Лекция 5. Поля в гравитационном поле. Тензор энергии-импульса

Михаил Лашкевич

Лагранжево описание теории поля

Пусть $\phi^r(x)$ $(r = 1, \ldots, N)$ — набор вещественных полей. Рассмотрим теорию с действием

$$S[\phi] = \int d^d x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi), \tag{1}$$

где функция $\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi)$ поля и его производных называется плотностью лагранжиана.

Лагранжево описание теории поля

Пусть $\phi^r(x)$ $(r = 1, \ldots, N)$ — набор вещественных полей. Рассмотрим теорию с действием

$$S[\phi] = \int d^d x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi), \tag{1}$$

где функция $\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi)$ поля и его производных называется плотностью лагранжиана. Уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^r)} = 0. \tag{2}$$

Лагранжево описание теории поля

Пусть $\phi^r(x)$ $(r = 1, \ldots, N)$ — набор вещественных полей. Рассмотрим теорию с действием

$$S[\phi] = \int d^d x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi), \tag{1}$$

где функция $\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi)$ поля и его производных называется плотностью лагранжиана. Уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^r)} = 0. \tag{2}$$

Простой пример: $N = 1$ и

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^{d-1} x \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \, \partial_\nu \phi - \omega_0^2 \phi^2 \right). \tag{3}$$

Лагранжево описание теории поля

Пусть $\phi^r(x)$ $(r = 1, \dots, N)$ — набор вещественных полей. Рассмотрим теорию с действием

$$S[\phi] = \int d^d x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi), \tag{1}$$

где функция $\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi)$ поля и его производных называется плотностью лагранжиана. Уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^r)} = 0. \tag{2}$$

Простой пример: $N = 1$ и

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^{d-1} x \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi\, \partial_\nu \phi - \omega_0^2 \phi^2 \right). \tag{3}$$

Соответствующее уравнение движения

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \omega_0^2 \phi = 0 \tag{4}$$

называется уравнением Клейна—Го́рдона.

Пусть $\phi^r(x)$ $(r = 1, \dots, N)$ — набор вещественных полей. Рассмотрим теорию с действием

$$S[\phi] = \int d^d x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi), \tag{1}$$

где функция $\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi)$ поля и его производных называется плотностью лагранжиана. Уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^r)} = 0. \tag{2}$$

Простой пример: $N = 1$ и

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^{d-1} x \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi\, \partial_\nu \phi - \omega_0^2 \phi^2\right). \tag{3}$$

Соответствующее уравнение движения

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \omega_0^2 \phi = 0 \tag{4}$$

называется уравнением Клейна—Гóрдона. Подставляя

$$\phi_{k,\alpha}(x) = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx + \mathrm{i}\alpha},$$

легко находим

$$k^2 = \omega_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad k^0 = \varepsilon \omega_{\boldsymbol{k}} \equiv \varepsilon \sqrt{\omega_0^2 + \boldsymbol{k}^2}, \quad \varepsilon = \pm. \tag{5}$$

Лагранжево описание теории поля

Пусть $\phi^r(x)$ $(r = 1, \ldots, N)$ — набор вещественных полей. Рассмотрим теорию с действием

$$S[\phi] = \int d^d x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi), \tag{1}$$

где функция $\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi)$ поля и его производных называется плотностью лагранжиана. Уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^r)} = 0. \tag{2}$$

Простой пример: $N = 1$ и

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^{d-1} x \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi\, \partial_\nu \phi - \omega_0^2 \phi^2 \right). \tag{3}$$

Соответствующее уравнение движения

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \omega_0^2 \phi = 0 \tag{4}$$

называется уравнением Клейна—Го́рдона. Подставляя

$$\phi_{k,\alpha}(x) = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx + \mathrm{i}\alpha},$$

легко находим

$$k^2 = \omega_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad k^0 = \varepsilon \omega_{\boldsymbol{k}} \equiv \varepsilon \sqrt{\omega_0^2 + \boldsymbol{k}^2}, \quad \varepsilon = \pm. \tag{5}$$

Общее решение является линейной комбинацией плоских волн с различными $\boldsymbol{k}$, знаками ε и значениями фазы, например, $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}$.

Трансляционная инвариантность. Канонический тензор энергии-импульса

В плоском пространстве-времени плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ для фундаментальный полей не зависит от координат.

Трансляционная инвариантность. Канонический тензор энергии-импульса

В плоском пространстве-времени плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ для фундаментальный полей не зависит от координат.
Изучим изменение действия при сдвигах $x = x' + \xi$, $\xi = \mathrm{const}$:

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_\xi \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} \delta_\xi \phi_{,\lambda} \right) - \int_U d^d x \, \xi^\mu \partial_\mu \mathcal{L}. \tag{6}$$

Трансляционная инвариантность. Канонический тензор энергии-импульса

В плоском пространстве-времени плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ для фундаментальный полей не зависит от координат.
Изучим изменение действия при сдвигах $x = x' + \xi$, $\xi = \mathrm{const}$:

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_\xi \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} \delta_\xi \phi_{,\lambda} \right) - \int_U d^d x \, \xi^\mu \partial_\mu \mathcal{L}. \tag{6}$$

Имеем для производных Ли по постоянным векторам

$$\delta_\xi \phi = \xi^\mu \phi_{,\mu}, \qquad \delta_\xi \phi_{,\lambda} = \xi^\mu \phi_{,\lambda\mu}.$$

Трансляционная инвариантность. Канонический тензор энергии-импульса

В плоском пространстве-времени плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ для фундаментальный полей не зависит от координат.
Изучим изменение действия при сдвигах $x = x' + \xi$, $\xi = \text{const}$:

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_\xi \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} \delta_\xi \phi_{,\lambda} \right) - \int_U d^d x \, \xi^\mu \partial_\mu \mathcal{L}. \qquad (6)$$

Имеем для производных Ли по постоянным векторам

$$\delta_\xi \phi = \xi^\mu \phi_{,\mu}, \qquad \delta_\xi \phi_{,\lambda} = \xi^\mu \phi_{,\lambda\mu}.$$

Перегруппируя слагаемые, получаем

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \, \xi^\mu \phi_{,\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} \right) + \xi^\mu \int_U d^d x \, \partial_\lambda T_\mu{}^\lambda, \qquad (7)$$

В плоском пространстве-времени плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ для фундаментальный полей не зависит от координат.
Изучим изменение действия при сдвигах $x = x' + \xi$, $\xi = \mathrm{const}$:

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_\xi \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} \delta_\xi \phi_{,\lambda} \right) - \int_U d^d x \, \xi^\mu \partial_\mu \mathcal{L}. \tag{6}$$

Имеем для производных Ли по постоянным векторам

$$\delta_\xi \phi = \xi^\mu \phi_{,\mu}, \qquad \delta_\xi \phi_{,\lambda} = \xi^\mu \phi_{,\lambda\mu}.$$

Перегруппируя слагаемые, получаем

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \, \xi^\mu \phi_{,\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} \right) + \xi^\mu \int_U d^d x \, \partial_\lambda T_\mu{}^\lambda, \tag{7}$$

где

$$T_\mu{}^\nu = \partial_\mu \phi^r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi^r)} - \delta^\nu_\mu \mathcal{L} + \partial_\lambda f_\mu{}^{\nu\lambda}, \qquad f_\mu{}^{\nu\lambda} = -f_\mu{}^{\lambda\nu}, \tag{8}$$

называется каноническим тензором энергии-импульса.

В плоском пространстве-времени плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ для фундаментальный полей не зависит от координат.
Изучим изменение действия при сдвигах $x = x' + \xi$, $\xi = \text{const}$:

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_\xi \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} \delta_\xi \phi_{,\lambda} \right) - \int_U d^d x\, \xi^\mu \partial_\mu \mathcal{L}. \tag{6}$$

Имеем для производных Ли по постоянным векторам

$$\delta_\xi \phi = \xi^\mu \phi_{,\mu}, \qquad \delta_\xi \phi_{,\lambda} = \xi^\mu \phi_{,\lambda\mu}.$$

Перегруппируя слагаемые, получаем

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x\, \xi^\mu \phi_{,\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} \right) + \xi^\mu \int_U d^d x\, \partial_\lambda T_\mu{}^\lambda, \tag{7}$$

где

$$T_\mu{}^\nu = \partial_\mu \phi^r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi^r)} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} + \partial_\lambda f_\mu{}^{\nu\lambda}, \qquad f_\mu{}^{\nu\lambda} = -f_\mu{}^{\lambda\nu}, \tag{8}$$

называется каноническим тензором энергии-импульса. Добавка $f_\mu{}^{\nu\lambda}$ выбирается так, чтобы тензор $T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\lambda} T_\lambda{}^\nu$ был симметричен:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \tag{9}$$

Из (7) следует, что на решениях уравнений движения

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \tag{10}$$

Из (7) следует, что на решениях уравнений движения

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \tag{10}$$

Отсюда величина

$$P^\mu = \int_S df_\nu \, T^{\mu\nu}, \tag{11}$$

где интеграл берется по пространственноподобной поверхности S не зависит от S.

Из (7) следует, что на решениях уравнений движения

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \tag{10}$$

Отсюда величина

$$P^\mu = \int_S df_\nu \, T^{\mu\nu}, \tag{11}$$

где интеграл берется по пространственноподобной поверхности S не зависит от S. Если взять поверхность $x^0 = t$, то

$$\dot{P}^\mu \equiv \frac{dP^\mu}{dt} = 0. \tag{12}$$

Из (7) следует, что на решениях уравнений движения

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \tag{10}$$

Отсюда величина

$$P^\mu = \int_S df_\nu \, T^{\mu\nu}, \tag{11}$$

где интеграл берется по пространственноподобной поверхности S не зависит от S. Если взять поверхность $x^0 = t$, то

$$\dot{P}^\mu \equiv \frac{dP^\mu}{dt} = 0. \tag{12}$$

Момент импульса

$$J^{\mu\nu} = \int_S df_\lambda \, (x^\mu T^{\nu\lambda} - x^\nu T^{\mu\lambda}). \tag{13}$$

также не зависит от поверхности S, если тензор энергии-импульса симметризуем.

Из (7) следует, что на решениях уравнений движения

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \tag{10}$$

Отсюда величина

$$P^\mu = \int_S df_\nu \, T^{\mu\nu}, \tag{11}$$

где интеграл берется по пространственноподобной поверхности S не зависит от S. Если взять поверхность $x^0 = t$, то

$$\dot{P}^\mu \equiv \frac{dP^\mu}{dt} = 0. \tag{12}$$

Момент импульса

$$J^{\mu\nu} = \int_S df_\lambda \, (x^\mu T^{\nu\lambda} - x^\nu T^{\mu\lambda}). \tag{13}$$

также не зависит от поверхности S, если тензор энергии-импульса симметризуем. Если выбрать поверхность $x^0 = t$, получаем закон сохранения

$$\dot{J}^{\mu\nu} = 0. \tag{14}$$

Смысл компонент тензора энергии-импульса

Компоненты тензора энергии-импульса:

$$\rho = T^{00}, \qquad S^i = T^{0i} = T^{i0}, \qquad \sigma^{ij} = -T^{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, d-1). \tag{15}$$

