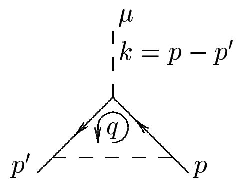
**Лекция 15**
**Вершинная функция и инфракрасные расходимости**

Рассмотрим вершинную функцию

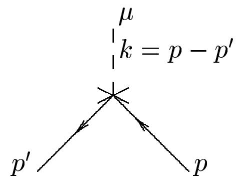
$$\Gamma^\mu(p,p') = \gamma^\mu + \Gamma^\mu_{(1)}(p,p') + \Gamma^\mu_{(2)}(p,p'),$$

$\Gamma^\mu_{(1)}(p,p') =$




$$= -i\mu^{4-D}e^2 \int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\nu(\hat p' + \hat q + m)\gamma^\mu(\hat p + \hat q + m)\gamma_\nu}{(q^2+i0)((p'+q)^2 - m^2 + i0)((p+q)^2 - m^2 + i0)},$$

$\Gamma^\mu_{(2)}(p,p') =$




$= (Z_\psi - 1)\gamma^\mu.$

Здесь $Z_\psi$ следует заимствовать из условия перенормировки для пропагатора электрона. Мы не будем вычислять $\Gamma^\mu$ полностью, а лишь выделим расходимости. Мы помним, что при условии $\Sigma(m) = \Sigma'(m) = 0$ электронный пропагатор расходился. Это — инфракрасная расходимость, связанная с нулевой массой фотона. Давайте сначала выделим ее из $Z_\psi$. Положим $\tilde m^2 = m^2(1-\delta)$. Из формулы (18) предыдущей лекции получаем

$$Z_\psi - 1 = -\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon} - \frac{e^2}{4\pi^2}\log\delta + \cdots, \tag{1}$$

где точки означают конечную при $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ часть. Логарифмическую расходимость объяснить просто. Массовая поверхность $(p+k)^2 = m^2$, $k^2 = 0$ представляет собой кривую коразмерности 2 в пространстве $k$. Следовательно, интеграл для $\Sigma$ имеет вид $\int d^2k_\perp/k_\perp^3$. Бесконечно малые сдвиги уменьшают степень (инфракрасной) расходимости на 2. Поэтому интеграл сходится. При вычислении $Z_\psi$ мы дифференцируем по $\hat p$, что увеличивает степень расходимости на единицу и делает интеграл логарифмически расходящимся.

Теперь давайте вычислим расходящиеся части в $\Gamma^\mu_{(1)}$. Воспользуемся формулой

$$\frac{1}{abc} = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, \frac{1}{(a(1-x-y) + bx + cy)^3}.$$

Тогда

$$\Gamma^\mu_{(1)} = -2i\mu^{4-D}e^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\nu(\hat p' + \hat q + m)\gamma^\mu(\hat p + \hat q + m)\gamma_\nu}{(q^2 + 2xp'q + 2ypq + p'^2x + p^2y - m^2(x+y) + i0)^3}.$$

Заменой $q \to q - (xp' + yp)$ получаем

$$\Gamma^\mu_{(1)} = -2i\mu^{4-D}e^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\nu(\hat q + \hat p'(1-x) - \hat p y + m)\gamma^\mu(\hat q - \hat p' x + \hat p(1-y) + m)\gamma_\nu}{(q^2 - m^2(x+y) + p'^2x(1-x) + p^2y(1-y) - 2pp'xy + i0)^3}.$$

Числитель можно разбить на два слагаемых: квадратичное по $q$ и не зависящее от $q$ (линейное по $q$ слагаемое не дает вклада в интеграл). Квадратичное по $q$ слагаемое дает вклад в ультрафиолетовую расходимость. Если вычислить соответствующий вклад то он будет иметь вид

$$\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon}\gamma^\mu + O(\varepsilon^0).$$

Этот вклад сокращается первым слагаемым в (1). Таким образом, вершинная функция в нашем приближении ультрафиолетово конечна.

