Лекция 1
Квантование и функциональные интегралы

Рассмотрим частицу в одномерном потенциале $U(q)$:

$$S = \int dt\, L(q, \dot{q}) = \int dt\, \left(\frac{m\dot{q}^2}{2} - U(q) \right). \tag{1}$$

Классическое уравнение движения:

$$\ddot{q} = -\frac{1}{m} U'(q). \tag{2}$$

Рассмотрим различные схемы квантования. Начнем с канонического операторного квантования. Введем канонические переменные q, $p = \partial L / \partial \dot{q} = m\dot{q}$ со скобкой Пуассона

$$\{p, q\} = 1. \tag{3}$$

Тогда гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(q). \tag{4}$$

В квантовом случае вводится коммутатор по правилу (*алгебра Гайзенберга*)

$$[p, q] = -i. \tag{5}$$

Следующий шаг состоит в построении пространства, на котором операторы $f(p,q)$ действуют как операторы. Рассмотрим пространство гладких функций $\psi(x)$, в котором определяется действие:

$$q\psi(x) = x\psi(x),$$
$$p\psi(x) = -i\frac{\partial \psi(x)}{\partial x}.$$

В нем определим собственные векторы и собственные значения гамильтониана:

$$H\psi_n = E_n \psi_n \qquad \text{или} \qquad H|n\rangle = E_n |n\rangle.$$

На векторы $|n\rangle$ (т. е. функции ψ_n) натягиваем *пространство состояний* $\mathcal{H}$ с квадратичной формой

$$\langle a|b\rangle = \int dx\, \psi_a^*(x) \psi_b(x).$$

Рассмотрим теперь частный случай гармонического осциллятора $U_0(q) = \frac{\omega^2 q^2}{2}$. В этом случае пространство состояний можно построить прямо. Положим

$$\begin{gathered} a = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(p - im\omega q), \qquad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(p + im\omega q). \\ [a,a] = [a^+, a^+] = 0, \quad [a, a^+] = 1. \end{gathered} \tag{6}$$

Тогда

$$H_0 = \frac{\omega}{2} + \omega a^+ a. \tag{7}$$

Пусть $|\lambda\rangle$ — собственный вектор оператора $a^+ a$,

$$a^+ a |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle.$$

Тогда

$$(a^+a)a|\lambda\rangle = aa^+a|\lambda\rangle - a|\lambda\rangle = (\lambda-1)a|\lambda\rangle.$$
$$(a^+a)a^+|\lambda\rangle = a^+a^+a|\lambda\rangle + a^+|\lambda\rangle = (\lambda+1)a^+|\lambda\rangle.$$

Отсюда

$$a|\lambda\rangle \sim |\lambda-1\rangle, \qquad a^+|\lambda\rangle \sim |\lambda+1\rangle.$$

Было бы естественно выбрать представление, на котором спектр гамильтониана (7) ограничен снизу, т. е. существует такой вектор $|\lambda_0\rangle$, что $a|\lambda_0\rangle = 0$. Очевидно, что в этом случае $a^+a|\lambda_0\rangle = 0$ и $\lambda_0 = 0$. Такое представление алгебры Гайзенберга называется *фоковским модулем*.

Итак, *вакуумный вектор* $|0\rangle$ определяется условиями

$$a|0\rangle = 0, \qquad \langle 0|0\rangle = 1. \tag{8}$$

Фоковский модуль $\mathcal{F}$ порождается из него алгеброй Гайзенберга, т. е. натянут на векторы

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0\rangle, \qquad \langle n|n\rangle = 1.$$

Тогда

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle.$$

Очевидно

$$a^+a|n\rangle = n|n\rangle \quad \Rightarrow \quad H|n\rangle = \omega\left(\frac{1}{2}+n\right)|n\rangle.$$

Интерпретация: система состоит из *невзаимодействующих частиц* с энергией ω, причем *энергия вакуума* равна $\omega/2$. Такая интерпретация будет иметь смысл в полевых системах.

Вычислим теперь *вакуумные средние* $\langle\mathcal{O}\rangle = \langle 0|\mathcal{O}|0\rangle$ с помощью (6), (8), например

$$\begin{aligned}
&\langle q\rangle = 0, \qquad \langle p\rangle = 0,\\
&\langle q^2\rangle = -\frac{1}{2m\omega}\langle 0|(a-a^+)^2|0\rangle = \frac{1}{2m\omega},\\
&\langle p^2\rangle = \frac{m\omega}{2}\langle 0|(a+a^+)^2|0\rangle = \frac{m\omega}{2} \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

В общем случае для средних от координаты

$$\begin{aligned}
\langle q^{2n+1}\rangle &= 0,\\
\langle q^{2n}\rangle &= \frac{(2n)!}{2^n n!}\langle q^2\rangle^n.
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим *возмущенный* потенциал

$$U(q) = U_0(q) + \lambda V(q) \quad \text{или} \quad H = H_0 + \lambda V(q).$$

При достаточно малом λ и не слишком плохом $V(q)$ мы можем развить теорию возмущений. Мы можем, например, вычислить поправку к вакуумной энергии в первом порядке

$$E_0 = \frac{\omega}{2} + \langle V(q)\rangle_0.$$

Мы можем также вычислить поправки к средним, но проще их вычислять в формализме *функционального интеграла*.

