Задача 1
Модель Тирринга

Рассмотрим действие

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int d^D x \, \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 \right). \tag{1}$$

Показать, что оно эквивалентно действию со вспомогательным векторным полем

$$S[\psi, \bar{\psi}, A^\mu] = \int d^D x \, \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - \hat{A} - m)\psi + \frac{1}{2g}A^\mu A_\mu \right). \tag{2}$$

Показать, что критическая размерность для этой модели равна двум. В двумерном пространстве времени построить диаграммную технику, исходя из действия (2), и вычислить в одной петле собственно-энергетические части для ψ и A и вершинную функцию.

Задача 2
Свободный безмассовый бозон в двумерном пространстве-времени

Рассмотрим свободное нейтральное бозонное поле в двумерном евклидовом пространстве

$$S_E[\phi] = \int \frac{d^2x}{8\pi} \, (\partial_\mu\phi)^2.$$

Покажите, что парная корреляционная функция

$$G(x' - x) \equiv \langle\phi(x')\phi(x)\rangle = \log\frac{R^2}{(x' - x)^2},$$

причем свободный параметр R играет роль характерного размера области, на которой живет теория. Как выглядит эта функция в пространстве-времени Минковского? Вычислите корреляционные функции полей $V_\alpha(x) = C_\alpha e^{i\alpha\phi(x)}$ в пределе $R \to \infty$. Бесконечные множители, содержащие $G(0)$, сократите, правильно подобрав нормирующие множители C_α. (Удобно вначале положить $G(0) = \log\frac{R^2}{r^2}$, а затем взять предел $r \to 0$.)

Задача 3
Внешние линии в диаграммах для S-матрицы

Предельным переходом $t \to \pm\infty$ в пропагаторах покажите, что внешней фермионной линии в диаграммах для амплитуды $\mathcal{M}$ в импульсном представлении отвечает множитель u_p для входящего электрона и $\bar{u}_p$ для выходящего электрона, u_{-p} для входящего позитрона и $\bar{u}_{-p}$ для выходящего позитрона. Внешней фотонной линии отвечает вектор поляризации e_μ для входящего фотона и комплексно-сопряженный ему вектор e^*_μ для выходящего фотона.

Задача 4
Рассеяние электрона на ядре

Вычислите в первом неисчезающем порядке сечение рассеяния релятивистского электрона на ядре. При этом начальное и конечное состояние считайте неполяризованным: усредните по спиновым состояниям начального электрона и просуммируйте по спиновым состояниям конечного электрона. Найдите поправке к формуле Резерфорда.

Задача 4а
Рассеяние электрона на мюоне

Вычислите в первом неисчезающем порядке сечение рассеяния релятивистского электрона на мюоне $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$. Выразите ответ через переменные Мандельстама s, t, u. Вычислите сечение аннигиляции электрон-позитронной пары с рождением мюон-антимюонной пары: $e^- e^+ \to \mu^- \mu^+$. Начальные и конечные состояния частиц считайте неполяризоваными.

Задача 4б
Комптоновское рассеяние и аннигиляция элетрон-позитронной пары

Вычислите сечение рассеяния фотона на электроне (комптоновское рассеяние) и сечение аннигиляции электрон-позитронной пары в два фотона. Начальные и конечные состояния частиц считайте неполяризованными.

Задача 5
Факторизованное рассеяние

В некоторых моделях двумерной (1+1) квантовой теории поля встречается явление факторизованного рассеяния. При этом рассеивающиеся частицы могут только обмениваться 2-импульсами, а матрица рассеяния факторизуется в двухчастичные матрицы рассеяния. Пусть в теории имеется ровно один нейтральный скалярный бозон a. Тогда матрица рассеяния как функция быстрот частиц равна

$$S(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \prod_{i<j}^{n} S(\beta_i - \beta_j).$$

Для двухчастичной матрицы рассеяния физическому листу отвечает область $0 \le \operatorname{Im} \beta < \pi$, а нефизическому — область $-\pi \le \operatorname{Im} \beta < 0$. Матрица рассеяния должна удовлетворять условию унитарности

$$S(\beta) S(-\beta) = 1$$

и кроссинг-симметрии

$$S(i\pi - \beta) = S(\beta).$$

Найти матрицу рассеяния, если саму частицу a можно рассматривать как связанное состояние двух частиц a (иными словами, трехточечные корреляционные функции в теории отличны от нуля).

