Лекция 4
Матрица рассеяния

Мы рассматриваем теорию скалярного вещественного бозона $\varphi(x)$ со взаимодействием. Имеется каноническое преобразование

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p}} (\tilde{a}_{\boldsymbol{p}} e^{i\boldsymbol{px}} + \tilde{a}^+_{\boldsymbol{p}} e^{-i\boldsymbol{px}}),$$
$$\dot{\varphi}(\boldsymbol{x}) = -i \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} \sqrt{\frac{\varepsilon_p}{2}} (\tilde{a}_{\boldsymbol{p}} e^{i\boldsymbol{px}} - \tilde{a}^+_{\boldsymbol{p}} e^{-i\boldsymbol{px}}).$$

Обратное преобразование

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{\boldsymbol{p}} &= \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}} \int d^{D-1}x\, e^{-i\boldsymbol{px}} (\dot{\varphi}(\boldsymbol{x}) - i\varepsilon_{\boldsymbol{p}} \varphi(\boldsymbol{x})), \\ \tilde{a}^+_{\boldsymbol{p}} &= -\frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}} \int d^{D-1}x\, e^{i\boldsymbol{px}} (\dot{\varphi}(\boldsymbol{x}) + i\varepsilon_{\boldsymbol{p}} \varphi(\boldsymbol{x})). \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть гамильтониан системы имеет вид $H = H_0 + V$, где H_0 — гамильтониан свободных бозонов, а V — гамильтониан взаимодействия. Введем оператор

$$V(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}.$$

Рассмотрим *представление взаимодействия*, в котором состояния эволюционируют по закону

$$i|\dot{X}(t)\rangle = V(t)|X(t)\rangle$$

(т. е. "представления Гейзенберга по отношению к гамильтониану H_0"). Закон эволюции операторов сложен, так как H_0 не коммутирует с V. Решение этого уравнения имеет вид упорядоченной по времени экспоненты

$$|X(t)\rangle = \mathrm{T} e^{-i\int_0^t ds\, V(s)} |X\rangle = \lim_{\Delta t = t/N \to 0} \overleftarrow{\prod_{n=0}^{N-1}} e^{-i\Delta t\, V(n\Delta t)}.$$

Рассмотрим эволюцию состояния за бесконечное время

$$|X(+\infty)\rangle = \mathcal{S}|X(-\infty)\rangle,$$

где

$$\mathcal{S} = \mathrm{T}\exp\left(-i\int_{-\infty}^{\infty} dt\, V(t)\right)$$

— *матрица рассеяния*. Обычно рассматривают матричные элементы

$$\langle Y|\mathcal{S}|X\rangle = \langle Y(-\infty)|X(+\infty)\rangle. \tag{2}$$

Давайте представим матрицу рассеяния в более инвариантном виде. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} T\exp\left(-i\int_a^b dt\, V(t)\right) &= \overleftarrow{\prod_{n=0}^{N}} e^{iH_0(a+n\Delta t)}(1 - i\Delta t\, V) e^{-iH_0(a+n\Delta t)} \\ &= e^{iH_0 b} \cdot \overleftarrow{\prod_{n=0}^{N}} (1 - i\Delta t\, H_0)(1 - i\Delta t\, V) \cdot e^{-iH_0 a} \\ &= e^{iH_0 b} \cdot \overleftarrow{\prod_{n=0}^{N}} (1 - i\Delta t\,(H_0 + V)) \cdot e^{-iH_0 a} = e^{iH_0 b} e^{-iH(b-a)} e^{-iH_0 a}. \end{aligned}$$

Здесь H — гамильтониан в шрёдингеровском или, что в данном случае одно и то же, в гейзенберговском представлении. Отсюда

$$\mathcal{S} = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} e^{iH_0 b} e^{-iH(b-a)} e^{-iH_0 a}. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь "представление Шрёдингера по отношению к H_0" в том смысле, что оператор $f(t)$ в гейзенберговском представлении запишем в виде

$$f(t) = Te^{i\int_0^t ds\, H_0(s)} f_0(t) Te^{-i\int_0^t ds\, H_0(s)},$$

где $H_0(t) = e^{iHt} H_0 e^{-iHt}$ — невозмущенный гамильтониан в представлении Гайзенберга. Легко проверить, что

$$T\exp\left(-i\int_a^b dt\, H_0(t)\right) = e^{iHb} e^{-iH_0(b-a)} e^{-iHa}.$$

В частности операторы $a_{\boldsymbol{p}}$, $a^+_{\boldsymbol{p}}$, определенные выражениями

$$\tilde{a}_{\boldsymbol{p}}(t) = e^{-i\epsilon_{\boldsymbol{p}} t} a_{\boldsymbol{p}}(t), \qquad \tilde{a}^+_{\boldsymbol{p}}(t) = e^{i\epsilon_{\boldsymbol{p}} t} a^+_{\boldsymbol{p}}(t). \tag{4}$$

являются операторами "f_0" для $\tilde{a}_{\boldsymbol{p}}$, $\tilde{a}^+_{\boldsymbol{p}}$.

