Лекция 22
Свободнополевое представление

Рассмотрим теорию свободного бозонного поля $\varphi(z,\bar z)$ с действием

$$S[\varphi]=\int d^2x\,\frac{(\partial_\mu\varphi)^2}{16\pi}. \tag{1}$$

При этом компоненты тензора энергии импульса определим как в теории Лиувилля ($Q=b+b^{-1}=2\mathrm{i}\alpha_0$):

$$T(z)=-\frac14(\partial\varphi)^2+\mathrm{i}\alpha_0\partial^2\varphi,\qquad \bar T(\bar z)=-\frac14(\bar\partial\varphi)^2+\mathrm{i}\alpha_0\bar\partial^2\varphi. \tag{2}$$

Как мы уже установили, центральный заряд, отвечающий этому тензору энергии-импульса, равен

$$c=1+6Q^2=1-24\alpha_0^2. \tag{3}$$

Дополнительные члены $\mathrm{i}\alpha_0\partial^2\varphi$ и $\mathrm{i}\alpha_0\bar\partial^2\varphi$ не проходят для свободного безмассового поля бесследно. Дело в том, что конформные размерности экспоненциальных полей

$$V_\alpha(z,\bar z)=e^{\mathrm{i}\alpha\varphi(z,\bar z)}$$

равны

$$\Delta_\alpha=a(Q-a)=\alpha(\alpha-2\alpha_0). \tag{4}$$

Поэтому

$$\Delta_\alpha=\Delta_{2\alpha_0-\alpha}, \tag{5}$$

то есть одинаковую размерность имеют уже не поля V_α и $V_{-\alpha}$, как при обычном тензоре энергии-импульса, поля V_α и $V_{2\alpha_0-\alpha}$. А это значит, что, для того, чтобы теория была корректно определена на сфере, следует переопределить парную корреляционную функцию. Именно, для любого оператора X положим

$$\langle X\rangle_{\alpha_0}=\lim_{|z|\to\infty}|z|^{16\alpha_0^2}\langle V_{-2\alpha_0}(z,\bar z)X\rangle_0, \tag{6}$$

где $\langle\cdots\rangle_0$ — стандартное вакуумное среднее для свободного безмассового бозона. Множитель $|z|^{16\alpha_0^2}$ введен потому, что при больших значениях $|z|$ оператор общего вида X будет выглядеть пропорциональными $V_{2\alpha_0}(0,0)$. Таким образом, корреляционная функция в правой части будет в лидирующем порядке пропорциональна $|z|^{-16\alpha_0^2}$. Ниже под средним $\langle\ldots\rangle$ всегда будет пониматься среднее с «зарядом на бесконечности» $\langle\ldots\rangle_{\alpha_0}$. Тогда

$$\langle V_\alpha(z_1,\bar z_1)V_{2\alpha_0-\alpha}(z_2,\bar z_2)\rangle=\frac{1}{|z_{12}|^{4\Delta_\alpha}}. \tag{7}$$

Хотя представление свободными полями и позволяет прямо получать корреляционные функции в конформной теории поля, нашей первой целью будет именно представление для конформных блоков. Поэтому мы разобьем свободное поле на две киральности, или, как еще говорят, на голоморфную и антиголоморфную части:

$$\varphi(z,\bar z)=\varphi(z)+\bar\varphi(\bar z). \tag{8}$$

При этом корреляционные функции по определению равны

$$\langle\varphi(z')\varphi(z)\rangle_0=2\log\frac{R}{z'-z},\qquad \langle\bar\varphi(\bar z')\bar\varphi(\bar z)\rangle_0=2\log\frac{R}{\bar z'-\bar z},\qquad \langle\bar\varphi(\bar z')\varphi(z)\rangle_0=0. \tag{9}$$

Напомню, что общие корреляционные функции (с учетом заряда на бесконечности) перенормированных экспоненциальных полей равны

$$\langle\overset{\frown}{\prod_{i=1}^{N}}e^{\mathrm{i}\alpha_i\varphi(z_i)}\rangle=\begin{cases}\prod_{i<j}^N(z_i-z_j)^{2\alpha_i\alpha_j}, & \sum_{i=1}^N\alpha_i=2\alpha_0,\\ 0, & \sum_{i=1}^N\alpha_i\neq2\alpha_0.\end{cases} \tag{10}$$

Аналогичная формула имеет место для $e^{\mathrm{i}\alpha_i\bar{\varphi}(\bar{z})}$.

