Лекция 8
Спонтанное нарушение симметрии

Рассмотрим вещественную модель φ^4 с $m^2 < 0$:

$$S[\varphi] = \int d^D x \, \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{\lambda}{4!}(\varphi^2 - \varphi_0^2)^2 \right), \qquad -m^2 = \frac{\lambda \varphi_0^2}{3!}. \tag{1}$$

В модели имеется симметрия $\varphi \to -\varphi$. Классически имеется два равнозначных минимума $\varphi = \pm\varphi_0$. Рассмотрим поведение системы вблизи одного из них. Положим $\varphi = \varphi_0 + \chi$. Тогда

$$S = \int d^D x \, \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \frac{\bar{m}^2}{2}\chi^2 - \frac{\lambda\varphi_0}{3!}\chi^3 - \frac{\lambda}{4!}\chi^4 \right), \qquad \bar{m}^2 = -2m^2 = \frac{\lambda\varphi_0^2}{3}. \tag{2}$$

Мы видим, что квазиклассически модель следует описывать как свободную частицу χ с массой $\bar{m}$ и взаимодействием типа χ^3 и χ^4. Модель перенормируема при $D \le 4$. Это можно установить и непосредственно, но правильнее считать, что перенормируемость индуцируется перенормируемостью модели φ^4.

Теперь кратко рассмотрим квантовые эффекты за пределами теории возмущений. Будем вычислять функциональный интеграл методом перевала при $\lambda \to 0$, $\varphi \to \infty$, так что $\bar{m} = \mathrm{const}$. Это значит, что мы будем рассматривать нулевой порядок теории возмущений, но будем учитывать все седловые точки действия как функции комплексного φ. Рассмотрим для простоты минимумы евклидова действия при граничном условии $\varphi(x) = \pm\varphi_0$ при $|x| \to \infty$. При $D > 1$ имеется единственное решение $\varphi(x) = \varphi_0$ или $\varphi(x) = -\varphi_0$ в зависимости от граничного условия. При $D = 1$ (квантовая механика) можно на самом деле наложить два типа условий:

1) “топологически тривиальное” условие $\varphi(\tau = -\infty) = \varphi(\tau = +\infty) = \varphi_0$ или $-\varphi_0$;

2) “топологически нетривиальное” условие $\varphi(\tau = -\infty) = -\varphi(\tau = +\infty) = \varphi_0$ или $-\varphi_0$.

Отметим, что условия наложены в евклидовом пространстве. В пространстве Минковского таких решений нет, так как частица должна иметь достаточную энергию, чтобы преодолеть барьер и точка минимума не может быть точкой остановки.

Существенно, что условию типа 2) отвечает непрерывное семейство *инстантонных* решений

$$\varphi(\tau) = \mp\varphi_0 \tanh \frac{\bar{m}(\tau - \tau_0)}{2}. \tag{3}$$

с конечным действием

$$S_1 = 2\frac{\bar{m}^3}{\lambda}$$

Эти решения отвечают туннелированию через барьер и отвечают за снятие вырождения основного состояния.

Покажем, что инстантоны приводят к тому, что $\langle\varphi\rangle = 0$ даже при усреднении по полям $\varphi(\tau)$ с граничным условием $\varphi(\pm\infty) = \varphi_0$. Рассмотрим функциональный интеграл на конечном (но большом) интервале мнимого времени T с условием $\varphi(0) = \varphi(T) = \varphi_0$. На этом интервале для любого четного N имеются “N-солитонные” решения, то есть решения N раз переходящее из области $\varphi \simeq \varphi_0$ в область $\varphi \simeq -\varphi_0$ или наоборот. Такие решения имеют конечное действие $\simeq NS_1$. Заметим, что они параметризуются N моментами переключений $0 < t_1 < \cdots < t_N < T$. Поэтому мера таких решений $\sim \int d^N t = T^N/N!$ и

$$I_0(T) = \int D\varphi \, e^{-S_E[\varphi]} \simeq e^{-\Gamma_{\mathrm{fluct}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(CT)^{2n} e^{-2nS_1}}{(2n)!} \simeq \frac{1}{2} e^{-S_{\mathrm{fluct}}} \exp\left(CTe^{-S_1}\right),$$

где C — константа, а Γ_{fluct} — вклад флуктуаций вблизи минимума в эффективное действие. Что же касается вкладов в функциональный интеграл, содержащий $\varphi(\tau)$, то они пропорциональны

$$\varphi_0 \int d^N t \, (-1)^{\#\{t_i < \tau\}} = \sum_{m=0}^{N} (-1)^m \frac{\tau^m}{m!} \frac{(T-\tau)^{N-m}}{(N-m)!} = \frac{(T-2\tau)^N}{N!}$$

