Лекция 6
Перенормировки в модели φ^4

Начнем с формулы (9) предыдущей лекции

$$\Sigma^{(1)}(p) = \frac{\lambda m^2}{32\pi^2}\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{(D-4)/2}\Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right) + \delta^{(1)}m^2. \tag{1}$$

Последнее слагаемое есть вклад контрчлена $-\frac{\delta m^2}{2}\varphi^2$. Положим $D = 4-2\varepsilon$ и рассмотрим предел $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}
x^\varepsilon &= 1 + \varepsilon \log x + O(\varepsilon^2),\\
\Gamma(x+\varepsilon) &= \Gamma(x) + \Gamma(x)\psi(x)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \qquad x \neq 0, -1, -2, \ldots,\\
\Gamma(-n+\varepsilon) &= \frac{(-1)^n}{n!\,\varepsilon} + \frac{(-1)^n\psi(n+1)}{n!} + O(\varepsilon), \qquad \psi(n+1) = -\mathbf{C} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\Sigma^{(1)}(p) = -\frac{\lambda m^2}{32\pi^2\varepsilon} + \frac{\lambda m^2}{32\pi^2}\left(\log\frac{m^2}{4\pi\mu^2} + \mathbf{C} - 1\right) + \delta^{(1)}m^2 + O(\varepsilon).$$

Чтобы полюс точной функции Грина имел место при $p^2 = m^2$, мы должны потребовать

$$\Sigma(p)|_{p^2=m^2} = 0.$$

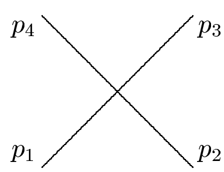
Тогда получаем

$$\delta^{(1)}m^2 = \frac{\lambda m^2}{32\pi^2\varepsilon} - \frac{\lambda m^2}{32\pi^2}\left(\log\frac{m^2}{4\pi\mu^2} + \mathbf{C} - 1\right). \tag{2}$$

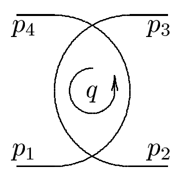
Теперь мы можем использовать этот контрчлен во всех диаграммах как величину порядка λ.

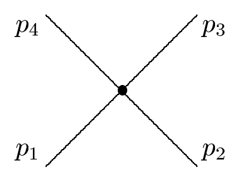
Рассмотрим теперь первую поправку к вершине. Имеем

$$\Gamma(p_1,p_2,p_3,p_4) = (2\pi)^D\delta(p_1+p_2+p_3+p_4)(\Gamma^{(1)}(p_1,p_2,p_3,p_4) + \Gamma^{(2)}(p_1,p_2,p_3,p_4) + \cdots),$$

$\Gamma^{(1)}(p_1,p_2,p_3,p_4) =$ 

$= -i\lambda$

$\Gamma^{(2)}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \frac{1}{2}$ 

$+$ Две кросс-диаграммы $+$ 

$$= K(p_1,p_2;p_3,p_4) + K(p_1,p_4;p_3,p_2) + K(p_1,p_3;p_2,p_4) - i\delta^{(2)}\lambda\mu^{4-D}.$$

Здесь $\delta\lambda = (Z_\varphi^2 Z_\lambda - 1)\lambda$. Во втором порядке $\delta^{(2)}\lambda = Z_\lambda^{(1)}\lambda$. Для K имеем

$$\begin{aligned}
K(p_1,p_2;p_3,p_4) &= \frac{\lambda^2\mu^{8-2D}}{2}\int_M \frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\,\frac{1}{[(p/2+q)^2 - m^2 + i0][(p/2-q)^2 - m^2 + i0]},\\
p &= p_1 + p_2 = -p_3 - p_4.
\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[xa + (1-x)b]^2}. \tag{3}$$

Замечание. *Имеется также более общая формула*

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} a_i^{\nu_i}} = \frac{\Gamma(\sum \nu_i)}{\prod \Gamma(\nu_i)} \int_{0<x_1<\cdots<x_{n-1}<1} d^n x \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) a_i\right]^{-\sum \nu_i} \prod_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^{\nu_i - 1}, \tag{4}$$
$$(x_0 = 0, \quad x_n = 1).$$

