Лекция 12
Квантование электромагнитного поля

Рассмотрим действие для электромагнитного поля

$$S[A] = -\frac{1}{4}\int d^D x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{1}$$

инвариантное относительно *калибровочных* преобразований вида

$$A_\mu(x) = A'_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x). \tag{2}$$

Нетеровские токи, соответствующие этим преобразованям, тождественно равны нулю.

Попробуем вычислить функциональный интеграл

$$Z[J] = \int DA\, e^{iS[A]+(J,A)}$$

Очевидно,

$$iS[A] = -\frac{1}{2}(A_\mu, K^{\mu\nu}A_\nu), \qquad K^{\mu\nu} = -ig^{\mu\nu}\partial^2 + i\partial^\mu\partial^\nu.$$

В импульсном представлении

$$K^{\mu\nu}(p) = i(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu).$$

Очевидно

$$K^{\mu\nu}(p)p_\nu = 0$$

и матрица $K(p)$ вырождена. Следовательно, мы не можем вычислить обратную матрицу $G(p)$ и взять интеграл $Z[J]$. Иными словами, вдоль некоторых направлений (причем большом числе направлений — по крайней мере по одному для каждго p) подынтегральное выражение постоянно и интеграл расходится. Легко понять, что это связано с инвариантностью (2). Действительно, инвариантность действия относительно калибровочных преобразований связана с тождеством

$$K^{\mu\nu}\partial_\nu\chi = 0.$$

Логично было бы предположить, что следует интегрировать по мере $DA/D\chi$, где $D\chi$ — мера на орбите группы калибровочных преобразований. Но что это значит? Поскольку орбита не зависит от A_μ, естественно считать, что мера этой орбиты не зависит от A_μ. Поэтому вклад каждой орбиты — постоянный множитель. Чтобы сделать интегрирование по орбите конечным, следует ввести множитель

$$F[A] = e^{iS_{\mathrm{fix}}[A]}$$

меняющийся при калибровочном преобразовании, но при интегрировании по $D\chi$ дающий константу относительно A_μ:

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu}\int D\chi\, F[A+\partial\chi] = 0. \tag{3}$$

Удобно выбрать S_{fix} в виде

$$S_{\mathrm{fix}}[A] = -\frac{1}{2\alpha}\int d^D x\,(\partial_\mu A^\mu)^2. \tag{4}$$

Тогда

$$\int D\chi\, F[A+\partial\chi] = \int D\chi\, e^{-\frac{1}{2}(\chi, L\chi)},$$

где

$$L = \frac{i}{2\alpha}(\partial_\mu\partial^\mu)^2 + 0.$$

Оператор L не зависит от A и потому условие (3) выполнено. Если продолжить в евклидову плоскость, получим

$$F[A] = e^{-S_{E,\text{fix}}} = \exp\left(-\frac{1}{2\alpha}\int d^D x\,(\partial_\mu A_\mu)^2\right).$$

В пределе $\alpha \to +0$ мы получим

$$F[A] = \delta(\partial_\mu A^\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \int D\lambda\, e^{i(\lambda,\partial_\mu A^\mu)}. \tag{5}$$

Это значит, что в этом пределе мы просто удаляем интегрирование по $D\chi$, фиксируя A_μ условием (*лоренцева калибровка*)

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{6}$$

Однако можно наложить любую другую калибровку, которая сделает оператор K положительно определенным. Можно, например, использовать кулоновскую калибровку

$$A^0 = 0, \qquad \nabla \boldsymbol{A} = 0. \tag{7}$$

Рассмотрим производящий функционал

$$Z[J] = \int DA\, e^{iS_{\text{eff}}[A]+i(J,A)}, \quad S_{\text{eff}}[A] = S[A] + S_{\text{fix}}[A].$$

В лоренцевой калибровке

$$iS_{\text{eff}}[A] = -\frac{1}{2}(A, K_{\text{eff}}A), \qquad K^{\mu\nu}_{\text{eff}} = -ig^{\mu\nu}\partial^2 + i(1-\alpha^{-1})\partial^\mu\partial^\nu - 0g^{\mu\nu}.$$