Смысл компонент тензора энергии-импульса

Компоненты тензора энергии-импульса:

$$\rho = T^{00}, \qquad S^i = T^{0i} = T^{i0}, \qquad \sigma^{ij} = -T^{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, d-1). \tag{15}$$

Здесь

- ρ — плотность энергии;

Смысл компонент тензора энергии-импульса

Компоненты тензора энергии-импульса:

$$\rho = T^{00}, \qquad S^i = T^{0i} = T^{i0}, \qquad \sigma^{ij} = -T^{ij} \quad (i, j = 1, \dots, d-1). \tag{15}$$

Здесь

- ρ — плотность энергии;
- S^i — плотность потока энергии или плотность импульса;

Смысл компонент тензора энергии-импульса

Компоненты тензора энергии-импульса:

$$\rho = T^{00}, \qquad S^i = T^{0i} = T^{i0}, \qquad \sigma^{ij} = -T^{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, d-1). \tag{15}$$

Здесь

- ρ — плотность энергии;
- S^i — плотность потока энергии или плотность импульса;
- σ^{ij} — тензор напряжений.

Смысл компонент тензора энергии-импульса

Компоненты тензора энергии-импульса:

$$\rho = T^{00}, \qquad S^i = T^{0i} = T^{i0}, \qquad \sigma^{ij} = -T^{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, d-1). \tag{15}$$

Здесь

- ρ — плотность энергии;
- S^i — плотность потока энергии или плотность импульса;
- σ^{ij} — тензор напряжений.

Пример. Электромагнитное поле:

$$S_{EM}[A] = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \tag{16}$$

Смысл компонент тензора энергии-импульса

Компоненты тензора энергии-импульса:

$$\rho = T^{00}, \qquad S^i = T^{0i} = T^{i0}, \qquad \sigma^{ij} = -T^{ij} \quad (i,j = 1,\dots,d-1). \tag{15}$$

Здесь

- ρ — плотность энергии;
- S^i — плотность потока энергии или плотность импульса;
- σ^{ij} — тензор напряжений.

Пример. Электромагнитное поле:

$$S_{EM}[A] = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \tag{16}$$

Для компонент тензора энергии-импульса имеем

$$\rho = \frac{\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2}{2}, \qquad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}, \qquad \sigma^{ij} = E_iE_j + H_iH_j - \rho\delta_{ij}. \tag{17}$$

Теория поля в искривленном пространстве-времени

Рассмотрим пространство с метрикой g. Действие зависит от полей ϕ^r и метрики:

$$S[\phi|g] = \int d^d x \sqrt{|g|} \mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi | g, \partial_\bullet g, \ldots). \tag{18}$$

По полям ϕ мы будем варьировать, а метрику рассматривать как параметр.

Теория поля в искривленном пространстве-времени

Рассмотрим пространство с метрикой g. Действие зависит от полей ϕ^r и метрики:

$$S[\phi|g] = \int d^d x \sqrt{|g|} \mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi | g, \partial_\bullet g, \ldots). \tag{18}$$

По полям ϕ мы будем варьировать, а метрику рассматривать как параметр. Лагранжиан называется общековариантным, если действие инвариантно по отношению к преобразованиям координат.

Рассмотрим пространство с метрикой g. Действие зависит от полей ϕ^r и метрики:

$$S[\phi|g] = \int d^d x \sqrt{|g|} \mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi | g, \partial_\bullet g, \ldots). \tag{18}$$

По полям ϕ мы будем варьировать, а метрику рассматривать как параметр. Лагранжиан называется общековариантным, если действие инвариантно по отношению к преобразованиям координат.

Пример. Лагранжианы для скалярных полей вида

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} G_{ij}(\phi)\, \partial_\mu \phi^i\, \partial_\nu \phi^j - U(\phi) - RV(\phi) \tag{19}$$

являются общековариантными.

Теория поля в искривленном пространстве-времени

Рассмотрим пространство с метрикой g. Действие зависит от полей ϕ^r и метрики:

$$S[\phi|g] = \int d^d x\, \sqrt{|g|}\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi|g, \partial_\bullet g, \ldots). \tag{18}$$

По полям ϕ мы будем варьировать, а метрику рассматривать как параметр. Лагранжиан называется общековариантным, если действие инвариантно по отношению к преобразованиям координат.

Пример. Лагранжианы для скалярных полей вида

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} G_{ij}(\phi)\, \partial_\mu \phi^i\, \partial_\nu \phi^j - U(\phi) - RV(\phi) \tag{19}$$

являются общековариантными.

Прием для построения общековариантных лагранжианов. Надо взять любой лагранжиан специальной теории относительности и сделать замену

$$\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}, \qquad \partial_\mu \to \nabla_\mu. \tag{20}$$

Такие лагранжианы называются лагранжианами с минимальной связью.