Рассмотрим теперь инфракрасную расходимость. В нее вносит вклад второе слагаемое:

$$-2i\mu^{4-D}e^2\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\,\frac{\gamma^\nu(\hat{p}'(1-x)-\hat{p}y+m)\gamma^\mu(-\hat{p}'x+\hat{p}(1-y)+m)\gamma_\nu}{(q^2-m^2(x+y)+p'^2x(1-x)+p^2y(1-y)-2pp'xy+i0)^3}.$$

Здесь мы можем сразу положить $D=4$. Кроме того, мы будем считать, что $p^2=p'^2=m^2(1-\delta)$ и рассматривать случай $\delta\ll 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu_{(1)}&=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon}\gamma^\mu-2ie^2\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{\gamma^\nu(\hat{p}'(1-x)-\hat{p}y+m)\gamma^\mu(-\hat{p}'x+\hat{p}(1-y)+m)\gamma_\nu}{(q^2-m^2\delta(x+y)-m^2(x^2+y^2)-2pp'xy+i0)^3}+\cdots\\&=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon}\gamma^\mu-\frac{e^2}{16\pi^2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\frac{\gamma^\nu(\hat{p}'(1-x)-\hat{p}y+m)\gamma^\mu(-\hat{p}'x+\hat{p}(1-y)+m)\gamma_\nu}{m^2\delta(x+y)+m^2(x^2+y^2)+2pp'xy}+\cdots.\end{aligned}$$

Основной вклад в интеграл дает область $x\sim y\sim\delta$. Сделаем замену переменных

$$x=\frac{\xi+\eta}{2},\qquad y=\frac{\xi-\eta}{2}.$$

Получаем

$$\Gamma^\mu_{(1)}=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon}\gamma^\mu-\frac{e^2}{16\pi^2}\int_0^1 d\xi\int_0^\xi d\eta\,\frac{\gamma^\nu(\hat{p}'+m)\gamma^\mu(\hat{p}+m)\gamma_\nu}{m^2\delta\xi+(m^2+pp')\xi^2/2+(m^2-pp')\eta^2/2}+\cdots.$$

Теперь положим

$$\xi=\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+pp'}}\cos\varphi,\qquad\eta=\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{m^2-pp'}}\sin\varphi,\qquad 0\le\varphi\le\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{m^2-pp'}{m^2+pp'}}.$$

Тогда интеграл имеет вид

$$\begin{aligned}\int_0^1 d\xi\int_0^\xi d\eta\frac{1}{\cdots}&=\frac{1}{\sqrt{m^4-(pp')^2}}\int r\,dr\int d\varphi\,\left(\frac{m^2\delta\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+pp'}}r\cos\varphi+r^2\right)^{-1}\\&=-\frac{2}{\sqrt{m^4-(pp')^2}}\int d\varphi\,\log\frac{m^2\delta\cos\varphi}{\mathrm{const}\,\sqrt{m^2+pp'}}+\cdots\\&=-\frac{2}{\sqrt{m^4-(pp')^2}}\int d\varphi\,\log\delta+\cdots\\&=-\frac{2}{\sqrt{m^4-(pp')^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{m^2-pp'}{m^2+pp'}}\cdot\log\delta+\cdots\end{aligned}$$

Отсюда

$$\Gamma^\mu(p,p')=\gamma^\mu-\frac{e^2}{4\pi^2}\gamma^\mu\log\delta+\frac{e^2}{16\pi^2}\gamma^\nu(\hat{p}'+m)\gamma^\mu(\hat{p}+m)\gamma_\nu\frac{2}{\sqrt{m^4-(pp')^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{m^2-pp'}{m^2+pp'}}\cdot\log\delta+\cdots.\quad(2)$$

Теперь рассмотрим какой-нибудь процесс рассеяния электрона, в который входит $\bar{u}_{p'}\Gamma^\mu(p,p')u_p$. Учтем, что в силу уравнения Дирака

$$\bar{u}_{p'}\gamma^\nu(\hat{p}'+m)\gamma^\mu(\hat{p}+m)\gamma_\nu u_p=\bar{u}_{p'}(2p'^\nu-(\hat{p}-m)\gamma^\nu)\gamma^\mu(2p_\nu-\gamma_\nu(\hat{p}-m))u_p=4pp'\cdot\bar{u}_{p'}\gamma^\mu u_p.$$

Отсюда следует, что амплитуда процесса пропорциональна

$$\bar{u}_{p'}\Gamma^\mu(p,p')u_p = \bar{u}_{p'}\gamma^\mu u_p\left[1-\frac{e^2}{4\pi^2}\left(1-\frac{2pp'}{\sqrt{m^4-(pp')^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{m^2-pp'}{m^2+pp'}}\right)\log\delta+\cdots\right]. \tag{3}$$

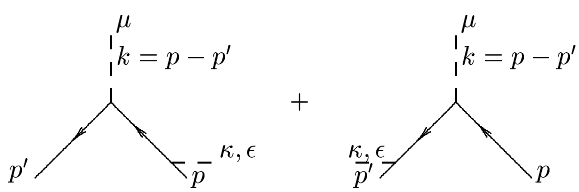
Мы видим, что при $\delta\to 0$ амплитуда стремится к бесконечности пропорционально $\log\delta$. Это должно означать, что КЭД — не самосогласованная теория. Как решить эту проблему?