и функциональный интеграл равен

$$I_1(T,\tau)=\int D\varphi\,\varphi(\tau)e^{-S_E[\varphi]}\simeq\varphi_0 e^{-\Gamma_{\rm fluct}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[C(T-2\tau)]^{2n}e^{-2nS_1}}{(2n)!}\simeq\frac{1}{2}e^{-S_{\rm fluct}}\exp\left(C|T-2\tau|e^{-S_1}\right).$$

Отсюда

$$\langle\varphi(\tau)\rangle_{\varphi(0)=\varphi(T)=\varphi_0}=\frac{I_1(T,\tau)}{I_0(T)}\simeq\varphi_0\exp\left(Ce^{-S_1}(|T-2\tau|-T)\right)\simeq\begin{cases}\varphi_0 e^{-\tau/\tau_0} & \text{при } t\ll T,\\ \varphi_0 e^{-(T-\tau)/\tau_0} & \text{при } T-t\ll T,\end{cases}$$

где $\tau_0=2C^{-1}e^{S_1}$ — корреляционная длина. Мы видим, что при $T\to\infty$ среднее от φ обращается в нуль. Более того, корреляции в системе убывают экспоненциально. О вычислении константы C см. Приложение. Понятно, что $C\sim\bar m$. Туннелирование через барьер происходит за экспоненциально большое время $\sim\bar m^{-1}e^{S_1}$. Тем не менее симметрия полностью восстанавливается. Основное состояние расщепляется на два со щелью $\sim\bar m e^{-S_1}$.

При $D>1$ аналогичные решения соответствуют $(D-1)$-мерным границам раздела фаз, причем действие пропорционально площади границы. Логарифм меры границ данной площади также пропорционален площади. Ситуация зависит от соотношения коэффициентов и имеется фазовый переход по λ. При достаточно малом λ основное состояние дважды вырождено и имеет место *спонтанное нарушение симметрии*. При больших λ симметрия может восстанавливаться.

Попробуем теперь понять, не устраняется ли нарушение симметрии пертурбативно. Рассмотрим наиболее локальные вклады в эффективное действие:

$$\Gamma[\varphi]\simeq\int d^Dx\,\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2-V_{\rm eff}(\varphi)\right),\qquad V_{\rm eff}(\varphi)=i\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma_n(p=0)\varphi^n.$$

В однопетлевом приближении легко получить (с заменой $\lambda\to\lambda\mu^{4-D}$)

$$\Gamma_{2n}(p=0)=\frac{(2n)!}{2^n2n}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\,\left(\frac{\lambda\mu^{4-D}}{q^2+i0}\right)^n+\frac{\delta m^2}{2}\varphi^2+\frac{\delta\lambda\mu^{4-D}}{4!}\varphi^4.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}V_{\rm eff}(\varphi)&=\frac{m^2+\delta m^2}{2}\varphi^2+\frac{(\lambda+\delta\lambda)\mu^{4-D}}{4!}\varphi^4+i\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(\frac{\lambda\mu^{4-D}\varphi^2/2}{q^2-m^2+i0}\right)^n\\&=\frac{m^2+\delta m^2}{2}\varphi^2+\frac{(\lambda+\delta\lambda)\mu^{4-D}}{4!}\varphi^4-\frac{i}{2}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\,\log\left(1-\frac{\lambda\mu^{4-D}\varphi^2/2}{q^2-m^2+i0}\right)\\&={\rm const}+\frac{m^2+\delta m^2}{2}\varphi^2+\frac{(\lambda+\delta\lambda)\mu^{4-D}}{4!}\varphi^4+\frac{i}{2}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\,\log(q^2-m^2-\lambda\mu^{4-D}\varphi^2/2+i0)\\&={\rm const}+\frac{m^2+\delta m^2}{2}\varphi^2+\frac{(\lambda+\delta\lambda)\mu^{4-D}}{4!}\varphi^4-\frac{m^4(\varphi)}{16\pi^2D}\left(\frac{m^2(\varphi)}{4\pi\mu^2}\right)^{(D-4)/2}\Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right),\end{aligned}$$

$$m^2(\varphi)=m^2+\lambda\mu^{4-D}\varphi^2/2.$$

При $D=4-2\varepsilon$ получаем

$$\begin{aligned}V_{\rm eff}(\varphi)={\rm const}&+\frac{m^2+\delta m^2}{2}\varphi^2+\frac{(\lambda+\delta\lambda)\mu^{4-D}}{4!}\varphi^4+\frac{(m^2+\lambda\varphi^2/2)^2}{64\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{3}{2}-\mathbf{C}-\log\frac{m^2+\lambda\varphi^2/2}{4\pi\mu^2}\right)\\&+\frac{\lambda\varphi^2\log\mu^2}{64\pi^2}.\end{aligned}$$