Последнее слагаемое выбрано так, чтобы при виковом повороте в $+0\delta^{\mu\nu}$. В импульсном представлении

$$K^{\mu\nu}_{\text{eff}}(p) = i(g^{\mu\nu}p^2 - (1-\alpha^{-1})p^\mu p^\nu + i0g^{\mu\nu}).$$

Функция Грина равна

$$G(x,x') = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} G(p) e^{-ip(x-x')}, \qquad G_{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{p^2+i0}\left(g_{\mu\nu} + (\alpha-1)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2+i0}\right). \tag{8}$$

При $\alpha = 0$ получаем пропагатор в *калибровке Ландау*, т. е. в чистом виде в лоренцевой калибровке. При $\alpha = 1$ получаем пропагатор в удобной для вычислений *калибровке Фейнмана.*

Задача. *Найти пропагатор фотона в кулоновской калибровке*

$$S_{\text{fix}} = \frac{1}{2\alpha_1}(A_0)^2 - \frac{1}{2\alpha_2}(\nabla \boldsymbol{A})^2.$$

Мы выяснили, что внутренним линиям в диаграммах теорий, содержащих фотоны, отвечает пропагатор (7). А что отвечает внешним линиям? По аналогии со скалярным бозомном, можно понять, что на внешних входящих линиях должны сидеть волновые функции фотонов, а на внешних выходящих — сопряженные им. Плоским волнам отвечают функции

$$A_{\mu,\boldsymbol{p}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}} e_\mu\, e^{-ipx}, \qquad e_\mu e^\mu = 1.$$

Из уравнения движения

$$(g^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu = 0$$

получаем

$$p^2 e^\mu = p^\mu (pe). \tag{9}$$

Кроме того, калибровочная инвариантность означает допустимость замен вида

$$e_\mu \to e_\mu + \lambda p_\mu. \tag{10}$$

Это соотношение уменьшает число нетривиальных компонент вектора поляризации на 1. При $p^2 \neq 0$ уравнение (9) допускает только калибровочно тривиальное решение $\sim p_\mu$. При $p^2 = 0$ имеем пространственно-временную поперечность

$$p_\mu e^\mu = 0. \tag{11}$$

Соотношение (11) уменьшает число компонент вектора поляризации еще на 1. Итак, вектор поляризации содержит $D-2$ физически нетривиальных компонент. Удобно выбрать их следующим образом. Преобразованием (10) обратим компоненту e_0 в нуль. Тогда из (11) получим

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{e} = 0.$$

Тогда за базисные поляризации можно принять любой набор ортогональных пространственных векторов, ортогональных также волновому вектору $\boldsymbol{p}$ фотона.

Рассмотрим теперь взаимодействие частиц с электромагнитным полем. Калибровочно инвариантное взаимодействие можно построить с помощью *ковариантной производной*

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu. \tag{12}$$

Если $\varphi(x)$ преобразуется при калибровочном преобразовании как

$$\varphi(x) = e^{-ie\chi(x)}\varphi'(x), \tag{13}$$

то $D_\mu\varphi(x)$ преобразуется также:

$$D_\mu\varphi(x) = e^{-ie\chi(x)}D'_\mu\varphi(x).$$

Поэтому, если мы возьмем действие, инвариантное относительно замены $\varphi_i(x) \to e^{ie_i\kappa}\varphi_i(x)$ ($\kappa = \mathrm{const}$), и заменим там обычные производные на ковариантные с зарядами e_i, то мы получим калибровочно инвариантное действие. (При этом нельзя исключать случая, когда e_i произвольны, если мы не требуем компактности группы калибровочных преобразований.) Рассмотрим, к примеру, теорию взаимодействия электронов и фотонов (*квантовую электродинамику*):

$$S[\psi,\bar\psi,A] = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \int d^4x\, \bar\psi(i\hat\partial - e\hat A - m)\psi. \tag{14}$$