Давайте вспомним, что из-за безмассовости фотона во всех реальных процессах рассеяния электронов обязательно испускается бесконечное количество мягких фотонов. В то же время мы вычисляем диаграмму так, как будто бы их нет. Амплитуда такого процесса должна на самом деле равняться нулю. Бесконечность, по-видимому, получается из-за вычисления по теории возмущений. Ведь испускание дополнительного фотона есть процесс более высокого порядка. Заметим также, что процессы с разным числом фотонов различимы. Следовательно складываются вероятности или сечения, а не амплитуды. Итак, задача должна ставиться таким образом: найти сечение процесса рассеяния, так чтобы импульсы электронов и фотонов были такими-то, а так же чтобы излучалось неконтролируемое число мягких фотонов частоты не выше $\omega_0$. Мы вправе ожидать, что в каждом порядке по теории возмущений будет возникать конечное число мягких фотонов, по направлениям, частотам и поляризациям которых мы будем суммировать. В первом порядке по $e^2$ получим

$$d\sigma\sim|M_0^{(0)}+M_0^{(1)}|^2+\int|M_1^{(0)}|^2\simeq|M_0^{(0)}|^2+2\operatorname{Re}(M_0^{(0)*}M_0^{(1)})+\int|M_1^{(0)}|^2=d\sigma_0^{(0)}+d\sigma_0^{(1)}+d\sigma_1^{(0)}, \tag{4}$$

где $M_n^{(k)}$ — вклад в амплитуду $k$-го порядка по $e^2$ по сравнению с основным вкладом с испусканием $n$ мягких фотонов. Первое слагаемое в правой части (4) нулевого порядка, а остальные два — первого. Интегрирование ведется по состояниям мягкого фотона.

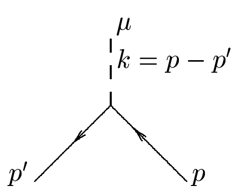
Давайте научимся считать $M_0^{(1)}$. Рассмотрим диаграммы




равные

$$(-ie)^2\cdot\left(i\frac{\bar{u}_{p'}\gamma^\mu(\hat{p}-\hat{\kappa}+m)\gamma^\nu u_p}{(p-\kappa)^2-m^2}\epsilon^*_\nu+i\frac{\bar{u}_{p'}\gamma^\nu(\hat{p}'+\hat{\kappa}+m)\gamma^\mu u_p}{(p'+\kappa)^2-m^2}\epsilon^*_\nu\right).$$

В случае мягких фотонов $\kappa$ они дают




$$\times(-ie)\left(\frac{p'\epsilon^*}{p'\kappa-m^2\delta/2}-\frac{p\epsilon^*}{p\kappa+m^2\delta/2}\right). \tag{5}$$

Здесь мы опять слегка сдвинулись с массовой поверхности: $p^2=p'^2=m^2(1-\delta)$. Отсюда видим, что

$$d\sigma_1^{(0)}\simeq d\sigma_0^{(0)}\cdot e^2\sum_\epsilon\int_{\omega\le\omega_0}\frac{d^3\kappa}{(2\pi)^3 2\omega}\left|\frac{p'\epsilon}{p'\kappa-m^2\delta/2}-\frac{p\epsilon}{p\kappa+m^2\delta/2}\right|^2 \tag{6}$$

Просуммируем по поляризациям. В трехмерно-поперечной калибровке

$$\rho_{ij}=\frac{1}{2}\sum_\epsilon\epsilon_i\epsilon^*_j=\frac{1}{2}(\delta_{ij}-n_in_j),\qquad\rho_{i0}=\rho_{00}=0.$$

где $\boldsymbol{n}$ — направление импульса фотона. Калибровочным преобразованием

$$\rho_{\mu\nu} \to \rho_{\mu\nu} + \chi_\mu \kappa_\nu + \kappa_\mu \chi_\nu$$

с $\chi_0 = -1/4\omega$, $\chi_i = k_i/4\omega^2$, мы можем преобразовать это матрицу плотности к виду

