Лекция 5
Эффективное действие, одночастично-неприводимые части и перенормировки

Рассмотрим опять теорию вещественного скалярного бозона $\varphi(x)$. Рассмотрим производящий функционал

$$Z[J] = e^{iF[J]} = \int D\varphi\, e^{iS[\varphi]+i(J,\varphi)}.$$

$F[J]$ называют по аналогии со статфизикой *свободной энергией*. Теперь введем *классическое поле*:

$$\tilde\varphi(x) = \frac{\delta F[J]}{\delta J(x)} = \langle \varphi(x) \rangle_J$$

— среднее от поля φ в присутствии источника. Если это соотношение взаимно-однозначно, то оно определяет функционал $J[\tilde\varphi](x)$. Для простоты будем считать, что при $J = 0$ также $\tilde\varphi = 0$. Введем *эффективное действие*:

$$\Gamma[\tilde\varphi] = F[J] - (J, \tilde\varphi), \tag{1}$$

где J понимается как $J[\tilde\varphi]$. Через $\Gamma[\varphi]$ классическое поле определяется как уравнением

$$\left.\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)}\right|_{\varphi=\tilde\varphi} = -J(x).$$

Запишем эффективное действие в виде разложения

$$-i\Gamma[\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^{Dn}x\, \Gamma_n(x_1, \ldots, x_n)\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n).$$

Мы хотим научиться вычислять Γ_n. Очевидно, что Γ_0 несущественно, а $\Gamma_1(x) = iJ(x) = 0$. Что касается Γ_2, то

$$\begin{aligned}
\Gamma_2(x_1, x_2) &= \left.\frac{i\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x_1)\,\delta\varphi(x_2)}\right|_{\varphi=0} \\
&= -i\left.\frac{\delta J(x_1)}{\delta\tilde\varphi(x_2)}\right|_{\tilde\varphi=0} = -i\left[\frac{\delta\tilde\varphi(x_2)}{\delta J(x_1)}\right]^{-1}_{J=0} = -i\left[\frac{\delta^2 F[J]}{\delta J(x_1)\,\delta J(x_2)}\right]^{-1}_{J=0} \\
&= -[\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\rangle - \langle\varphi(x_1)\rangle\langle\varphi(x_2)\rangle]^{-1} \\
&= -G^{-1}(x_1, x_2),
\end{aligned} \tag{2}$$

где $[\ldots]^{-1}$ означает ядро обратного оператора, а $G(x_1, x_2)$ — **точный** пропагатор, т. е. парная корреляционная функция возмущенной теории. Теперь рассмотрим диаграммную технику для Γ_2. Пусть

$$\Gamma_2(x_1, x_2) = -G_0^{-1}(x_1, x_2) - i\Sigma(x_1, x_2) = -G_0^{-1}(x_1, x_2) + \;{}_{x_1}\!-\!\left(-i\Sigma\right)\!-\!{}_{x_2}$$

(G_0 — невозмущенный пропагатор, $-i\Sigma$ — *массовый оператор*). Тогда (в операторном виде)

$$\begin{aligned}
G &= G_0 + G_0(-i\Sigma)G_0 + G_0(-i\Sigma)G_0(-i\Sigma)G_0 + \cdots \\
&= \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \;+\; \bullet\!-\!(-i\Sigma)\!-\!\bullet \;+\; \bullet\!-\!(-i\Sigma)\!-\!(-i\Sigma)\!-\!\bullet \;+\cdots.
\end{aligned} \tag{3}$$

Очевидно, что $-i\Sigma$ дается всеми *одночастично-неприводимыми* диаграммами, т. е. диаграммами, которые остаются связными после разрезания любой внутренней линии. Кроме того, внешним линиям не сопоставляется пропагаторов.

Рассмотрим теперь Γ_3:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_3(x_1,x_2,x_3) &= \left.\frac{\delta\Gamma_{2,J}(x_1,x_2)}{\delta\tilde{\varphi}(x_3)}\right|_{J=0} \\
&= -\int d^D y_3 \; \left.\frac{\delta[\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\rangle_J - \tilde{\varphi}(x_1)\tilde{\varphi}(x_2)]^{-1}}{\delta J(y_3)}\frac{\delta J(y_3)}{\delta\tilde{\varphi}(x_3)}\right|_{J=0} \\
&= -\int d^{3D}y\, \Gamma_{2,J}(x_1,y_1)\Gamma_{2,J}(x_2,y_2)\Gamma_{2,J}(x_3,y_3) \\
&\quad \times \big(\langle\varphi(y_1)\varphi(y_2)\varphi(y_3)\rangle_J \\
&\qquad - \tilde{\varphi}(y_1)\langle\varphi(y_2)\varphi(y_3)\rangle_J - \tilde{\varphi}(y_2)\langle\varphi(y_1)\varphi(y_3)\rangle_J - \tilde{\varphi}(y_3)\langle\varphi(y_1)\varphi(y_2)\rangle_J \\
&\left. + 3\tilde{\varphi}(y_1)\tilde{\varphi}(y_2)\tilde{\varphi}(y_3)\big)\right|_{J=0} \\
&= \int d^{3D}y\, G^{-1}(x_1,y_1)G^{-1}(x_2,y_2)G^{-1}(x_3,y_3)G(y_1,y_2,y_3).
\end{aligned}
$$