Рассмотрим пространство с метрикой g. Действие зависит от полей ϕ^r и метрики:

$$S[\phi|g] = \int d^d x \sqrt{|g|} \mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi | g, \partial_\bullet g, \ldots). \tag{18}$$

По полям ϕ мы будем варьировать, а метрику рассматривать как параметр. Лагранжиан называется общековариантным, если действие инвариантно по отношению к преобразованиям координат.
Пример. Лагранжианы для скалярных полей вида

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} G_{ij}(\phi)\, \partial_\mu \phi^i\, \partial_\nu \phi^j - U(\phi) - RV(\phi) \tag{19}$$

являются общековариантными.
Прием для построения общековариантных лагранжианов. Надо взять любой лагранжиан специальной теории относительности и сделать замену

$$\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}, \qquad \partial_\mu \to \nabla_\mu. \tag{20}$$

Такие лагранжианы называются лагранжианами с минимальной связью. Иными словами,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi | g, \partial_\bullet g, \ldots) = \mathcal{L}(\phi, \nabla_\bullet \phi | g, 0, \ldots, 0). \tag{21}$$

Рассмотрим пространство с метрикой g. Действие зависит от полей ϕ^r и метрики:

$$S[\phi|g] = \int d^d x\, \sqrt{|g|}\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet\phi|g, \partial_\bullet g, \ldots). \tag{18}$$

По полям ϕ мы будем варьировать, а метрику рассматривать как параметр. Лагранжиан называется общековариантным, если действие инвариантно по отношению к преобразованиям координат.
Пример. Лагранжианы для скалярных полей вида

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet\phi) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} G_{ij}(\phi)\, \partial_\mu \phi^i\, \partial_\nu \phi^j - U(\phi) - RV(\phi) \tag{19}$$

являются общековариантными.
Прием для построения общековариантных лагранжианов. Надо взять любой лагранжиан специальной теории относительности и сделать замену

$$\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}, \qquad \partial_\mu \to \nabla_\mu. \tag{20}$$

Такие лагранжианы называются лагранжианами с минимальной связью. Иными словами,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet\phi|g, \partial_\bullet g, \ldots) = \mathcal{L}(\phi, \nabla_\bullet\phi|g, 0, \ldots, 0). \tag{21}$$

Вопрос: при каком условии лагранжиан (19) является лагранжианом с минимальной связью?

Рассмотрим пространство с метрикой g. Действие зависит от полей ϕ^r и метрики:

$$S[\phi|g] = \int d^dx\,\sqrt{|g|}\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet\phi|g, \partial_\bullet g, \ldots). \tag{18}$$

По полям ϕ мы будем варьировать, а метрику рассматривать как параметр. Лагранжиан называется общековариантным, если действие инвариантно по отношению к преобразованиям координат.
Пример. Лагранжианы для скалярных полей вида

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet\phi) = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}G_{ij}(\phi)\,\partial_\mu\phi^i\,\partial_\nu\phi^j - U(\phi) - RV(\phi) \tag{19}$$

являются общековариантными.
Прием для построения общековариантных лагранжианов. Надо взять любой лагранжиан специальной теории относительности и сделать замену

$$\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}, \qquad \partial_\mu \to \nabla_\mu. \tag{20}$$

Такие лагранжианы называются лагранжианами с минимальной связью.
Иными словами,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet\phi|g, \partial_\bullet g, \ldots) = \mathcal{L}(\phi, \nabla_\bullet\phi|g, 0, \ldots, 0). \tag{21}$$

Вопрос: при каком условии лагранжиан (19) является лагранжианом с минимальной связью? Ответ: $V(\phi) = 0$.

Вариация действия при преобразованиях координат

Рассмотрим изменение действия при преобразовании координат $x^\mu = x'^\mu + \xi^\mu$.

Вариация действия при преобразованиях координат

Рассмотрим изменение действия при преобразовании координат $x^\mu = x'^\mu + \xi^\mu$. Точнее говоря, выполним преобразование полей и метрики вида

$$t(x) \to (1 + K_t(\xi))t(x+\xi), \quad t = \phi, g,$$

где $1 + K_t(\xi)$ представляет собой соответствующее преобразование тензорных компонент поля t. Соответственно, вариация поля при этом преобразовании дается производной Ли

$$\delta_\xi t = \xi t + K_t(\xi)t = \nabla_\xi t + \tilde{K}_t(\xi)t.$$

Вариация действия при преобразованиях координат

Рассмотрим изменение действия при преобразовании координат $x^\mu = x'^\mu + \xi^\mu$. Точнее говоря, выполним преобразование полей и метрики вида

$$t(x) \to (1 + K_t(\xi))t(x+\xi), \quad t = \phi, g,$$

где $1 + K_t(\xi)$ представляет собой соответствующее преобразование тензорных компонент поля t. Соответственно, вариация поля при этом преобразовании дается производной Ли

$$\delta_\xi t = \xi t + K_t(\xi)t = \nabla_\xi t + \tilde{K}_t(\xi)t.$$

Посмотрим, как меняется вид действия:

$$0 = \delta_\xi S \tag{22}$$

Рассмотрим изменение действия при преобразовании координат $x^\mu = x'^\mu + \xi^\mu$. Точнее говоря, выполним преобразование полей и метрики вида

$$t(x) \to (1 + K_t(\xi))t(x+\xi), \quad t = \phi, g,$$

где $1 + K_t(\xi)$ представляет собой соответствующее преобразование тензорных компонент поля t. Соответственно, вариация поля при этом преобразовании дается производной Ли

$$\delta_\xi t = \xi t + K_t(\xi)t = \nabla_\xi t + \tilde{K}_t(\xi)t.$$

Посмотрим, как меняется вид действия:

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \phi} \delta_\xi \phi + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \phi_{,\lambda}} \underline{(\delta_\xi \phi)_{,\lambda}} \right) \tag{22}$$