Очевидно

$$f_0(t) = e^{iH_0 t'} e^{iH(t-t')} e^{-iH_0 t} f_0(t') e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0 t'}.$$

Отсюда $f_0(+\infty) = \mathcal{S}^+ f_0(-\infty)\mathcal{S}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} a_{\boldsymbol{p}}(+\infty) &= \mathcal{S}^+ a_{\boldsymbol{p}}(-\infty)\mathcal{S}, \\ a^+_{\boldsymbol{p}}(+\infty) &= \mathcal{S}^+ a^+_{\boldsymbol{p}}(-\infty)\mathcal{S}. \end{aligned} \tag{5}$$

Очевидно,

$$\mathcal{S}|0\rangle = |0\rangle.$$

Введем векторы

$$|\boldsymbol{p}_1, N_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n, N_n\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{\prod_i N_i!}} \prod_i (a^+_{\boldsymbol{p}_i}(t))^{N_i} |0\rangle.$$

В более общем виде

$$|X\rangle_t = e^{iHt} e^{-iH_0 t} |X\rangle.$$

Важно, что $|X\rangle_t$ и $|X(t)\rangle$ не одно и то же. Векторы $|X\rangle_t$ не описывают никакой эволюции состояний. Они нам понадобятся лишь в потому, что выражаются через $a(t)$ и $a^+(t)$.

Удобно отождествить

$$|X\rangle = |X\rangle_{+\infty}.$$

Тогда из (5) получаем, что

$$\langle X'|\mathcal{S}|X\rangle = {}_{+\infty}\langle X'|X\rangle_{-\infty} = \frac{1}{\sqrt{\prod_f N'_f! \prod_i N_i!}} \langle 0| \prod_f (a_{\boldsymbol{p}'_f}(+\infty))^{N'_f} \prod_i (a^+_{\boldsymbol{p}_i}(-\infty))^{N_i} |0\rangle. \tag{6}$$

Правая часть содержит операторы, выражающиеся через корреляционные функции локального поля $\varphi(x)$ в некотором пределе. Мы опишем рецепт ее вычисления ниже.

Величину (6) можно интерпретировать как амплитуду рассеяния частиц. Логика такая. Летело N невзаимодействующих частиц с заданными импульсами. Затем мы адиабатически включили взаимодействие, подержали долгое (почти бесконечное) время и адиабатически выключили. Получилось N' новых частиц. По-другому можно рассуждать так. Рассмотрим стационарное состояние описываемое волновой функцией с таким асимптотическим поведением. Когда расстояния между частицами велики, имеется N падающих волн с заданными импульсами. Выделим слагаемое, содержащее N'

уходящих волн. Отношение произведения амплитуд расходящихся волн к произведению амплитуд падающих волн и есть матричный элемент S-матрицы. Это **эквивалентное** определение, аналогичное определению в обычной квантовой механике.

Теперь следует вычислить $a_{\boldsymbol{p}}(+\infty)$ и $a^+_{\boldsymbol{p}}(-\infty)$ с помощью (1). Буквально такой предел взять, конечно, нельзя, поэтому следует рассматривать так называемый слабый предел. Предположим, что $f(x) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D}\, e^{-iqx} f_q$ — произвольная функция. Вычислим

$$
\begin{aligned}
\alpha_{\boldsymbol{p},\mathrm{in/out}} &= \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}} \int d^{D-1}x\, e^{ipx}(\partial_0 f(x) - i\varepsilon_{\boldsymbol{p}} f(x))\Big|_{t\to\mp\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}} \int \frac{dq}{2\pi}\, e^{-i(q-\varepsilon_{\boldsymbol{p}})t}(q+\varepsilon_{\boldsymbol{p}}) f_{(q,\boldsymbol{p})}\Big|_{t\to\mp\infty}, \\
\alpha^+_{\boldsymbol{p},\mathrm{in/out}} &= -\frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}} \int d^{D-1}x\, e^{-ipx}(\partial_0 f(x) + i\varepsilon_{\boldsymbol{p}} f(x))\Big|_{t\to\mp\infty} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}} \int \frac{dq}{2\pi}\, e^{-i(q+\varepsilon_{\boldsymbol{p}})t}(q-\varepsilon_{\boldsymbol{p}}) f_{(q,\boldsymbol{p})}\Big|_{t\to\mp\infty},
\end{aligned}
$$

где $p = (\varepsilon_{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{p})$. В слабом смысле предел выражения интеграла $\int dq\, e^{-iqt}F(q)$ равен нулю в пределе $t \to \mp\infty$, если $F(q)$ регулярна, так как $\int dq\, e^{-iqt}\sum a_n q^n = \sum (-i)^n a_n \frac{d^n}{dt^n}\int dq\, e^{-iqt} = \sum(-i)^n a_n \delta^{(n)}(t)$. Однако если имеется особенность ($a_{-1} \neq 0 \Rightarrow \delta^{(-1)}(t) = \theta(t) + \mathrm{const}$), то нужно воспользоваться формулой

$$
\lim_{t\to\pm\infty} \frac{i}{x+i0} e^{-ixt} = \begin{cases} 2\pi\delta(x) \\ 0 \end{cases}.
$$

