Лекция 11
Поля спина $1/2$. Квантование

Рассмотрим лагранжиан

$$S[\psi,\bar\psi]=\int d^4x\,\bar\psi(i\hat\partial-m)\psi, \tag{1}$$

где $\hat a\stackrel{\rm def}{=}\gamma^\mu a_\mu$ (заметим также, что $\hat a^2=a^2$). Варьируя по $\bar\psi(x)$ получаем уравнение Дирака

$$(i\hat\partial-m)\psi=0. \tag{2a}$$

Варьируя по $\psi(x)$, получаем

$$\bar\psi(i\overleftarrow{\hat\partial}+m)=0. \tag{2b}$$

Лагранжиан инвариантен по отношению к преобразованию

$$\psi(x)\to e^{i\alpha}\psi(x),\qquad \bar\psi(x)\to e^{-i\alpha}\bar\psi(x).$$

Соответствующий нтеровский ток имеет вид

$$j^\mu=\bar\psi\gamma^\mu\psi,\qquad \partial_\mu j^\mu=0. \tag{3}$$

Нулевая компонента тока

$$j^0=\bar\psi\gamma^0\psi=\psi^+\psi=|\xi^1|^2+|\xi^2|^2+|\eta_{\dot1}|^2+|\eta_{\dot2}|^2$$

положительно определена. Для частных решений $\psi_p(x)$ и $\psi_{-p}(x)$ имеем $j^0=\frac{\varepsilon}{m}\psi_0^+\psi_0$, $\boldsymbol{j}=\frac{\boldsymbol{p}}{m}\psi_0'^+\psi_0'$. Удобно нормировать ψ_0, ψ_0' условиями

$$\psi_0^+\psi_0=\bar\psi_p\psi_p=2m,\qquad \psi_0'^+\psi_0'=\bar\psi_{-p}\psi_{-p}=2m.$$

Далее, к плосковолновому решению можно добавить спиновый индекс α, причем $\alpha=+$, если $\xi\sim\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, и $\alpha=-$, если $\xi\sim\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Задача. *Показать, что в такой нормировке соотношение*

$$\begin{aligned}\psi(t,\boldsymbol{x})&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\boldsymbol p}}}\left(a_{\boldsymbol{p}\alpha}(t)\psi_{p,\alpha}e^{i\boldsymbol{px}}+b^+_{\boldsymbol{p}\alpha}(t)\psi_{-p,\alpha}e^{-i\boldsymbol{px}}\right),\\ \bar\psi(t,\boldsymbol{x})&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\boldsymbol p}}}\left(a^+_{\boldsymbol{p}\alpha}(t)\bar\psi_{p,\alpha}e^{i\boldsymbol{px}}+b_{\boldsymbol{p}\alpha}(t)\bar\psi_{-p,\alpha}e^{-i\boldsymbol{px}}\right)\end{aligned}$$

является каноническим преобразованием для антикоммутативных переменных, причем скобка Пуассона новых переменных равна

$$\{a_{\boldsymbol{p}\alpha},a^+_{\boldsymbol{p}'\alpha'}\}=\{b_{\boldsymbol{p}\alpha},b^+_{\boldsymbol{p}'\alpha'}\}=i(2\pi)^3\delta_{\alpha\alpha'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}').$$

Построить каноническое квантование и вычислить парную корреляционную функцию.

Рассмотрим квантование с помощью функциональных интегралов. Введем производящий функционал

$$Z[\zeta,\bar\zeta]=\int D\psi\,D\bar\psi\,e^{iS[\psi,\bar\psi]+i(\zeta,\bar\psi)+i(\bar\zeta,\psi)}. \tag{4}$$

Двухточечная корреляционная функция равна

$$G(x,x') = \langle\psi(x)\psi(x')\rangle = -Z^{-1}[\zeta,\bar\zeta]\frac{\delta}{\delta\zeta(x')}\frac{\delta}{\delta\bar\zeta(x)}Z[\zeta,\bar\zeta]\bigg|_{\zeta=\bar\zeta=0}.$$

Вычислим ее с помощью формулы (10) из Лекции 9. Мы должны подставить

$$\begin{aligned} &K \to \hat\partial + im + 0 = -i(\hat p - m + i0),\\ &\zeta \to i\zeta,\\ &\bar\zeta \to -i\zeta, \end{aligned}$$