Подсказки: Где должен находиться полюс, отвечающий процессу $a + a \to a$? Как можно найти S-матрицу, в которую входит составная частица, в случае факторизованного рассеяния?

Задача 6
Эффективный потенциал

В теории φ^4 эффективное действие можно записать в виде

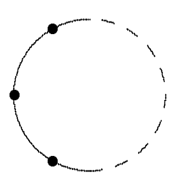
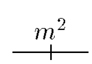
$$\Gamma(\varphi) = \int d^4x \, \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - V_{\text{eff}}(\varphi) \right) + \cdots,$$

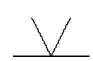
где многоточие обозначает члены с высшими производными поля φ. Функция V_{eff} называется *эффективным потенциалом.* Покажите, что эффективный потенциал в однопетлевом приближении равен

$$V_{\text{eff}}(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{1}{64\pi^2} \left[\left(m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi^2 \right)^2 \log \left(m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi^2 \right) - a\varphi^2 - b\varphi^4 \right]$$

Вычислите a и b из условия перенормировки $m^2 = V''_{\text{eff}}(0)$, $\lambda = V^{(IV)}_{\text{eff}}(0)$.

Для этого возмущением считайте и массовый член $\frac{-m^2}{2}\varphi^2$ и взаимодействие $-\frac{\lambda}{4!}\varphi^4$ и вычислите все диаграммы вида

 , где = 

\+ 

с нулевыми импульсами на внешних линиях. К двум первым диаграммам (двухточечной и четырехточечной) нужны контрчлены, порождающие два последних члена в выражении для эффективного потенциала.

Рассмотрите два случая: 1) $m^2 > 0$, 2) $m^2 < 0$. Покажите, что во втором случае минимум эффективного потенциала $\varphi_{\min} \neq 0$ (имеет место спонтанное нарушение симметрии). Чему равна масса физических частиц в этом случае?

Задача 7
Эффект Казимира

Рассмотрите свободное скалярное поле в ограниченном одномерном пространстве $0 < x^1 < L$ с граничными условиями $\varphi(x^0, 0) = \varphi(x^0, L) = 0$. Формально найдите вакуумную энергию состояния. Покажите, что если регуляризовать эту энергию, вводя в сумму по волновым числам k множитель $e^{-\alpha|k|}$ $(k \to 0)$, можно получить конечное выражение для силы, действующей на концы отрезка. Обобщите результат на $(D-1)$-мерное пространство, ограниченное в одном измерении и на электромагнитное поле в $(3+1)$-мерном пространстве-времени.

Задача 8
Спонтанное нарушение симметрии

Рассмотрите теорию комплексного скалярного поля

$$S[\phi] = \int d^D x \left(|\partial_\mu \phi|^2 - V(\phi)\right)$$

с потенциалом

$$V(\phi) = -\mu^2|\phi|^2 + \frac{\lambda}{2}|\phi|^4.$$

При $\mu^2 > 0$ в теории имеется спонтанное нарушение $U(1)$-симметрии. Именно, на классическом уровне минимум потенциала достигается при $\phi(x) = \phi_0 e^{i\alpha}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$, где

$$\phi_0 = \left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^{1/2}.$$

Это значит, что настоящим вакуумом теории является состояние с $\langle\phi\rangle = \phi_0$ (без ограничения общности можно положить $\alpha = 0$). Покажите, что в теории имеется один безмассовый нейтральный бозон (*голдстоуновский* бозон) и один массивный нейтральный бозон.

Рассмотрите теперь скалярную электродинамику

$$S[A, \phi] = \int d^D x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi)\right)$$

с тем же потенциалом $V(\phi)$. Покажите (на уровне простого подсчета индексов расходимостей), что эта теория перенормируема в четырех измерениях. Покажите (на классическом уровне), что электромагнитное поле в этой модели приобретает массу (*эффект Хиггса*).