Вариация действия при преобразованиях координат

Рассмотрим изменение действия при преобразовании координат $x^\mu = x'^\mu + \xi^\mu$. Точнее говоря, выполним преобразование полей и метрики вида

$$t(x) \to (1 + K_t(\xi))t(x+\xi), \quad t = \phi, g,$$

где $1 + K_t(\xi)$ представляет собой соответствующее преобразование тензорных компонент поля t. Соответственно, вариация поля при этом преобразовании дается производной Ли

$$\delta_\xi t = \xi t + K_t(\xi)t = \nabla_\xi t + \tilde{K}_t(\xi)t.$$

Посмотрим, как меняется вид действия:

$$\begin{aligned} 0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi} \delta_\xi\phi + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} \underline{(\delta_\xi\phi)_{,\lambda}} \right) \\ + \int_U d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \delta_\xi g_{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \underline{(\delta_\xi g_{\mu\nu})_{,\lambda}} \right) \end{aligned} \tag{22}$$

Вариация действия при преобразованиях координат

Рассмотрим изменение действия при преобразовании координат $x^\mu = x'^\mu + \xi^\mu$. Точнее говоря, выполним преобразование полей и метрики вида

$$t(x) \to (1 + K_t(\xi))t(x+\xi), \quad t = \phi, g,$$

где $1 + K_t(\xi)$ представляет собой соответствующее преобразование тензорных компонент поля t. Соответственно, вариация поля при этом преобразовании дается производной Ли

$$\delta_\xi t = \xi t + K_t(\xi)t = \nabla_\xi t + \tilde{K}_t(\xi)t.$$

Посмотрим, как меняется вид действия:

$$\begin{aligned} 0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi} \delta_\xi \phi + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} \underline{(\delta_\xi\phi)_{,\lambda}} \right) \\ + \int_U d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \delta_\xi g_{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \underline{(\delta_\xi g_{\mu\nu})_{,\lambda}} \right) \\ - \int_U d^d x\, \partial_\mu(\xi^\mu \sqrt{|g|}\mathcal{L}). \end{aligned} \tag{22}$$

Сумму первого и третьего слагаемых можно переписать в виде

$$(\mathrm{I}) + (\mathrm{III}) =$$

$$= \int d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \phi} - \partial_\lambda \frac{\partial \sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \phi_{,\lambda}} \right) \delta_\xi \phi + \int d^d x \, \partial_\lambda \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \phi_{,\lambda}} \delta_\xi \phi - \sqrt{|g|}\mathcal{L}\xi^\lambda \right).$$

Сумму первого и третьего слагаемых можно переписать в виде

$$(\mathrm{I}) + (\mathrm{III}) =$$

$$= \int d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \phi} - \partial_\lambda \frac{\partial \sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \phi_{,\lambda}} \right) \delta_\xi \phi + \int d^d x \, \partial_\lambda \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \phi_{,\lambda}} \delta_\xi \phi - \sqrt{|g|}\mathcal{L}\xi^\lambda \right).$$

Первый интеграл обращается в нуль в силу уравнений движения

$$\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \phi} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \phi_{,\lambda}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} = 0. \tag{23}$$

Сумму первого и третьего слагаемых можно переписать в виде

$$(\mathrm{I})+(\mathrm{III}) =$$

$$= \int d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi} - \partial_\lambda \frac{\partial\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} \right) \delta_\xi\phi + \int d^d x\, \partial_\lambda \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} \delta_\xi\phi - \sqrt{|g|}\mathcal{L}\xi^\lambda \right).$$

Первый интеграл обращается в нуль в силу уравнений движения

$$\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \nabla_\lambda \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\lambda}} = 0. \tag{23}$$

То, что остается, является дивергенцией и сводится к интегралу по границе ∂U области U:

$$(\mathrm{I})+(\mathrm{III}) = \int df_\lambda \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} (\xi^\mu \nabla_\mu\phi + \tilde{K}_\phi(\xi)\phi) - \sqrt{|g|}\mathcal{L}\xi^\lambda \right).$$

Сумму первого и третьего слагаемых можно переписать в виде

$$(\mathrm{I}) + (\mathrm{III}) =$$

$$= \int d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi} - \partial_\lambda \frac{\partial\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} \right) \delta_\xi \phi + \int d^d x \, \partial_\lambda \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} \delta_\xi \phi - \sqrt{|g|}\mathcal{L}\xi^\lambda \right).$$

Первый интеграл обращается в нуль в силу уравнений движения

$$\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \nabla_\lambda \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\lambda}} = 0. \tag{23}$$

То, что остается, является дивергенцией и сводится к интегралу по границе ∂U области U:

$$(\mathrm{I}) + (\mathrm{III}) = \int df_\lambda \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} (\xi^\mu \nabla_\mu \phi + \tilde{K}_\phi(\xi)\phi) - \sqrt{|g|}\mathcal{L}\xi^\lambda \right).$$

Если мы введем аналог канонического тензора энергии-импульса

$$\tilde{T}^\mu{}_\nu = \nabla_\nu \phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \mathcal{L}\delta^\mu_\nu, \tag{24}$$

Сумму первого и третьего слагаемых можно переписать в виде

$$(\mathrm{I})+(\mathrm{III}) =$$

$$= \int d^dx \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi} - \partial_\lambda \frac{\partial\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} \right)\delta_\xi\phi + \int d^dx\, \partial_\lambda \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}}\delta_\xi\phi - \sqrt{|g|}\mathcal{L}\xi^\lambda \right).$$

Первый интеграл обращается в нуль в силу уравнений движения

$$\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \nabla_\lambda \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\lambda}} = 0. \tag{23}$$

То, что остается, является дивергенцией и сводится к интегралу по границе ∂U области U:

$$(\mathrm{I})+(\mathrm{III}) = \int df_\lambda \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}}(\xi^\mu\nabla_\mu\phi + \tilde{K}_\phi(\xi)\phi) - \sqrt{|g|}\mathcal{L}\xi^\lambda \right).$$

