

Пояснение В

Обобщенная теорема Остроградского—Гаусса

Пусть $a = a^{\mu_1 \dots \mu_k} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k}$ — полностью антисимметричное тензорное поле на d -мерном (псевдо)римановом многообразии, а

$$df_{\mu_1 \dots \mu_l} = \frac{1}{(d-l)!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} dx^{\mu_{l+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d} \quad (\text{B.1})$$

— элемент $(d-l)$ -мерной поверхности. Пусть U — замкнутое подмножество в $(d-k+1)$ -мерном подмногообразии M , а ∂U — $(d-k)$ -мерная граница этой области в подмногообразии M . Мы хотим доказать формулу

$$\int_U df_{\mu_1 \dots \mu_{k-1}} \partial_{\mu_k} (\sqrt{|g|} a^{\mu_1 \dots \mu_k}) = \frac{1}{k} \oint_{\partial U} df_{\mu_1 \dots \mu_k} \sqrt{|g|} a^{\mu_1 \dots \mu_k}. \quad (\text{B.2})$$

Мы будем доказывать для случая, когда область U покрывается одной картой. В случае, когда это не так, мы можем разбить область U на несколько подобластей, покрываемой одной картой каждая, и воспользоваться аддитивностью интегралов.

Прежде всего заметим, что левая и правая части равенства (B.2) не зависят от системы координат. Действительно, форма объема

$$dV = \sqrt{|g|} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_d}$$

является инвариантным объектом, а правая часть (B.2) является сверткой формы объема с контравариантным тензором ранга k , то есть объектом инвариантным. Левая же часть является сверткой той же формы объема с тензором

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\mu_k} (\sqrt{|g|} a^{\mu_1 \dots \mu_k}) \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_{k-1}} = (\nabla_{\mu_k} a)^{\mu_1 \dots \mu_k} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_{k-1}}.$$

Это равенство, обобщающее (3.33) на произвольный антисимметричный тензор, нетрудно проверяется. Таким образом, левая часть тоже не зависит от системы координат.

Выберем систему координат на карте, покрывающей U так, чтобы подмногообразие M задавалось уравнением вида

$$x^a = 0 \quad (a = 1, \dots, k-1).$$

(Мы здесь будем нумеровать индексы μ от 1 до d .) Тогда на M единственные отличные от нуля компоненты это компонента $df_{1 \dots k-1}$ и все компоненты, получаемые из нее перестановкой индексов. Действительно, все $dx^a = 0$, так что все ненулевые dx^μ , входящие в правую сторону (B.1) имеют $\mu > k-1$. Их как раз $d-k+1$ штука. При этом набор μ_1, \dots, μ_d для ненулевых слагаемых является перестановкой чисел $1, \dots, d$. Это значит, что индексы μ_1, \dots, μ_{k-1} должны быть перестановками числа $1, \dots, k-1$.

Из антисимметричности df и a получаем

$$I = \int df_{\mu_1 \dots \mu_{k-1}} \partial_{\mu_k} (\sqrt{|g|} a^{\mu_1 \dots \mu_k}) = (k-1)! \int df_{1 \dots (k-1)} \partial_{\mu} (\sqrt{|g|} a^{1 \dots (k-1) \mu}).$$

Очевидно, μ можно ограничить областью k, \dots, d , то есть номерами координат на подмногообразии M . Это значит, что к последней формуле можно применить теорему Гаусса:

$$I = (k-1)! \oint df_{1 \dots (k-1) \mu} \sqrt{|g|} a^{1 \dots (k-1) \mu}.$$

Теперь заметим, что все остальные ненулевые элементы $df_{\mu_1 \dots \mu_k}$ получаются перестановкой k индексов $1, \dots, k-1, \mu$ (подумайте сами, почему). Ввиду все той же антисимметричности наших объектов, получаем

$$I = \frac{(k-1)!}{k!} \oint df_{\mu_1 \dots \mu_k} \sqrt{|g|} a^{\mu_1 \dots \mu_k}.$$

Можно сделать два замечания. Во-первых, утверждение (В.2) можно также получить из обобщенной теоремы Стокса для антисимметричных форм

$$\int_U d\omega = \oint_{\partial U} \omega, \quad (\text{В.3})$$

которая верная для любых гладких многообразий, даже без всякой связности или метрики. Для доказательства достаточно взять

$$\omega = \sqrt{|g|} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} a^{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu_{k+1}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_d} = \frac{1}{(d-k)!} \sqrt{|g|} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} a^{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d}.$$

Нетрудно увидеть, что внешний дифференциал формы сведется к дивергенции из левой части (В.2).

Во-вторых, теорема применима не только к антисимметричным тензорам, но и к любым антисимметричным символам $a^{\mu_1 \dots \mu_k}$. Действительно, определим тензор \tilde{a} , компоненты которого $\tilde{a}^{\mu_1 \dots \mu_k}$ равны $a^{\mu_1 \dots \mu_k}$ в данной системе координат. Для него, как мы видели, верна теорема Остроградского—Гаусса. Но в левой и правой части (В.2) этот тензор находится в одной и той же системе координат и поэтому его компоненты совпадают с компонентами символа $a^{\mu_1 \dots \mu_k}$. Иными словами, те преобразования, с помощью которых мы доказывали, следует применять к компонентам тензора \tilde{a} . А поскольку в конце рассуждения мы возвращаемся к исходной системе координат, то и компоненты тензора снова становятся равными компонентам символа a .