Получаем

$$\begin{aligned} K(p_1, p_2; p_3, p_4) &= \frac{\lambda^2 \mu^{8-2D}}{2} \int_0^1 dx \int_M \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{[q^2 + (2x-1)pq + p^2/4 - m^2]^2} \\ &= \frac{i\lambda^2 \mu^{8-2D}}{2} \int_0^1 dx \int_E \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{[q^2 + (2x-1)p_E q + p_E^2/4 + m^2]^2}. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменной
$$q = q' - (x - 1/2) p_E.$$

Получаем

$$\begin{aligned} K_{12;34} &= \frac{i\lambda^2 \mu^{8-2D}}{2} \int_0^1 dx \int_E \frac{d^D q'}{(2\pi)^D} \frac{1}{[q'^2 - x(1-x)p_E^2 + m^2]^2} \\ &= \frac{i\lambda^2 \mu^{8-2D}}{2(4\pi)^{D/2}\Gamma(D/2)} \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{(q'^2)^{(D-2)/2}\, d(q'^2)}{[q'^2 + x(1-x)p_E^2 + m^2]^2} \\ &= \frac{i\lambda^2 \mu^{8-2D}}{2(4\pi)^{D/2}\Gamma(D/2)} \int_0^1 dx\, [m^2 - x(1-x)p^2]^{(D-4)/2} \int_0^1 dz\, z^{-(D-2)/2} (1-z)^{(D-2)/2} \\ &= \frac{i\lambda^2 \mu^{4-D}}{32\pi^2} \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{(D-4)/2} \Gamma\left(\frac{4-D}{2}\right) \int_0^1 dx \left(1 - x(1-x)\frac{p^2}{m^2}\right)^{(D-4)/2}. \end{aligned}$$

Раскладывая в ряд по ε, получаем

$$K_{12;34} = \frac{i\lambda^2 \mu^{4-D}}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \mathbf{C} - \log\frac{m^2}{4\pi\mu^2} - \int_0^1 dx\, \log\left(1 - x(1-x)\frac{p^2}{m^2}\right) + O(\varepsilon)\right).$$

Можно проверить, что

$$F(p^2) \equiv \int_0^1 dx\, \log\left(1 - x(1-x)\frac{p^2}{m^2}\right) = -2 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}\, \log\frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} - 1} \tag{5}$$

в области $p^2 < 0$. Аналитическое продолжение в другие области определяется подстановкой $m^2 \to m^2 - i0$.

Окончательно

$$\Gamma_4^{(2)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -\frac{i\lambda^2 \mu^{4-D}}{32\pi^2} (F(s) + F(t) + F(u)) - i\mu^{4-D} C,$$

где
$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 + p_3)^2, \quad u = (p_1 + p_4)^2, \tag{6}$$

— *переменные Мандельстама*, а

$$C = \delta^{(2)}\lambda - \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \mathbf{C} - \log\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right). \tag{7}$$

Очевидно, C должно быть конечной константой. В зависимости от того, как мы выберем C или, что то же самое, $\delta^{(2)}\lambda$, мы получим разные выражения для Γ_4. Тем не менее, подходящим изменением λ мы можем компенсировать это изменение. Действительно, замена

$$\delta^{(2)}\lambda' = \delta^{(2)}\lambda + a,$$
$$\lambda' = \lambda - a$$

не меняет амплитуды, если a — второго порядка малости по λ. Кроме того, эффективное действие не должно зависеть от μ. Точнее, если мы меняем μ, то правильное изменение λ должно его компенсировать в Γ_4. Очевидно, с точностью до λ^2

$$\lambda + \frac{3\lambda^2}{32\pi^2}\log\frac{m^2}{4\pi\mu^2} = \mathrm{const}\,.$$

С этой же точностью

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\log\mu} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}. \tag{8}$$

Важно, что правая часть не содержит никаких параметров, кроме “физических” параметров лагранжиана, т. е. имеет вид $\beta(\lambda, m/\mu)$.