Если мы введем аналог канонического тензора энергии-импульса

$$\tilde{T}^\mu{}_\nu = \nabla_\nu\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \mathcal{L}\delta^\mu_\nu, \tag{24}$$

мы можем переписать эту сумму в виде

$$(\mathrm{I})+(\mathrm{III}) = \int df_\lambda \left(\sqrt{|g|}\tilde{T}^\lambda{}_\kappa\xi^\kappa + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}}\tilde{K}_\phi(\xi)\phi \right),$$

Вариация действия при преобразованиях координат: (II)

Вклад производной Ли от метрики:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{II}) &= \int d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \delta_\xi g_{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} (\delta_\xi g_{\mu\nu})_{,\lambda} \right) \\
&= \int d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \right) \delta_\xi g_{\mu\nu} + \int df_\lambda \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \delta_\xi g_{\mu\nu} \right).
\end{aligned}
$$

Вклад производной Ли от метрики:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{II}) &= \int d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \delta_\xi g_{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} (\delta_\xi g_{\mu\nu})_{,\lambda} \right) \\
&= \int d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \right) \delta_\xi g_{\mu\nu} + \int df_\lambda \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \delta_\xi g_{\mu\nu} \right).
\end{aligned}
$$

Определим метрический тензор энергии-импульса:

$$
T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} + \cdots \right). \qquad (25)
$$

Вклад производной Ли от метрики:

$$(\mathrm{II}) = \int d^dx \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \delta_\xi g_{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} (\delta_\xi g_{\mu\nu})_{,\lambda} \right)$$

$$= \int d^dx \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \right) \delta_\xi g_{\mu\nu} + \int df_\lambda \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \delta_\xi g_{\mu\nu} \right).$$

Определим метрический тензор энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} + \cdots \right). \qquad (25)$$

Так как $\delta_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$, имеем

$$(\mathrm{II}) = -\int d^dx \sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu} + 2\int df_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \xi_{\mu;\nu}.$$

Вклад производной Ли от метрики:

$$(\mathrm{II}) = \int d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \delta_\xi g_{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} (\delta_\xi g_{\mu\nu})_{,\lambda} \right)$$

$$= \int d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \right) \delta_\xi g_{\mu\nu} + \int df_\lambda \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \delta_\xi g_{\mu\nu} \right).$$

Определим метрический тензор энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} + \cdots \right). \qquad (25)$$

Так как $\delta_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$, имеем

$$(\mathrm{II}) = -\int d^d x \sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu} + 2 \int df_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \xi_{\mu;\nu}.$$

Используя тождество

$$\sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu} = \sqrt{|g|} (T^{\mu\nu} \xi_\mu)_{;\nu} - \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \xi_\mu = (\sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \xi_\mu)_{,\nu} - \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \xi_\mu,$$

Вклад производной Ли от метрики:

$$(\mathrm{II}) = \int d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \delta_\xi g_{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} (\delta_\xi g_{\mu\nu})_{,\lambda} \right)$$

$$= \int d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \right) \delta_\xi g_{\mu\nu} + \int df_\lambda \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \delta_\xi g_{\mu\nu} \right).$$

Определим метрический тензор энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} + \cdots \right). \qquad (25)$$

Так как $\delta_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$, имеем

$$(\mathrm{II}) = -\int d^d x \sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu} + 2 \int df_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \xi_{\mu;\nu}.$$

Используя тождество

$$\sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu} = \sqrt{|g|} (T^{\mu\nu} \xi_\mu)_{;\nu} - \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \xi_\mu = (\sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \xi_\mu)_{,\nu} - \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \xi_\mu,$$

получаем

$$(\mathrm{II}) = \int_U d^d x \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \xi_\mu + \int df_\lambda \left(2 \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \xi_{\mu;\nu} - \sqrt{|g|} T^{\mu\lambda} \xi_\mu \right).$$

Собирая все вместе, получаем

$$
\begin{aligned}
0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \, \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \xi_\mu \\
+ \int_{\partial U} df_\nu \left(\sqrt{|g|} (\tilde{T}^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}) \xi_\mu + 2 \frac{\partial (\sqrt{|g|} \mathcal{L})}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} \xi_{\mu;\lambda} + \frac{\partial (\sqrt{|g|} \mathcal{L})}{\partial \phi_{,\nu}} \tilde{K}_\phi(\xi) \phi \right) .
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Ковариантное сохранение тензора энергии-импульса

Собирая все вместе, получаем

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \, \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \xi_\mu$$
$$+ \int_{\partial U} df_\nu \left(\sqrt{|g|} (\tilde{T}^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}) \xi_\mu + 2 \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} \xi_{\mu;\lambda} + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \phi_{,\nu}} \tilde{K}_\phi(\xi) \phi \right). \tag{26}$$

Если выбрать поле ξ так, чтобы оно обращалось в нуль на ∂U вместе со всеми своими производными, Собирая все вместе, получаем

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \xi_\mu$$
$$+ \int_{\partial U} df_\nu \left(\sqrt{|g|} (\tilde{T}^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}) \xi_\mu + 2 \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} \xi_{\mu;\lambda} + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \phi_{,\nu}} \tilde{K}_\phi(\xi)\phi \right). \tag{26}$$

Если выбрать поле ξ так, чтобы оно обращалось в нуль на ∂U вместе со всеми своими производными, мы получим ковариантное сохранение метрического тензора энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \tag{27}$$

Это не настоящий закон сохранения.

