# Лекция 7
## Перенормировки, перенормируемость и ренормгруппа

Размерная регуляризация — не единственная. Рассмотрим другие регуляризации.

*1. Обрезание в импульсном пространстве* состоит в том, что интеграл $\int_E \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ заменяется на $\int_{E,\ q^2\le\Lambda^2} \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$. Интеграл конечен при конечном параметре обрезания $\Lambda$. После вычисления контрчленов берется предел $\Lambda\to\infty$. Параметр $\Lambda$ аналогичен параметру $\mu e^{1/2\varepsilon}$ в размерной регуляризации. Регуляризация обрезанием требует некоторой аккуратности, так как может зависеть от центра сферы интегрирования, а при взятии интегралов по частям следует заботиться о граничных вкладах.

*2. Регуляризация Паули–Вилларса* состоит в замене пропагатора $G_0(p) = \frac{i}{p^2-m^2+i0}$ на

$$G_0(p; M_1, M_2, \ldots, M_k) = \frac{i}{p^2-m^2+i0} - \sum_{j=1}^{k} \frac{iA_j}{p^2-M^2+i0}.$$

Если

$$\sum_{j=1}^{k} M_j^n A_j = m^n \qquad n = 0, 1, \ldots, k-1,$$

то

$$G_0(p; M_1, M_2, \ldots, M_k) \sim p^{-2k-2} \quad \text{при} \quad p^2\to\infty.$$

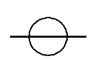
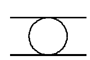
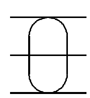
При $M_j\to\infty$ регуляризованный пропагатор переходит в обычный. Это самый универсальный метод регуляризации но и технически наиболее сложный.

Теперь обратимся к вопросу о перенормируемости теории $\varphi^4$. Назовем *индексом расходимости* диаграммы суммарную степень импульсов $q$ и дифференциалов $dq$. Иными словами, индекс расходимости $I$ связан с числом петель $L$ и числом внутренних линий $M$ соотношением

$$I = DL - 2M.$$

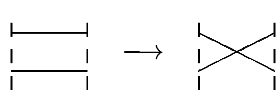
Если индекс диаграммы отрицателен, диаграмма сходится. Если он равен нулю, диаграмма логарифмически расходится. Если он положителен, диаграмма расходится степенным образом.

Рассмотрим простейшие диаграммы:

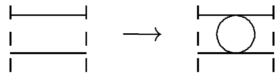
| диаграмма | $I(D)$ | $I(4)$ | $I(3)$ | $I(2)$ |
|---|---|---|---|---|
|  | $2D-6$ | $2$ | $0$ | $-2$ |
|  | $D-4$ | $0$ | $-1$ | $-2$ |
|  | $2D-10$ | $-2$ | $-4$ | $-6$ |

Мы видим, что при $D=4$ простейшая “двуногая” диаграмма расходится квадратично. Чтобы сделать ее конечной, надо дважды продифференцировать ее по $p^2$. Интегрируя результат дважды, мы получим конечный результат $+C_1+C_2p^2$. Грубо говоря, $C_1$ перенормирует массу, а $C_2$ — поле $\varphi$. “Четвероногая” диаграмма расходится логарифмически. Дифференцируя ее и интегрируя обратно, получаем конечный результат + постоянную, перенормирующую константу связи. “Шестиногая” диаграмма конечна. При $D=3$ бесконечно перенормируется только масса, а при $D=2$ все приведенные диаграммы конечны.

Остаются ли диаграммы конечными после добавления новых петель? Петли к диаграммам можно добавлять нетривиальным образом так:



или так:



В первом случае мы добавляем одну петлю и две внутренних линии, т. е. $\Delta I = D-4$. Во втором случае мы добавляем две петли и четыре внутренних линии, т. е. $\Delta I = 2D-8$. Мы заключаем, что при $D>4$ индекс расходимости диаграммы растет с числом петель и возникает потребность в контрчленах нового вида в действии. Эта ситуация отвечает *неперенормируемой* теории. При $D=4$ индекс расходимости не меняется, так что можно ожидать, что теория *перенормируема*, т. е. хотя расходимости возникают в бесконечном числе диаграмм, все они перенормируются с помощью конечного числа контрчленов. При $D<4$ теория *суперперенормируема*, т. е. имеется конечное число расходящихся диаграмм, не сводимых к более простым расходящимся диаграммам. В частности, бесконечные части контрчленов можно вычислить точно. Конечно, строгое доказательство перенормируемости требует более тонкого анализа (проблема перекрывающихся расходимостей), но и описанная схема действует довольно правильно.