Это уравнение имеет решение

$$\lambda(\mu) = \frac{\lambda(\mu_0)}{1 - a\lambda(\mu_0)\log(\mu/\mu_0)}, \qquad a = \frac{3}{16\pi^2}. \tag{9}$$

Это решение имеет смысл, выходящий за рамки теории возмущений. Мы обсудим это позже, а сейчас отметим, что если при некотором μ_0 значение λ равно $\lambda(\mu_0) \ll 1$, то процедура перенормировки допустима при $\mu \ll \mu_0 e^{-(a\lambda(\mu_0))^{-1}}$.

Хотелось бы выбрать C ($\delta^{(2)}\lambda$) с помощью какого-нибудь естественного условия. Что такое Γ_4? В сущности, это $-i\lambda$ с учетом петлевых поправок. Естественно было бы, например, положить $\Gamma_4 = -i\lambda$ на массовой поверхности $p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = m^2$. Этого, однако, сделать нельзя, так как Γ_4 зависит от $p_i p_j$. Можно выбрать $\Gamma_4 = -i\lambda$ при $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2 = -\boldsymbol{p}_3 = -\boldsymbol{p}_4$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \boldsymbol{p}_1^2 + m^2$, т. е. при $s = 4m^2$, $t = u = 0$ (рассеяние с нулевой передачей импульса). В этом случае $F(s) = 2$, $F(t) = F(u) = 0$ и

$$\delta^{(2)}\lambda = +\frac{3\lambda^2}{32\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \mathbf{C} + \frac{2}{3} - \log\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right).$$

Можно воспользоваться другой процедурой, положив

$$\Gamma_4 = -i\lambda \quad \text{при} \quad s = t = u = -M^2,$$

причем постоянная M^2 называется *точкой перенормировки*. Знак минус перед M^2 выбран, чтобы избежать тонкостей с полюсом, т. е. это значения переменных заведомо вне массовой поверхности. Находим

$$\frac{3\lambda^2 F(-M^2)}{32\pi^2} + C = 0$$

и

$$\delta^{(2)}\lambda = \frac{3\lambda^2}{32\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \mathbf{C} - F(-M^2) - \log\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right).$$

Из условия независимости физической амплитуды от M^2 получаем *уравнение Гелл-Манна–Лоу*

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\log M} = \beta\left(\lambda, \frac{m^2}{M^2}\right), \tag{10}$$
$$\beta\left(\lambda, \frac{m^2}{M^2}\right) = \frac{3\lambda^2}{32\pi^2}\frac{\partial F(-M^2)}{\partial\log M}.$$

Его смысл состоит в том, что если мы будем менять λ и M^2 вдоль решения этого уравнения, то физика меняться не будет. Таким образом смысл константы связи имеет *вся траектория* в плоскости (λ, M^2).

Особый интерес представляет область больших M^2. В этом случае

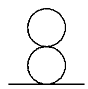
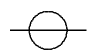
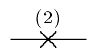
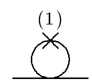
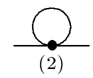
$$F(-M^2) \simeq \log\frac{M^2}{m^2} - 2 \quad (M^2 \gg m^2)$$

и

$$\beta\left(\lambda, \frac{m^2}{M^2}\right) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}.$$

Отсюда получаются формулы типа (8), (9) с заменой μ на M. Величину $\lambda(M^2)$ можно рассматривать как физическую константу связи во взаимодействиях с “виртуальностью” порядка M^2. Формула (9) в этом случае означает, что если при сравнительно малых M константа связи мала, то при больших M она растет. При значениях M, когда константа связи сравнивается с 1, теория возмущений теряет свою применимость. Позже мы поймем, как использовать уравнения типа (9) для вычисления корреляционных функций.

Теперь займемся вкладом второго порядка $\Sigma^{(2)}$ в собственную энергию. Очевидно,

$-i\Sigma^{(2)}(p^2) = \frac{1}{4}$  $+\ \frac{1}{6}$  $+$  $+\ \frac{1}{2}$  $+\ \frac{1}{2}$  .