Какие особенности есть у корреляционных функций? Так как на больших пространственно-временных расстояниях корреляционная функция $\langle\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\rangle$ распадается на парные корреляционные функции. Поэтому по каждой переменной p_i имеется особенность $\sim (p_i^2 - m^2 + i0)^{-1}$. Положим

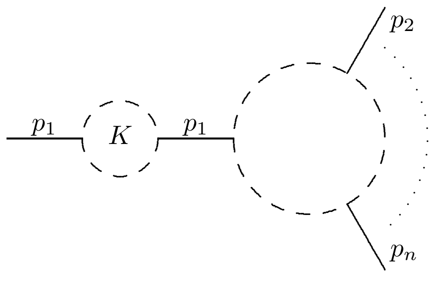
$$
f_p = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i0} + \cdots .
$$

Тогда получаем

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{\boldsymbol{p},\mathrm{in}} = 0, && \alpha_{\boldsymbol{p},\mathrm{out}} = \frac{Z}{\sqrt{2\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}}, \\
&\alpha^+_{\boldsymbol{p},\mathrm{in}} = \frac{Z}{\sqrt{2\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}}, && \alpha^+_{\boldsymbol{p},\mathrm{out}} = 0.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Задача 1. *Что произойдет в случае заряженного бозона?*

Откуда происходит полюс на языке диаграмм? Рассмотрим диаграммы вида:



Все вклады, обозначенные как K не могут изменить полюсной структуры теории, а лишь могут давать вклад в перенормировку массы m и поля φ (см. следующие лекции). Если мы будем считать, что m — физическая масса, а φ — физическое поле, то все эти диаграммы дадут вблизи массовой поверхности свободную функцию Грина $G_0(p)$. Поэтому все хвосты хвосты типа изображенного на рисунке надо отбросить.

Правила для вычисления S-матрицы.

1. Внешним линиям диаграммы отвечают множители $1\big/\sqrt{2\varepsilon_{\boldsymbol{p}_i}}$, а не функции Грина.

2. Вклад в S-матрицу дают только диаграммы в которых разрезанием одной линии нельзя отделить одну внешнюю линию от остальной части диаграммы.

3. Допускаются также линии с двумя внешними концами. Им соответствуют множители $(2\pi)^D\delta(p_i+p_j)$.

4. В конце домножить результат на $1\Big/\sqrt{\prod_f N'_f!\prod_i N_i!}$.

Задача 2. *Вывести правило 3. Указание: Воспользоваться формулой (16) из лекции 2.*

Удобно записать S-матрицу в виде

$$\langle X'|\mathcal{S}|X\rangle = \langle X'|\left(1+(2\pi)^D\delta(P'-P)\frac{\mathcal{M}}{\sqrt{\prod_f 2\varepsilon'_f\prod_i 2\varepsilon_i}}\right)|X\rangle,$$

где $P=\sum_i N_i p_i$, $P'=\sum_f N'_f p'_f$. У матрицы $\mathcal{M}$ особенно простые правила вычисления диаграмм в импульсном представлении. Она релятивистски-инвариантна и не нуждается ни в дополнительных множителях $1\big/\sqrt{2\varepsilon_{\boldsymbol{p}_i}}$, ни в общей дельта-функции.

Вероятность процесса в единичном объеме в единицу времени равна

$$dw=(2\pi)^D\delta(P'-P)\frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{\prod_i 2\varepsilon_i}\prod_f\frac{d^{D-1}p'_f}{(2\pi)^{D-1}2\varepsilon'_f}.$$

Для процесса рассеяния двух частиц $1+2\to\ldots$ получим сечение

$$d\sigma=\frac{dw}{j}=(2\pi)^D\delta(P'-P)\frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4I}\prod_f\frac{d^{D-1}p'_f}{(2\pi)^{D-1}2\varepsilon'_f},\qquad I=j\varepsilon_1\varepsilon_2=\sqrt{(p_1p_2)^2-m_1^2m_2^2}.$$

Для рассеяния двух частиц $1+2\to 1'+2'$:

$$d\sigma=\frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{64\pi^2}\frac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|\varepsilon^2}do'.$$

В произвольной системе отсчета удобно ввести *переменные Мандельстама*:

$$s=(p_1+p_2)^2,\qquad t=(p_1-p'_1)^2,\qquad u=(p_1-p'_2)^2.$$

В переменных Мандельстама

$$d\sigma=\frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{64\pi^2}\frac{dt}{I^2}\frac{d\varphi}{2\pi},$$

где φ — азимут $\boldsymbol{p}'_1$ относительно $\boldsymbol{p}_1$, если за ось z принять направление относительного движения частиц.

Если одна из сталкивающихся частиц тяжелая, то в ее лабораторной системе

$$d\sigma=\frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{16\pi^2}do'.$$