Множители $G^{-1}(x_i,y_i)$ (обратные **точные** пропагаторы) убирают все хвосты, т. е. опять же Γ_3 дается одночастично-неприводимыми диаграммами, внешним линиям которых не отвечают невозмущенные пропагаторы.

Задача 1. *Показать, что*

$$
\begin{aligned}
\Gamma_4(x_1,\dots,x_4) = \int d^{4D}y \prod_{i=1}^{4} G^{-1}(x_i,y_i)\Bigg(&G(y_1,\dots,y_4) \\
-\int d^{2D}z\,\big(&G(y_1,y_2,z_1)G^{-1}(z_1,z_2)G(z_2,y_3,y_4) + (\text{еще 2 слагаемых})\big)\Bigg),
\end{aligned}
$$

что подтверждает сформулированное правило.

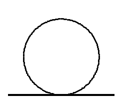
Функции Γ_n при $n>2$ называют *вершинными функциями*. Они дают одночастично-неприводимые вклады в корреляционные функции и матрицы рассеяния и позволяют существенно сократить их вычисление. Кроме того, именно эффективное действие позволяет сделать правильный классический предел.

Давайте займемся практическим вычислением одночастично-неприводимых частей для модели φ^4 с действием

$$
S_\lambda[\varphi] = \int d^D x\, \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda\mu^{4-D}}{4!}\varphi^4\right). \tag{4}
$$

Параметр μ размерности массы введен для того, чтобы сделать λ безразмерной.

Давайте начнем с собственной энергии. В первом порядке

$$
-i\Sigma^{(1)}(p) = \frac{1}{2}
$$

$$
= \frac{-i\lambda\mu^{4-D}}{2}\int_M \frac{d^D q}{(2\pi)^D}\,\frac{i}{q^2-m^2+i0}.
$$

Интеграл расходится при $D\ge 2$. Давайте тем не менее вычислим его при формальном комплексном D. Для этого перейдем к евклидовой области интегрирования $q^0\to iq^0$, $\mathbf{q}\to -\mathbf{q}$:

$$
\Sigma^{(1)}(p) = \frac{\lambda\mu^{4-D}}{2}\int_E \frac{d^D q}{(2\pi)^D}\,\frac{1}{q^2+m^2}.
$$

Рассмотрим координаты

$$\begin{aligned}
q^0 &= q\cos\theta_1, \\
q^1 &= q\sin\theta_1\cos\theta_2, \\
&\dots \\
q^{D-2} &= q\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{D-2}\cos\varphi, \\
q^{D-1} &= q\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{D-2}\sin\varphi, \\
0 \le \theta_i &< \pi \quad (i=1,\dots,D-2), \qquad 0\le\varphi<2\pi.
\end{aligned}$$

Тогда

$$d^D q = q^{D-1}\,dq\,d\varphi\prod_{k=1}^{D-2}\sin^k\theta_k\,d\theta_k. \tag{5}$$

С помощью формулы

$$2\int_0^{\pi/2} d\theta(\sin\theta)^{2m-1}(\cos\theta)^{2n-1}d\theta = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{6}$$

(эквивалентной стандартной формуле

$$\int_0^1 dx\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{6'}$$

для бета-функции) получаем

$$\int_0^\pi(\sin\theta)^k = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}. \tag{7}$$

Отсюда получаем интегрированием по углам

$$d^D q \to \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}q^{D-1}\,dq \tag{8}$$

Получаем

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(1)}(p) &= \frac{\pi^{D/2}\lambda\mu^{4-D}}{(2\pi)^D\Gamma(D/2)}\int_0^\infty\frac{q^{D-1}\,dq}{q^2+m^2} = \frac{\pi^{D/2}\lambda\mu^{4-D}m^{D-2}}{2(2\pi)^D\Gamma(D/2)}\int_0^1 dx\,x^{-D/2}(1-x)^{D/2-1} \\
&= \lambda m^2\left(\frac{m}{\mu}\right)^{D-4}\frac{\pi^{D/2}}{2(2\pi)^D}\Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Мы видим, что $\Sigma^{(1)}$ расходится при $D\to 4$. То, что мы сделали называется *размерной регуляризацией*. Поскольку интеграл в физическом случае $D=4$ расходится, мы ввели формальный непрерывный параметр D, небольшая вариация которого делает интеграл конечным.