Ковариантное сохранение тензора энергии-импульса

Собирая все вместе, получаем

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \xi_\mu$$
$$+ \int_{\partial U} df_\nu \left(\sqrt{|g|}(\tilde{T}^{\mu\nu} - T^{\mu\nu})\xi_\mu + 2\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} \xi_{\mu;\lambda} + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \phi_{,\nu}} \tilde{K}_\phi(\xi)\phi \right). \tag{26}$$

Если выбрать поле ξ так, чтобы оно обращалось в нуль на ∂U вместе со всеми своими производными, мы получим ковариантное сохранение метрического тензора энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \tag{27}$$

Это не настоящий закон сохранения.
Теперь возьмем произвольное векторное поле ξ. Так как в силу (27) на решениях уравнений движения объемное слагаемое обращается в нуль, должен быть равен нулю и поверхностный интеграл в (26).

Связь канонического тензора энергии-импульса с метрическим

Для теории скалярного поля ϕ с минимальной связью имеем

$$\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} = 0, \quad \tilde{K}_\phi(\xi) = 0.$$

Связь канонического тензора энергии-импульса с метрическим

Для теории скалярного поля ϕ с минимальной связью имеем

$$\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} = 0, \quad \tilde{K}_\phi(\xi) = 0.$$

Поэтому второй и третий член под интегралом равны нулю и мы получаем

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}. \tag{28}$$

Для теории скалярного поля ϕ с минимальной связью имеем

$$\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} = 0, \quad \tilde{K}_\phi(\xi) = 0.$$

Поэтому второй и третий член под интегралом равны нулю и мы получаем

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}. \tag{28}$$

В общей теории с минимальной связью производные от g входят только в символы Кристоффеля и мы имеем

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{;\rho}}\frac{\partial\phi_{;\rho}}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}},$$

Для теории скалярного поля ϕ с минимальной связью имеем

$$\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} = 0, \quad \tilde{K}_\phi(\xi) = 0.$$

Поэтому второй и третий член под интегралом равны нулю и мы получаем

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}. \tag{28}$$

В общей теории с минимальной связью производные от g входят только в символы Кристоффеля и мы имеем

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{;\rho}}\frac{\partial\phi_{;\rho}}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}},$$

Отсюда можно показать, что члены с $\xi_{\mu;\nu}$ сокращаются вкладами из $\tilde{K}_\phi(\xi)\phi$.

Для теории скалярного поля ϕ с минимальной связью имеем

$$\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} = 0, \quad \tilde{K}_\phi(\xi) = 0.$$

Поэтому второй и третий член под интегралом равны нулю и мы получаем

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}. \tag{28}$$

В общей теории с минимальной связью производные от g входят только в символы Кристоффеля и мы имеем

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{;\rho}}\frac{\partial\phi_{;\rho}}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}},$$

Отсюда можно показать, что члены с $\xi_{\mu;\nu}$ сокращаются вкладами из $\tilde{K}_\phi(\xi)\phi$. Сложно, но можно показать, что последние два слагаемых собираются в свертку ξ с производной от антисимметричного тензора ψ, так что:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + |g|^{-1/2}\partial_\lambda(|g|^{1/2}\psi^{\mu\nu\lambda}), \tag{29}$$

Связь канонического тензора энергии-импульса с метрическим

Для теории скалярного поля ϕ с минимальной связью имеем

$$\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} = 0, \quad \tilde{K}_\phi(\xi) = 0.$$

Поэтому второй и третий член под интегралом равны нулю и мы получаем

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}. \tag{28}$$

В общей теории с минимальной связью производные от g входят только в символы Кристоффеля и мы имеем

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{;\rho}}\frac{\partial\phi_{;\rho}}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}},$$

Отсюда можно показать, что члены с $\xi_{\mu;\nu}$ сокращаются вкладами из $\tilde{K}_\phi(\xi)\phi$. Сложно, но можно показать, что последние два слагаемых собираются в свертку ξ с производной от антисимметричного тензора ψ, так что:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + |g|^{-1/2}\partial_\lambda(|g|^{1/2}\psi^{\mu\nu\lambda}), \tag{29}$$

Мы всегда будем рассматривать теории с минимальной связью. Можно сказать, что общая теория относительности представляет собой метрическую теорию гравитации с минимальной связью материи и метрики и действием Эйнштейна—Гильберта для метрики (см. следующую лекцию).

Тензор энергии-импульса точечной частицы

Найдем метрический тензор энергии-импульса для точечной частицы.

Тензор энергии-импульса точечной частицы

Найдем метрический тензор энергии-импульса для точечной частицы. Для этого перепишем ее действие в виде пространственно-временного интеграла:

$$S[x|g] = \int d^d x \int d\tau\, \delta(x^\bullet - x^\bullet(\tau)) \left(-m\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)} - eA_\mu(x)\dot{x}^\mu(\tau) \right).$$

Тензор энергии-импульса точечной частицы

Найдем метрический тензор энергии-импульса для точечной частицы. Для этого перепишем ее действие в виде пространственно-временного интеграла:

$$S[x|g] = \int d^d x \int d\tau\, \delta(x^\bullet - x^\bullet(\tau)) \left(-m\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)} - eA_\mu(x)\dot{x}^\mu(\tau) \right).$$

Теперь продифференцируем по метрике:

$$T^{\mu\nu} = \int d\tau\, \frac{\delta(x^\bullet - x^\bullet(\tau))}{\sqrt{|g|}} \frac{m\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)}{\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)}}.$$

Найдем метрический тензор энергии-импульса для точечной частицы. Для этого перепишем ее действие в виде пространственно-временного интеграла:

$$S[x|g] = \int d^d x \int d\tau\, \delta(x^\bullet - x^\bullet(\tau)) \left(-m\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)} - eA_\mu(x)\dot{x}^\mu(\tau) \right).$$