Рассмотрим снова общий случай (4). Найдем амплитуду $U(x',x;\Delta t)$ перехода системы из точки $q=x$ в точку $q=x'$ за малое время Δt. Будем считать, что $U(q)$ почти постоянно в большой области, содержащей x и x'. Тогда

$$\begin{aligned} U(x',x,\Delta t) &= \langle x'|e^{-iH\Delta t}|x\rangle = \int \frac{dp}{2\pi}\,\langle x'|e^{-iH\Delta t}|p\rangle\,\langle p|x\rangle \\ &= \int \frac{dp}{2\pi}\,\psi_p(x')\psi_p^*(x)e^{-iE(p)\Delta t} = \int \frac{dp}{2\pi}\,e^{ip(x'-x)-i\frac{p^2}{2m}\Delta t-iU(x)\Delta t} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\Delta t}}\,\exp\left(i\frac{m(x'-x)^2}{2\Delta t}-iU(x)\Delta t\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Амплитуду за конечное время можно записать как

$$U(x',x,t) = \int_{q(0)=x}^{q(t)=x'} Dq\,e^{iS[q]}. \tag{10}$$

Здесь предполагается предел при $\Delta t\to 0$, $n\to\infty$ с

$$S[q] = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{m(q_{i+1}-q_i)^2}{2\Delta t}-U(q_i)\Delta t\right) \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} \int dt\,\left(\frac{m\dot q^2}{2}-U(q)\right),$$

$$Dq = \left(\frac{m}{2\pi i\Delta t}\right)^{n/2}\prod_{i=1}^{n-1}dq_i,$$

причем $t_0=0$, $t_n=t$, $x_0=x$, $x_n=x'$.

Чтобы сделать интеграл хорошо определенным, выполним *виков поворот*. Положим $t=-i\tau$. Тогда интеграл будет сходиться. Удобно ввести *евклидово действие*

$$S_E[q] = \int d\tau\,\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2+U(q)\right] \tag{11}$$

и писать

$$U(x',x,i\tau) = \int_{q(0)=x}^{q(\tau)=x'} Dq\,e^{-S_E[q]}. \tag{12}$$

Обратим внимание, что поворачивать ось времени нужно так, чтобы положительные положительная полуось t переходила в положительную полуось τ.

Введем *хронологические средние*

$$\langle \mathrm{T}(q(t_1)\dots q(t_n))\rangle = \langle q(t_{T(1)})\dots q(t_{T(n)})\rangle \quad \text{при} \quad t_{T(1)}\ge\dots\ge t_{T(n)}.$$

Можно проверить (**проверить!**), что

$$\langle \mathrm{T}(q(t_1)\dots q(t_n))\rangle = \frac{1}{Z}\int Dq\,q(t_1)\dots q(t_n)\,e^{iS[q]}. \tag{13a}$$

с

$$Z = \int Dq\,e^{iS[q]}.$$

Интегрирование здесь понимается по всей оси времени. В евклидовом варианте (**с него и надо начинать проверку**)

$$\langle \mathrm{T}_E(q(\tau_1)\dots q(\tau_n))\rangle = \frac{1}{Z}\int Dq\,q(\tau_1)\dots q(\tau_n)\,e^{-S_E[q]}, \tag{13b}$$

а

$$Z = \int Dq\, e^{-S_E[q]}.$$

Мы будем писать просто $\langle \ldots \rangle$ вместо $\langle \mathrm{T}(\ldots) \rangle$ (и $\langle \mathrm{T}_E(\ldots) \rangle$).