В этой теории (в калибровке Фейнмана), мы можем построить следующую диаграммную технику для амплитуды M:

$$\overset{p}{\longleftarrow} \quad = \quad \frac{i}{\hat p - m + i0}$$

$$\mu - \overset{p}{-} - \nu \quad = \quad -i\frac{g_{\mu\nu}}{p^2 + i0}$$

$$\overset{\mu}{\perp} \quad = \quad -ie\gamma^\mu$$

$$\leftarrow p \quad = \quad \begin{cases} u_p & \text{для входящего электрона,} \\ \bar u_{-p} & \text{для выходящего позитрона} \end{cases}$$

$$p \leftarrow \quad = \quad \begin{cases} \bar u_p & \text{для выходящего электрона,} \\ u_{-p} & \text{для входящего позитрона} \end{cases}$$

$$- - p,\mu \quad = \quad \begin{cases} e_\mu & \text{для входящего фотона,} \\ e^*_\mu & \text{для выходящего фотона} \end{cases}$$

(под $u_{\pm p}$ понимаются коэффициенты $\psi_{\pm p}$ в плоских волнах из предыдущей лекции). Кроме того,в замкнутых петлях должно быть четное количество внутренних линий, причем каждой замкнутой петле отвечает множитель (-1) и след по спинорным индексам.

Действительно, замкнутой петле отвечает среднее

$$\langle(\bar{\psi}(y_1)\gamma^{\mu_1}\psi(y_1))\ldots(\bar{\psi}(y_N)\gamma^{\mu_N}\psi(y_N))\rangle.$$

В случае нечетного N вклады с противоположными направлениями стрелок сокращают друг друга. Кроме того, чтобы построить последовательные спаривания $\langle\psi(y_{n-1})\bar{\psi}(y_n)\rangle$, нужно перенести $\psi(y_1)$ в крайне правое положение что даст множитель $(-1)^{2N-1} = (-1)$.

Кроме того, при перестановке двух хвостов амплитуда меняет знак.

Следует отметить одну простую двумерную модель, не обладающую калибровочной инвариантностью, но по многим свойствам похожую на четырехмерную квантовую электродинамику. Это *массивная модель Тирринга*

$$S_{\mathrm{Thirring}}[\psi,\bar{\psi},A] = \frac{1}{2}\int d^2x\, A_\mu A^\mu + \int d^2x\, \bar{\psi}(i\hat{\partial} - e\hat{A} - m)\psi.$$

Матрицы γ^μ следует считать матрицами 2×2. Эта форма удобна для построения диаграммной техники. Она отличается от диаграммной техники КЭД только тем, что пропагатор фотона заменяется на пропагатор фиктивной частицы $ig_{\mu\nu}$. Можно поступить по-другому: проинтегрировать явно по полю A_μ. Именно,

$$e^{iS_{\mathrm{Thirring}}[\psi,\bar{\psi}]} = \int DA\, e^{iS_{\mathrm{Thirring}}[\psi,\bar{\psi},A]}.$$

Задача. *Показать, что*

$$S_{\mathrm{Thirring}}[\psi,\bar{\psi}] = \int d^2x\, \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi - \frac{e^2}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2\right).$$

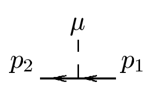
Другой полезной моделью является *скалярная электродинамика*:

$$S[\varphi,\bar{\varphi},A] = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \int d^4x\, (|(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi|^2 - m^2|\varphi|^2).$$

Здесь взаимодействие имеет вид

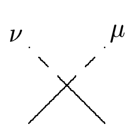
$$-ieA^\mu(\bar{\varphi}\partial_\mu\varphi - (\partial_\mu\bar{\varphi})\varphi) + e^2A^\mu A_\mu\bar{\varphi}\varphi.$$

Мы видим, что здесь кроме очевидного взаимодействия через ток $j^\mu = i(\bar{\varphi}\partial_\mu\varphi - (\partial_\mu\bar{\varphi})\varphi)$ имеется двухфотонная вершина. Однофотонному взаимодействию отвечает диаграмма



$$= \quad -ie(p_1^\mu + p_2^\mu),$$

а двухфотонному — диаграмма



$$= \quad 2ie^2g^{\mu\nu}.$$