Теперь продифференцируем по метрике:

$$T^{\mu\nu} = \int d\tau\, \frac{\delta(x^\bullet - x^\bullet(\tau))}{\sqrt{|g|}} \frac{m\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)}{\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)}}.$$

В калибровке

$$g_{\mu\nu}(x(\tau))\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau) = 1,$$

то есть $\tau = s$, имеем

$$T^{\mu\nu} = \int ds\, \frac{\delta(x^\bullet - x^\bullet(s))}{\sqrt{|g|}} m\dot{x}^\mu(s)\dot{x}^\nu(s).$$

Тензор энергии-импульса точечной частицы

Найдем метрический тензор энергии-импульса для точечной частицы. Для этого перепишем ее действие в виде пространственно-временного интеграла:

$$S[x|g] = \int d^d x \int d\tau\, \delta(x^\bullet - x^\bullet(\tau)) \left(-m\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)} - eA_\mu(x)\dot{x}^\mu(\tau) \right).$$

Теперь продифференцируем по метрике:

$$T^{\mu\nu} = \int d\tau\, \frac{\delta(x^\bullet - x^\bullet(\tau))}{\sqrt{|g|}} \frac{m\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)}{\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)}}.$$

В калибровке

$$g_{\mu\nu}(x(\tau))\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau) = 1,$$

то есть $\tau = s$, имеем

$$T^{\mu\nu} = \int ds\, \frac{\delta(x^\bullet - x^\bullet(s))}{\sqrt{|g|}} m\dot{x}^\mu(s)\dot{x}^\nu(s).$$

Первый множитель представляет собой инвариантную дельта-функцию на псевдоримановом многообразии:

$$\delta_g(x,y) = \frac{\delta(x^\bullet - y^\bullet)}{\sqrt{|g(y)|}}, \quad \int dV\, \delta_g(x,y) f(x) = \int d^d x\, \sqrt{|g(y)|}\frac{\delta(x^\bullet - y^\bullet)}{\sqrt{|g(y)|}} f(x) = f(y). \tag{30}$$

Найдем метрический тензор энергии-импульса для точечной частицы. Для этого перепишем ее действие в виде пространственно-временного интеграла:

$$S[x|g] = \int d^d x \int d\tau\, \delta(x^\bullet - x^\bullet(\tau)) \left(-m\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)} - eA_\mu(x)\dot{x}^\mu(\tau) \right).$$

Теперь продифференцируем по метрике:

$$T^{\mu\nu} = \int d\tau\, \frac{\delta(x^\bullet - x^\bullet(\tau))}{\sqrt{|g|}} \frac{m\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)}{\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)}}.$$

В калибровке

$$g_{\mu\nu}(x(\tau))\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau) = 1,$$

то есть $\tau = s$, имеем

$$T^{\mu\nu} = \int ds\, \frac{\delta(x^\bullet - x^\bullet(s))}{\sqrt{|g|}} m\dot{x}^\mu(s)\dot{x}^\nu(s).$$

Первый множитель представляет собой инвариантную дельта-функцию на псевдоримановом многообразии:

$$\delta_g(x,y) = \frac{\delta(x^\bullet - y^\bullet)}{\sqrt{|g(y)|}}, \quad \int dV\, \delta_g(x,y) f(x) = \int d^d x\, \sqrt{|g(y)|} \frac{\delta(x^\bullet - y^\bullet)}{\sqrt{|g(y)|}} f(x) = f(y). \tag{30}$$

Поэтому окончательно получаем

$$T^{\mu\nu} = \int ds\, \delta_g(x, x(s))\, m\dot{x}^\mu(s)\dot{x}^\nu(s). \tag{31}$$

1. Пылевидная материя. Тензор энергии-импульса пылевидной материи в ее системе покоя имеет вид

$$T = \rho\,\partial_0 \otimes \partial_0 = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Как выглядит тензор энергии-импульса в СО, в которой материя движется со скоростью $\boldsymbol{v}$?

2. Жидкость с плотностью ρ и давлением p. В системе покоя

$$T = \rho\,\partial_0 \otimes \partial_0 + p\,\partial_i \otimes \partial_i = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix}.$$

Как выглядит тензор энергии-импульса в СО, в которой материя движется со скоростью $\boldsymbol{v}$?

2a. Уравнение состояния нерелятивистского идеального газа.

2b. Уравнение состояния ультрарелятивистского идеального газа.

3. Задача о движущемся конденсаторе.

Рассмотрим плоский конденсатор с пластинами площадью S и расстоянием между пластинами l. Пластины перпендикулярны оси x. Тензор энергии-импульса его электромагнитного поля равен

$$T = \frac{E^2}{2}\partial_0 \otimes \partial_0 - \left(E_i E_j - \frac{E^2}{2}\delta_{ij}\right)\partial_i \otimes \partial_j = \begin{pmatrix} E^2/2 & & & \\ & -E^2/2 & & \\ & & E^2/2 & \\ & & & E^2/2 \end{pmatrix}.$$

Его электромагнитная масса равна $m_{\text{em}} = \rho S l = \frac{E^2 S l}{2}$. Перейдем в СО, в которой он движется со скоростью v в направлении оси x. При таком преобразовании электрическое поле E и площадь S не меняются, а длина уменьшается: $l' = l\sqrt{1-v^2}$. Таким образом, его электромагнитная энергия в новой СО равна $\varepsilon_{\text{em}} = m_{\text{em}}\sqrt{1-v^2}$. Это противоречит общей формуле, следующей из преобразований Лоренца: $\varepsilon = m/\sqrt{1-v^2}$. Как решить этот парадокс?