где p — оператор импульса. Отсюда получаем

$$G(x,x') = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,G(p)e^{-ip(x-x')},\qquad G(p) = \frac{i}{\hat p - m + i0} = i\frac{\hat p + m}{p^2 - m^2 + i0}. \tag{5}$$

Поскольку поля под коррелятором различны и

$$\langle\psi(x)\psi(x')\rangle = \langle\bar\psi(x)\bar\psi(x')\rangle = 0,$$

в диаграммной технике этой функции Грина будет отвечать линия со стрелкой.

Изучим теперь некоторые свойства уравнения Дирака. Возмем уравнение (2b) и транспонируем его:

$$(-i\gamma^{\mu T}\partial_\mu - m)\bar\psi^T(x) = 0. \tag{2b$'$}$$

Очевидно, матрицы $-\gamma^{\mu T}$ удовлетворяют той же самой алгебре Клиффорда, что и γ^μ, т. е. описывают ту же самую алгебру $M(4,\mathbf{C})$. Поэтому существует такая матрица C (матрица *зарядового сопряжения*), что

$$-\gamma^{\mu T} = C^{-1}\gamma^\mu C. \tag{6}$$

Из (6) очевидно следует, что

$$\psi^c = C\bar\psi^T \tag{7}$$

удовлетворяет уравнению Дирака. В спинорном представлении

$$\gamma^{0T} = \gamma^0,\qquad \gamma^{1T} = -\gamma^1,\qquad \gamma^{2T} = \gamma^2,\qquad \gamma^{3T} = -\gamma^3$$

и

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & \\ & i\sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что преобразование (7) переводит решения типа ψ_p в решения типа ψ_{-p}.

Задача. *Показать, что если $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению Дирака во внешнем электромагнитном поле*

$$(i\hat\partial - e\hat A - m)\psi = 0,$$

то зарядово сопряженное поле удовлетворяет уравнению

$$(i\hat\partial + e\hat A - m)\psi^c = 0.$$

Рассмотрим теперь обращение времени. Сделаем в уравнении (2b$'$) замену $t \to -t$:

$$(i\gamma^{0T}\partial_0 - i\boldsymbol{\gamma}^T\nabla - m)\bar\psi^T(-t,\boldsymbol{x}) = 0.$$

Подберем такую матрицу T, что $\psi^t(t,\boldsymbol{x}) = T\bar\psi^T(-t,\boldsymbol{x})$ удовлетворяет уравнению Дирака. Для этого надо, чтобы

$$T\gamma^{0T}T^{-1} = \gamma^0,\qquad T\boldsymbol{\gamma}^T T^{-1} = -\boldsymbol{\gamma}.$$

Легко понять, что в спинорном представлении

$$T = i\gamma^3\gamma^1\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \\ & -\sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Множитель i введен, чтобы было $(\psi^c)^t = (\psi^t)^c$.

По аналогии с вещественным бозоном можно ввести нейтральное *майорановское* поле, удовлетворяющее условию

$$\psi = \psi^c. \tag{8}$$

Это условие совместимо с уравнением Дирака. На майорановских полях ток j^μ обращается в нуль.

Задача. *Доказать.*

Майорановскому полю отвечает действие

$$S[\psi] = \frac{1}{2}\int d^4x\, \psi (C^T)^{-1}(i\hat{\partial} - m)\psi$$

с условием "вещественности" (8). Легко проверить, что парная корреляционная функция

$$\langle \psi(x)\psi(x')\rangle = G(x,x')C^T,$$

где $G(x,x')$ берется из формулы (5). В диаграммной технике отличие состоит еще и в том, что для майорановских спиноров функции Грина отвечает ненаправленная линия.