**Задача.** *Проанализировать таким же образом теорию* $\varphi^3$.

Мы уже видели, что некоторые изменения параметров модели не приводят к изменению ее физического содержания. Подобные изменения образуют группу, которая называется *ренормгруппой* или *группой перенормировок*. Рассмотрим коэффициенты $\Gamma_{n,0}$ в разложении $\Gamma[\varphi]$ по неперенормированному полю $\varphi_0$. Очевидно,

$$\Gamma_{n,0}(p;\lambda_0\mu^{4-D},m_0) = Z_\varphi^{-n/2}(\lambda,m,\mu)\Gamma_n(p;\lambda,m,\mu). \qquad (1)$$

Если мы удерживаем параметры лагранжиана $\lambda_0\mu^{4-D}$ и $m_0$, физическое содержание теории остается неизменным независимо от рецепта перенормировки или выбора $\mu$. Давайте зафиксируем рецепт перенормировки и будем варьировать $\mu$. Левая часть остается неизменной, поэтому

$$\mu\frac{d}{d\mu}Z_\varphi^{-n/2}(\lambda,m,\mu)\Gamma_n(p;\lambda,m,\mu) = 0$$

или

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \mu\frac{\partial m}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial m} - \frac{n}{2}\,\mu\frac{\partial\log Z_\varphi}{\partial\mu}\right)\Gamma_n(p;\lambda,m,\mu) = 0. \qquad (2)$$

Здесь $\partial\lambda/\partial\mu$ и т. п. обозначает производные при постоянных $\lambda_0\mu^{4-D}$ и $m_0$. В это уравнение входят только величины, конечные при $D\to 4$. Тогда производные можно тоже выразить через конечные величины:

$$\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} = \beta\left(\lambda,\frac{m}{\mu}\right),$$
$$\mu\frac{\partial\log Z_\varphi^{1/2}}{\partial\mu} = \gamma\left(\lambda,\frac{m}{\mu}\right),$$
$$\mu\frac{\partial\log m}{\partial\mu} = \gamma_m\left(\lambda,\frac{m}{\mu}\right).$$

Теперь рассмотрим масштабное преобразование $p\to e^t p$. Если мы одновременно с ним произведем замену $m\to e^t m$, $\mu\to e^t\mu$, $\varphi(x)\to e^{d_\varphi t}\varphi(x)$ ($d_\varphi = (D-2)/2$ — размерность $\varphi$), физика не изменится. Это значит, что

$$\frac{d}{dt}e^{(nd_\varphi-D)t}\Gamma_n(e^t p;\lambda,e^t m,e^t\mu) = 0$$

($D$ в показателе экспоненты связано с тем, что коэффициентами в разложении эффективного действия являются по определению $(2\pi)^D\delta(\sum p_i)\Gamma_n(p)$ а не сами $\Gamma_n(p)$) или

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu\frac{\partial}{\partial\mu} + m\frac{\partial}{\partial m} + (nd_\varphi - D)\right)\Gamma_n(e^t p;\lambda,m,\mu) = 0. \qquad (3)$$

Исключая из (2) и (3) производную по $\mu$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(e^t p;\lambda,m,\mu)=\left(\beta\left(\lambda,\frac{m}{\mu}\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}+\left[\gamma_m\left(\lambda,\frac{m}{\mu}\right)-1\right]m\frac{\partial}{\partial m}+D-n\left[d_\varphi+\gamma\left(\lambda,\frac{m}{\mu}\right)\right]\right)\Gamma(e^t p;\lambda,m,\mu). \tag{4}$$

Последнее уравнение представляет собой *уравнение ренормгруппы*, описывающее масштабную зависимость функций $\Gamma$. В случае рецепта перенормировки $\Sigma(m^2)=\Sigma'(m^2)=0$, $\Gamma_4(p,p;p,p)=-i\lambda\mu^{4-D}$ имеем

$$\beta\left(\lambda,\frac{m}{\mu}\right)=\frac{3\lambda^2}{16\pi^2}+O(\lambda^3),\qquad \gamma\left(\lambda,\frac{m}{\mu}\right)=\frac{1}{12}\left(\frac{\lambda}{16\pi^2}\right)^2+O(\lambda^3).$$

При больших $t$ все импульсы много больше $m$, поэтому удобно выбрать также $\mu\gg m$ и ввести *бегущие* константы:

$$\frac{d\lambda}{dt}=\beta(\lambda(t)),\qquad \frac{d\log m}{dt}=\gamma_m(\lambda(t))-1. \tag{5}$$

В этом случае уравнение (4) легко интегрируется

$$\Gamma_n(e^t p;\lambda,m,\mu)=e^{Dt-n\int_0^t ds\,(d_\varphi+\gamma(\lambda(s))}\Gamma(p,\lambda(t),m(t),\mu). \tag{6}$$

Мы видим, что асимптотики $\Gamma_n$ при больших импульсах ведут себя так, как если бы поля $\varphi(x)$ обладали бы *аномальными* размерностями $d_\varphi+\gamma(\lambda(t))$, вообще говоря зависящими от масштаба.

Если схема перенормировки зависит от точки перенормировки $M$, как в описанной в предыдущей лекции схеме, то $\mu$ выпадает из перенормированного эффективного действия и уравнения (4)–(6) следует писать в том же самом виде, но с заменой $\mu$ на $M$. Явный вид функций $\beta$, $\gamma$ и $\gamma_m$, конечно, меняется (см. предыдущую лекцию).