Вычислив эту поправку, мы найдем $\delta^{(2)}m$ из условия перенормировки. Давайте поймем, как оно может выглядеть. Вообще говоря, если $\Sigma(p^2)$ — регулярная функция, то пропагатор имеет полюс

$$G(p) = \frac{iZ}{p^2 - m_{\text{phys}}^2} + \text{конечная часть}$$

Тогда m_{phys} имеет смысл физической массы, а Z определяет нормировку волновой функции ««квазичастицы»» по отношению к нормировке волновой функции ««частицы»». Запишем это в виде

$$G^{-1}(p) = -iZ^{-1}(p^2 - m_{\text{phys}}^2) + O((p^2 - m_{\text{phys}}^2)^2).$$

С другой стороны

$$G^{-1}(p) = -i(p^2 - m^2 - \Sigma(p^2)) = -i(p^2 - m^2 - \Sigma(m_{\text{phys}}^2) - (p^2 - m_{\text{phys}}^2)\Sigma'(m_{\text{phys}}^2)) + O((p^2 - m_{\text{phys}}^2)^2).$$

Отсюда

$$Z^{-1}m_{\text{phys}}^2 = m^2 + \Sigma(m_{\text{phys}}^2), \qquad Z^{-1} = 1 - \Sigma'(m_{\text{phys}}^2). \tag{11}$$

Значения Z и m зависят от условия перенормировки, в то время как m_{phys} является инвариантной наблюдаемой величиной.

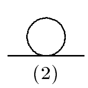
Выберем условие нормировки так, чтобы

$$m = m_{\text{phys}}, \qquad Z = 1$$

или

$$\Sigma(m^2) = \Sigma'(m^2) = 0. \tag{12}$$

Если мы принимаем это условие, то сумма первого и четвертого слагаемого равна нулю. Пятое слагаемое

$(5) = \frac{\delta^{(2)}\lambda}{\lambda} \times \frac{1}{2}$  $= \frac{i\delta^{(2)}\lambda m^2}{32\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \left(\log\frac{m^2}{4\pi\mu^2} + \mathbf{C} - 1\right)\right) + O(\varepsilon)$

есть константа.

Нетривиален лишь второй член, квадратично расходящийся при $D = 4$. Его можно вычислить, используя наши результаты для вершины:

$$
\begin{aligned}
(2) &= \frac{1}{3}\int_M \frac{d^D q}{(2\pi)^D}\, K(p,q;-p,-q) G_0(p) \\
&= -\frac{1\lambda^2\mu^{4-D}}{96\pi^2}\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{(D-4)/2} m^{4-D}\Gamma\left(\frac{4-D}{2}\right) \\
&\quad\times \int_0^1 dx \int_M \frac{d^D q}{(2\pi)^D}\,[m^2 - x(1-x)(p+q)^2 - i0]^{(D-4)/2}(q^2 - m^2 + i0)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Теперь следует воспользоваться формулой (4). Имеем

$$
\begin{aligned}
(2) = {}& \frac{\lambda^2\mu^{4-D}}{96\pi^2}(4\pi)^{(D-4)/2}\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{D-4}\Gamma\left(\frac{6-D}{2}\right) \\
&\times \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_M \frac{d^D q}{(2\pi)^D}\, y^{(2-D)/2}\left[1 - yx(1-x)\left(\frac{p}{m}+q\right)^2 - (1-y)q^2 - i0\right]^{(D-6)/2}.
\end{aligned}
$$

Заменой

$$
q = q' - \frac{yx(1-x)}{(yx(1-x)+1-y)}\frac{p}{m}
$$

можно привести интеграл к стандартному. Приведем ответ для расходящейся части

$$
(2) = \frac{\lambda^2}{6(16\pi^2)^2}\left(\frac{3m^2}{2\varepsilon^2} + \frac{3m^2}{\varepsilon}\left(\frac{3}{2} - \mathbf{C} - \log\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + \frac{p^2}{4\varepsilon}\right) + \text{конечная часть.}
$$

Важно то, что расходящаяся часть содержит p^2. Это приводит к необходимости бесконечной перенормировки волновой функции.