Удобно рассмотреть *источник* (“внешнюю силу”) $J(t) \equiv iJ_E(\tau)$. Обозначим

$$(f,g) = \int dt\, f(t)g(t), \qquad (f,g)_E = \int d\tau\, f(\tau)g(\tau).$$

Тогда

$$Z[J] \equiv Z_E[J_E] = \int Dq e^{iS[q]+i(J,q)} = \int Dq e^{-S_E[q]-(J_E,q)_E}. \tag{14}$$

Через *производящую функцию* $Z[J]$ можно выразить все корреляторы:

$$\begin{aligned} \langle q(t) \rangle &= -i\, \frac{\delta \log Z[J]}{\delta J(t)}\bigg|_{J=0}, \\ \langle q(t_1)q(t_2) \rangle &= -\left.\frac{Z[J]^{-1}\,\delta^2 Z[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}\right|_{J=0} \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \tag{15}$$

Рассмотрим опять гармонический осциллятор. Вычислим производящую функцию. Для этого заметим, что

$$iS[q] = -S_E[q] = -\frac{1}{2}(q,Kq) = -\frac{1}{2}(q,K_E q)_E,$$

где

$$K = im\frac{d^2}{dt^2} + im\omega^2, \qquad K_E = -m\frac{d^2}{d\tau^2} + m\omega^2.$$

Далее воспользуемся формулой, известной из конечномерного анализа

$$\int d^n x\, e^{-\frac{1}{2}(x,Kx)-(a,x)} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det K}}\, e^{\frac{1}{2}(a,K^{-1}a)}. \tag{16}$$

Множитель $(2\pi)^n$ в нашем случае вообще не существен. Если мы не собираемся дифференцировать функциональные интегралы по m и ω (что иногда действительно нужно), то $\det K$ — тоже константа. Получаем

$$Z[J] \sim e^{-\frac{1}{2}(J,K^{-1}J)}.$$

Отсюда, например,

$$\begin{aligned} \langle q(t_1)q(t_2) \rangle &= G(t_1,t_2) \equiv K^{-1}(t_1,t_2), \\ \langle q(t_1)\ldots q(t_4) \rangle &= G(t_1,t_2)G(t_3,t_4) + G(t_1,t_3)G(t_2,t_4) + G(t_1,t_4)G(t_2,t_3) \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Теорема Вика. *Среднее от четного числа полей для систем с квадратичным действием равно сумме произведений всех спариваний.*

Как найти $G(t',t) = K^{-1}(t',t)$? 1) Можно использовать операторный формализм (**проделайте это!**); 2) Можно воспользоваться определением обратного оператора, но нужно позаботиться о граничных условиях. Итак

$$im\left(\frac{d^2}{dt'^2} + \omega^2\right) G(t',t) = \delta(t'-t).$$

Учтем, что $G(t',t) = G(t'-t)$. Получаем

$$G(t) = \begin{cases} a_1 e^{-i\omega t} + b_1 e^{i\omega t} & \text{при } t > 0, \\ a_2 e^{-i\omega t} + b_2 e^{i\omega t} & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

$$G(0^+) = G(0^-), \qquad im(\dot G(0^+) - \dot G(0^-)) = 1.$$

Теперь учтем, что при виковом повороте функция $G(-i\tau)$ должна убывать при $\tau \to \pm\infty$. Именно это означает усреднение по вакуумному состоянию. Отсюда $b_1 = a_2 = 0$, $a_1 = b_2 = 1/2m\omega$. Окончательно

$$G(t) = \frac{1}{2m\omega} e^{-i\omega|t|} \tag{17a}$$

при вещественном времени и

$$G(-i\tau) = \frac{1}{2m\omega} e^{-\omega|\tau|} \tag{17b}$$

при мнимом. Легко видеть, что $\langle q^2 \rangle = 1/2m\omega$.

Наконец, рассмотрим кратко теорию возмущений. Пусть

$$S[q] = S_0[q] + \lambda S_1[q],$$

где S_0 — действие гармонического осциллятора, а λS_1 — поправка, например

$$S_1[q] = -\frac{1}{4!}\int dt\, q^4. \tag{18}$$

Тогда поправка к $Z[J]$ вычисляется так

$$Z[J] = Z_0[J] + i\lambda \int Dq\, S_1[q] e^{iS_0 + (J,q)} - \frac{\lambda^2}{2}\int Dq\, S_1^2[q] e^{iS_0+(J,q)} + \cdots.$$

Корреляторы невозмущенной теории мы знаем. Мы можем вычислять поправки из этой формулы. Например для модели (18) получаем

$$\begin{aligned}
\langle q(t_1)q(t_2)\rangle = G(t_1-t_2) &- \frac{i\lambda}{2}\int ds\, G(t_1-s)G^2(0)G(s-t_2) \\
&- \frac{\lambda^2}{4}\int ds_1\, ds_2\, G(t_1-s_1)G^2(0)G(s_1-s_2)G^2(0)G(s_2-t_2) \\
&- \frac{\lambda^2}{4}\int ds_1\, ds_2\, G(t_1-s_1)G(s_1-s_2)G^2(0)G(s_2-s_1)G(s_1-t_2) \\
&- \frac{\lambda^2}{6}\int ds_1\, ds_2\, G(t_1-s_1)G^3(s_1-s_2)G(s_2-t_2) + \cdots.
\end{aligned}$$