Как интерпретировать ненулевое значение $\Sigma^{(1)}$ при всех p? Давайте введем величину $m^2_{\rm phys} = m^2+\Sigma^{(1)}$. Тогда

$$G(p) = \frac{i}{p^2-m^2_{\rm phys}+i0}.$$

Это значит, что $m_{\rm phys}$ является физической массой, а m — просто параметр в действии. Понятно, что $m_{\rm phys}$ должно быть конечной величиной, а m может стремиться к бесконечности при $D\to 4$.

В общем случае

$$\Sigma(p) = \Sigma_0+\Sigma_1(p^2-m^2_{\rm phys})+o(p^2-m^2_{\rm phys}) \quad \text{при} \quad p^2\to m^2_{\rm phys}. \tag{10}$$

Тогда

$$G(p) = \frac{iZ_\varphi}{p^2-m^2_{\rm phys}+i0},$$

где

$$m_{\text{phys}}^2 = m^2 + \Sigma_0,$$
$$Z_\varphi = (1 - \Sigma_1)^{-1}$$

Параметр Z_φ описывает перенормировку волновой функции φ. Кроме того, как мы увидим в следующий раз, вершинный оператор Γ_4 приводит к (бесконечной) перенормировке константы связи λ.

Мы можем действовать несколько по-другому. Пусть φ, m, λ — **физические** волновая функция, масса, константа связи. Мы запишем действие в виде

$$S = S_0 + S_1, \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} S_0 &= \int d^D x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 \right), \\ S_1 &= \int d^D x \left(\frac{Z_\varphi - 1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{(Z_\varphi Z_m^2 - 1) m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda \mu^{4-D}}{4!} \varphi^4 - \frac{(Z_\varphi^2 Z_\lambda - 1) \lambda \mu^{4-D}}{4!} \varphi^4 \right). \end{aligned} \tag{12}$$

Затравочные волновая функция, масса и константа связи φ_0, m_0, λ_0 из действия (4) даются

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= Z_\varphi^{1/2} \varphi, \\ m_0 &= Z_m m, \\ \lambda_0 &= Z_\lambda \lambda. \end{aligned} \tag{13}$$

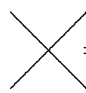
S_0 — действие невозмущенной теории свободного бозона, а S_1 — возмущение, содержащее 4 типа взаимодействий:

1,2. Контрчлены для массы и волновой функции:

$$= i(Z_\varphi - 1) p^2 - i(Z_\varphi Z_m^2 - 1) m^2$$

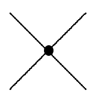
(в импульсном представлении).

3. Физическое возмущение:



$$= -i \lambda \mu^{4-D}.$$

4. Контрчлен к константе связи:



$$= -i(Z_\varphi^2 Z_\lambda - 1) \lambda \mu^{4-D}.$$

Вычисление контрчленов будет описано в следующей лекции. Предполагается, что все они (хотя и бесконечны) имеют порядок не ниже λ, так что можно пользоваться теорией возмущений.

Возникает вопрос, не нужно ли вводить других контрчленов, отвечающих новым взаимодействиям, чтобы обеспечить конечность физически измеримых величин. Это вопрос о *перенормируемости* теории. Известно, что теория φ^4 перенормируема при $D \leq 4$.

Задача 2. *Показать, что в первом порядке по λ имеется только один контрчлен, отвечающий $\Sigma^{(1)}$ и он может быть устранен с помощью операции нормального произведения $:\ldots:$:*

$$\begin{aligned} 1 &= :1:, \\ \varphi(x) &= :\varphi(x):, \\ :\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n): \varphi(x_{n+1}) &= :\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_{n+1}): + \sum_{k=1}^{n} :\varphi(x_1) \ldots \widehat{\varphi(x_k)} \ldots \varphi(x_n): \langle \varphi(x_k) \varphi(x_{n+1}) \rangle. \end{aligned}$$

Перенормированное в первом порядке действие можно записать в виде

$$S = \int d^D x :\left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda \mu^{4-D}}{4!} \varphi^4 \right):.$$