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}. \tag{7}$$

Подставляя ее в (6), получим

$$\begin{aligned} d\sigma_1^{(0)} &\simeq -d\sigma_0^{(0)} \cdot e^2 \int_{\omega \le \omega_0} \frac{d^3\kappa}{(2\pi)^3 2\omega} \left( \frac{p'}{p'\kappa - m^2\delta/2} - \frac{p}{p\kappa + m^2\delta/2} \right)^2 \\ &= d\sigma_0^{(0)} \cdot e^2 \int_{\omega \le \omega_0} \frac{d^3\kappa}{(2\pi)^3 2\omega} \left( \frac{2pp'}{(p'k - u)(pk + u)} - \frac{p^2}{(pk+u)^2} - \frac{p'^2}{(p'k - u} \right). \end{aligned} \tag{8}$$

Мы всюду считаем, что $\omega_0^2 \gg m^2\delta = 2u$. Будем работать в системе отсчета, где $\varepsilon' = \varepsilon$, $\boldsymbol{p}' = -\boldsymbol{p}$. Направим ось $z$ вдоль $\boldsymbol{p}$. Тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{d^3\kappa}{\omega(p'\kappa - u)(p\kappa + u)} = 2\pi \int d\cos\theta \int \frac{\omega\, d\omega}{\varepsilon u \omega + (\varepsilon^2 - \boldsymbol{p}^2 \cos^2\theta)\omega^2} \\ &= -2\pi \int \frac{d\cos\theta}{\varepsilon^2 - \boldsymbol{p}^2\cos^2\theta} \log \varepsilon u = -\frac{4\pi}{\varepsilon|\boldsymbol{p}|} \operatorname{arth} \frac{|\boldsymbol{p}|}{\varepsilon} \cdot \log u + \cdots. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{d^3\kappa}{\omega 2(p\kappa + u)^2} = \pi \int d\cos\theta \int \frac{\omega\, d\omega}{((\varepsilon - |\boldsymbol{p}|\cos\theta)\omega + u)^2} \\ &= -\frac{2\pi}{m^2} \log u + \cdots. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_0^{(1)}}{\sigma_0^{(0)}} &= \frac{e^2}{8\pi^3} \big( (\varepsilon^2 + \boldsymbol{p}^2) I_1(u) - m^2 (I_2(u) + I_2(-u)) \big) \\ &= \frac{e^2}{2\pi^2} \left( 1 - \frac{\varepsilon^2 + \boldsymbol{p}^2}{\varepsilon|\boldsymbol{p}|} \operatorname{arth} \frac{|\boldsymbol{p}|}{\varepsilon} \right) \log\delta + \cdots. \end{aligned} \tag{9}$$

С другой стороны, при условии $\varepsilon' = \varepsilon$, $\boldsymbol{p}' = -\boldsymbol{p}$ (3) переписывается в виде

$$\bar{u}_{p'} \Gamma^\mu(p, p') u_p = \bar{u}_{p'} \gamma^\mu u_p \left[ 1 - \frac{e^2}{4\pi^2} \left( 1 - \frac{\varepsilon^2 + m^2}{\varepsilon|\boldsymbol{p}|} \operatorname{arth} \frac{|\boldsymbol{p}|}{\varepsilon} \right) \log\delta + \cdots \right].$$

Подставляя

$$\begin{aligned} &\sigma_0^{(0)} \sim |-ie\bar{u}_{p'}\gamma^\mu u_p|^2, \\ &\sigma_0^{(1)} \sim 2\,\mathrm{Re} \left[ -ie\bar{u}_{p'}\gamma^\mu u_p \cdot ie\bar{u}_{p'}\gamma^\mu u_p \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon^2 + m^2}{\varepsilon|\boldsymbol{p}|} \operatorname{arth} \frac{|\boldsymbol{p}|}{\varepsilon} \right) \log\delta + \cdots \right], \\ &\sigma_1^{(0)} \sim |-ie\bar{u}_{p'}\gamma^\mu u_p|^2 \left[ \frac{e^2}{2\pi^2} \left( 1 - \frac{\varepsilon^2 + \boldsymbol{p}^2}{\varepsilon|\boldsymbol{p}|} \operatorname{arth} \frac{|\boldsymbol{p}|}{\varepsilon} \right) \log\delta + \cdots \right], \end{aligned}$$

в (4) находим, что суммарное сечение конечно.