Мы можем уменьшить число степеней свободы в уравнении Дирака по-другому. Давайте рассмотрим поля ψ_R и ψ_L, удовлетворяющие *условиям Вейля*

$$\gamma^5\psi_R = \psi_R, \tag{9a}$$
$$\gamma^5\psi_L = -\psi_L. \tag{9b}$$

Проверим, совместимы ли эти условия с уравнением Дирака:

$$(i\gamma\partial - m)\psi_{R,L} = \pm(i\gamma\partial - m)\gamma^5\psi_{R,L} = \pm\gamma^5(-i\gamma\partial - m)\psi_{R,L}.$$

Отсюда следует, что условием совместимости является безмассовость $m = 0$. Поле ψ_R можно отождествить с его первыми двумя компонентами, а поле ψ_L — с последними. Тогда уравнение Дирака для вейлевских спиноров имеет вид

$$\psi_R = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}^\circ\psi_R, \qquad \psi_L = -\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}^\circ\psi_L,$$

где $\boldsymbol{p}^\circ$ обозначает оператор, отвечающий единичному вектору, направленному вдоль $\boldsymbol{p}$. Величина $\boldsymbol{s}\boldsymbol{p}^\circ$, где $\boldsymbol{s}$ — оператор спина (в данном случае $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$), называется *спиральностью*. Мы видим что правая вейлевская частица всегда имеет положительную спиральность, а левая — отрицательную. Теперь рассмотрим соответствующие античастицы с волновыми функциями $\psi^c = C\bar{\psi}^T$. Легко понять, что античастица имеет спиральность, противоположную спиральности частицы. Действительно

$$\xi^c = -i\sigma^2\eta^*, \qquad \eta^c = i\sigma^2\xi^*.$$

Это значит, что античастица к левому спинору описывается правым спинором.

Действие для вейлевских частиц имеет вид

$$S_{R,L}[\psi,\bar{\psi}] = \int d^4x\, \bar{\psi}\hat{\partial}\psi,$$

где $\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0$, и предполагается одно из условий (9). Эквивалентно это действие можно записать в виде

$$S_{R,L}[\psi,\bar{\psi}] = \int d^4x\, \bar{\psi}\left(\frac{1\pm\gamma^5}{2}\right)\hat{\partial}\psi.$$

В этом случае можно не накладывать условия (9a) или (9b). Две лишних компоненты не будут динамическими. Действие от них не зависит.

Рассмотрим теперь уравнение Дирака во внешнем поле в нерелятивистском пределе. Удобно воспользоваться т. н. *стандартным представлением*

$$u = \frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}, \qquad v = \frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}}, \tag{10}$$

т. е. матрица преобразования $U = U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. В этом представлении

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Уравнение Дирака имеет вид

$$\begin{aligned} (i\partial_0 - e\varphi)u - \boldsymbol{\sigma}(i\nabla - e\boldsymbol{A})v &= mu, \\ -(i\partial_0 - e\varphi)v + \boldsymbol{\sigma}(i\nabla - e\boldsymbol{A})u &= mv. \end{aligned}$$

В нерелятивистском пределе $E \simeq m$, $p \simeq mv \ll m, E$. Поэтому сделаем замену

$$u \to ue^{-imt}, \qquad v \to ve^{-imt}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} (i\partial_0 - e\varphi)u - \boldsymbol{\sigma}(i\nabla - e\boldsymbol{A})v &= 0, \\ -(i\partial_0 - e\varphi)v + \boldsymbol{\sigma}(i\nabla - e\boldsymbol{A})u &= 2mv. \end{aligned}$$

В последнем уравнении мы можем пренебречь $i\partial_0 v$ по сравнению с $2mv$. Поэтому получаем

$$v = \frac{\boldsymbol{\sigma}(i\nabla - e\boldsymbol{A})u}{2m}.$$

Подставляя это в первое уравнение, получаем

$$i\partial_0 u = \frac{(\boldsymbol{\sigma}(i\nabla - e\boldsymbol{A}))^2 u}{2m} + e\varphi u.$$

Упрощая кинетический член, находим уравнение Шрдингера

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = Hu, \qquad H = \frac{1}{2m}(i\nabla - e\boldsymbol{A})^2 + e\varphi - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{B}, \tag{12}$$

где $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$. Это объясняет гиромагнитное отношение электрона $g_e = 2$, определяемое соотношением

$$\boldsymbol{\mu} = g\frac{e}{2m}\boldsymbol{s}.$$

Это значит, что вклад спина в магнитный момент в g раз больше вклада орбитального момента.