Накладывая условие перенормировки $V_{\rm eff}(\varphi)=\frac{1}{2}m^2\varphi^2+\frac{1}{4!}\lambda\varphi^4+O(\varphi^6)$, получаем

$$V_{\rm eff}(\varphi)=\frac{m^2}{2}\varphi^2+\frac{\lambda}{4!}\varphi^4+\frac{1}{64\pi^2}\left[(m^2+\lambda\varphi^2/2)^2\log\frac{m^2+\lambda\varphi^2/2}{m^2}-\frac{\lambda\mu^2}{2}\varphi^2-\frac{3}{8}\lambda^2\varphi^4\right].\qquad(4)$$

При $m^2 > 0$ эффективный потенциал положителен и симметрия не нарушена. При $m^2 < 0$ имеется нарушение симметрии при достаточно малых λ.

Отдельно следует рассмотреть случай $m^2 = 0$. В этом случае (4) неприменимо и следует использовать условие перенормировки $\lambda = d^4 V_{\rm eff}/d\varphi^4|_{\varphi=M}$. Тогда

$$V_{\rm eff}(\varphi) = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{\lambda^2\varphi^4}{256\pi^2}\left(\log\frac{\varphi^2}{M^2} - \frac{25}{6}\right) \qquad (5)$$

имеет минимум при

$$\varphi_{\rm min} \sim M e^{-16\pi^2/3\lambda}.$$

Здесь имеется *динамическое* нарушение симметрии, возникающее за счет квантования. Однако теория возмущений здесь неприменима, поэтому обоснованность результата неясна.

Теперь рассмотрим случай комплексного поля φ с взаимодействием $|\varphi|^4$:

$$S[\varphi] = \int d^D x\, \left(|\partial_\mu\varphi|^2 - \frac{\lambda}{4}(|\varphi|^2 - \varphi_0^2)^2\right). \qquad (6)$$

Здесь имеется непрерывная $U(1)$ симметрия $\varphi \to e^{i\alpha}\varphi$. В классике имеется вырожденный набор основных состояний $\varphi = e^{i\alpha}\varphi_0$. Рассмотрим решения вблизи, например, состояния $\varphi = \varphi_0$. Для этого сделаем замену

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho(x) + i\chi(x))$$

где $\rho(x)$ и $\chi(x)$ — вещественные поля. Получаем

$$S = \int d^D x\, \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \frac{\lambda\varphi_0^2}{2}\rho^2 - \frac{\lambda\varphi_0}{2\sqrt{2}}\rho(\rho^2+\chi^2) - \frac{\lambda}{16}(\rho^2+\chi^2)^2\right).$$

Это теория двух частиц, массивной ρ с $m_\rho^2 = \lambda\varphi_0^2$ и одной безмассовой χ и взаимодействиями разных типов. Наличие безмассовой частицы (*голдстоуновского бозона*) характерно для теорий с нарушением непрерывной глобальной симметрии (*теорема Голдстоуна*). Это связано с колебаниями вдоль симметричного направления. Чтобы было яснее, давайте сделаем замену

$$\varphi(x) = \left(\varphi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho'(x)\right) e^{i\chi'(x)/\sqrt{2}\varphi_0}.$$

Тогда

$$S = \int d^D x\, \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\rho')^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi')^2 - \frac{\lambda\varphi_0^2}{2}\rho'^2 - \frac{\lambda\varphi_0}{2\sqrt{2}}\rho'^3 - \frac{\lambda}{16}\rho'^4 + \frac{1}{4\varphi_0^2}(\rho'^2 + \sqrt{2}\varphi_0\rho')(\partial_\mu\chi')^2\right).$$

Здесь χ' — бозон, непосредственно связанный с нарушением симметрии, определенный на окружности длины $2\pi(\sqrt{2}\varphi_0)$. Однако здесь требуется новый тип взаимодействий, включающий производные. Впрочем, такого типа взаимодействия уже нам встречались в контрчленах.

