \qquad \gamma_{ij} = -g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}. \tag{35}$$

Вот вывод:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^0} dy^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} dy^i\right)\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^0} dy^0 + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^i} dy^i\right) \\ &= g_{\mu\nu}\left(g^{\mu\kappa}\frac{\partial f}{\partial x^\kappa} dy^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} dy^i\right)\left(g^{\nu\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\lambda} dy^0 + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^i} dy^i\right) \end{aligned}$$

Семинар. Синхронная система отсчета. Существование

Задача. Выразите ds^2 через dy^μ.

$$ds^2 = (dy^0)^2 - \gamma_{ij}\, dy^i dy^j, \qquad \gamma_{ij} = -g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}. \tag{35}$$

Вот вывод:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^0} dy^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} dy^i \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^0} dy^0 + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^i} dy^i \right) \\
&= g_{\mu\nu} \left(g^{\mu\kappa} \frac{\partial f}{\partial x^\kappa} dy^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} dy^i \right) \left(g^{\nu\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} dy^0 + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^i} dy^i \right) \\
&= \underbrace{g^{\kappa\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\kappa} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}}_{} (dy^0)^2 + 2 \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}}_{} dy^0 dy^i + \underbrace{g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}}_{} dy^i dy^j .
\end{aligned}$$

Задача. Выразите ds^2 через dy^μ.

$$ds^2 = (dy^0)^2 - \gamma_{ij}\, dy^i dy^j, \qquad \gamma_{ij} = -g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}. \tag{35}$$

Вот вывод:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^0} dy^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} dy^i \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^0} dy^0 + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^i} dy^i \right) \\ &= g_{\mu\nu} \left(g^{\mu\kappa} \frac{\partial f}{\partial x^\kappa} dy^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} dy^i \right) \left(g^{\nu\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} dy^0 + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^i} dy^i \right) \\ &= \underbrace{g^{\kappa\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\kappa} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}}_{\substack{=1 \\ \text{согласно (29)}}} (dy^0)^2 + 2 \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}} dy^0 dy^i + \underbrace{g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}} dy^i dy^j . \end{aligned}$$

Задача. Выразите ds^2 через dy^μ.

$$ds^2 = (dy^0)^2 - \gamma_{ij}\, dy^i dy^j, \qquad \gamma_{ij} = -g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}. \tag{35}$$

Вот вывод:

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^0}dy^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}dy^i\right)\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^0}dy^0 + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^i}dy^i\right) \\ &= g_{\mu\nu}\left(g^{\mu\kappa}\frac{\partial f}{\partial x^\kappa}dy^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}dy^i\right)\left(g^{\nu\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}dy^0 + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^i}dy^i\right) \\ &= \underbrace{g^{\kappa\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\kappa}\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}}_{\substack{=1 \\ \text{согласно (29)}}}(dy^0)^2 + 2\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}}_{\substack{=0 \\ \text{согласно (34)}}}dy^0 dy^i + \underbrace{g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}}\, dy^i dy^j. \end{aligned}$$

Задача. Выразите ds^2 через dy^μ.

$$ds^2 = (dy^0)^2 - \gamma_{ij}\, dy^i dy^j, \qquad \gamma_{ij} = -g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}. \tag{35}$$

Вот вывод:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^0} dy^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} dy^i\right)\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^0} dy^0 + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^i} dy^i\right) \\
&= g_{\mu\nu}\left(g^{\mu\kappa}\frac{\partial f}{\partial x^\kappa} dy^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} dy^i\right)\left(g^{\nu\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\lambda} dy^0 + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^i} dy^i\right) \\
&= \underbrace{g^{\kappa\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\kappa}\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}}_{\substack{=1 \\ \text{согласно (29)}}} (dy^0)^2 + 2\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}}_{\substack{=0 \\ \text{согласно (34)}}} dy^0 dy^i + \underbrace{g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}}_{=-\gamma_{ij}} dy^i dy^j .
\end{aligned}$$