Имеет ли здесь место спонтанное нарушение симметрии на квантовом уровне? Рассмотрим непертурбативные эффекты как в предыдущем случае. Рассмотрим евклидово действие с граничными условиями $\varphi(x) \to e^{i\alpha}\varphi_0$ при $|x| \to \infty$. Отображение бесконечности в множество классических вакуумов есть отображение $S^{D-1} \to S^1$. При $D > 2$ отображение топологически тривиально и инстантонных эффектов нет. При $D = 2$ отображения $S^1 \to S^1$ распадаются на классы, нумеруемые целым числом. Простой представитель n-го класса имеет вид

$$\varphi(Re^{\subset\alpha}) \to \varphi_0 e^{in\alpha} \qquad (R \to \infty). \qquad (7)$$

Чтобы упростить анализ, положим $\lambda \to \infty$. В этом пределе поле ρ' "вымерзает", так как имеет бесконечную массу, а вместо поля χ' удобно ввести поле $\phi = \sqrt{2}\varphi_0\chi'$ с периодом 2π. Действие для ϕ примет вид

$$S[\phi] = \frac{\beta}{2}\int d^2 x\,(\partial_\mu\phi)^2, \qquad \beta = 2\varphi_0^2. \qquad (8)$$

В этом случае удобно ввести комплексную координату $z = x^0 + ix^1$ в евклидовом пространстве. Тогда легко построить представитель (7), удовлетворяющий уравнению движения $\partial_\mu^2 \phi = 0$ или $\partial_z \partial_{\bar z} \phi = 0$:

$$\phi(x) = n \operatorname{Im} \log z.$$

Решение имеет разрыв в точке $z = 0$, однако он сглаживается при конечном λ. Это решение можно обобщить

$$\phi(x) = \sum_a q_a \operatorname{Im} \log z. \tag{9}$$

Действие для решения (9) расходится, но если имеется обрезание на масштабе r, то для системы размера R

$$S_n[q,x] = \frac{\beta}{2} \left(\sum_{a \neq b}^{n} q_a q_b \, 2\pi \log \frac{R}{|x_a - x_b|} + S_1 \sum_a^n q_a^2 \right), \qquad S_1 = 2\pi \log \frac{R}{r}. \tag{10}$$

Мы видим, что поведение инстантонов описывается квантовой кулоновской двумерной плазмой, содержащей частицы всех зарядов. Вклад в статсумму имеет вид

$$Z_{\text{inst}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q \in \mathbf{Z}^n} \int d^n x \, e^{-S_n[q,x]}.$$

Основной вклад дают инстантоны с $q = \pm 1$. При малых β инстантоны распределены равномерно и поле (9) замывает корреляции ϕ. Это значит, что нарушения симметрии нет. При больших β происходит переход Березинского–Костерлица–Таулеса, инстантоны объединяются в тесные пары инстантон–антиинстантон вне которых ϕ (или φ) примерно постоянна. В этом случае симметрия остается нарушенной.

Приложение

Давайте рассмотри флуктуации вблизи тривиального ($i = 0$) и инстантонного ($i = 1$) решений:

$$\varphi(\tau) = \varphi_i(\tau) + \sum_n C_n \psi_{n,i}(\tau).$$

где $\psi_n, i(\tau)$ — решение уравнения

$$\ddot{\psi}_{n,i} + \left(\frac{\bar{m}^2}{2} - \frac{\lambda \varphi_i}{2} \right) \psi_{n,i} = -\omega_{n,i}^2 \psi_{n,i},$$

нормированные условием $\int d\tau \, \psi_{n,i}^2(\tau) = 1$. Тогда норма

$$\|\delta\varphi\|_0^2 = \int d\tau \, (\delta\varphi)^2 \simeq \sum_n C_n^2,$$

$$\|\delta\varphi\|_1^2 \simeq (\delta t)^2 \int d\tau \, \dot{\varphi}_1^2 \sum_n C_n^2.$$

Отсюда мера

$$D\varphi = \begin{cases} \prod_n dC_n & \text{вблизи } \varphi_0 \text{ и} \\ A \, d\tau \prod_n dC_n & \text{вблизи } \varphi_1, \end{cases} \qquad A = \left(\int d\tau \, \dot{\varphi}_1^2 \right).$$

Флуктуационный вклад в эффективное действие равен

$$e^{-\Gamma_{\text{fluct},i}} = \int \prod_n dC_n \, e^{-\frac{1}{2}\omega_{n,i}^2 C_n^2} \sim \prod_n \omega_{n,i}^{-1}.$$

Отсюда

$$C = A e^{-(\Gamma_{\text{fluct},1} - \Gamma_{\text{fluct},0})} = \left(\int d\tau \, \dot{\varphi}_1^2 \right)^{1/2} \frac{\prod_n \omega_{n,0}}{\prod_n \omega_{n,1}}.$$

Размерность обратного времени восстанавливается, если учесть, что флуктуации вблизи тривиального решения имеют на одну моду больше, чем флуктуации вблизи одноинстантонного решения.