Пока что забудем про $\bar{\varphi}(\bar{z})$. Среди операторов $e^{\mathrm{i}\alpha\varphi(z)}$ есть два оператора конформной размерности 1. Размерности этих операторов определяются решением квадратного уравнения:

$$a_\pm(Q - a_\pm) \equiv \alpha_\pm(\alpha_\pm - 2\alpha_0) = 1. \tag{11}$$

Решения этого уравнения очевидны:

$$a_+ = b^{-1}, \qquad a_- = b$$

или

$$\alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 1} \tag{12}$$

Вспомним, что именно это требовалось от оператора возмущения в теории Лиувилля. При этом теория оказывалась удивительно симметричной относительно замены $b \to b^{-1}$. Теперь, в теории свободного «кирального» поля $\varphi(z)$ мы можем ввести два оператора

$$S_\pm(C) = \int_C dz\, e^{\mathrm{i}\alpha_\pm\varphi(z)}, \tag{13}$$

зависящих от контура интегрирования C. Такие операторы называются *экранирующими операторами* и в случае замкнутого (с учетом ветвлений) контура C коммутируют с алгеброй Вирасоро.

Предположим, что мы хотим написать в виде вакуумного среднего от экспонент какой-нибудь конформный блок $\mathcal{F}^{\alpha,\alpha_{12}}_{\alpha,\alpha_{12}}(\alpha \pm \alpha_{12}; w)$ для корреляционной функции

$$G(w, \bar{w}) = \langle \phi_{\Delta_\alpha}(\infty, \infty)\phi_{12}(1, 1)\phi_{12}(w, \bar{w})\phi_{\Delta_\alpha}(0, 0)\rangle.$$

Естественно было бы сопоставить

$$\phi_{\Delta_\alpha} \sim e^{\mathrm{i}\alpha\varphi}, \qquad \phi_{12} \sim e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi}.$$

Рассмотрим произведение полей

$$e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(z')}e^{\mathrm{i}\alpha\varphi(z)} = \left(\frac{z'-z}{R}\right)^{2\alpha\alpha_{12}} e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(z') + \mathrm{i}\alpha\varphi(z)} = \left(\frac{z'-z}{R}\right)^{2\alpha\alpha_{12}} e^{\mathrm{i}(\alpha+\alpha_{12})\varphi(z)} + \cdots,$$

где точки обозначают члены более высокого порядка. Мы видим, что это соответствует первому слагаемому в правиле слияния

$$[\phi_{12}][\phi_\alpha] = [\phi_{\alpha+\alpha_{12}}] + [\phi_{\alpha-\alpha_{12}}].$$

То есть, можно думать, что корреляционная функция отождествляется с конформным блоком примерно так

$$\langle \cdots e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(w)}e^{\mathrm{i}\alpha\varphi(0)}\rangle \mathcal{F}^{\alpha,\alpha_{12}}_{\alpha,\alpha_{12}}(\alpha + \alpha_{12}; w).$$

Точками мы просто заменили пока неизвестное нам представление для остальных полей. Можно было бы для первого поля попробовать другое представление:

$$\phi_\alpha \sim e^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha)\varphi}.$$

Тогда получим

$$e^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha)\varphi(z')}e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(z)} = \left(\frac{z'-z}{R)}\right)^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha)\alpha_{12}e^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha+\alpha_{12}}\varphi(z)} + \cdots.$$

Это соответствует второму члену в правиле слияния, что не дает возможности построить конформный блок. И действительно

$$\langle e^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha)\varphi(\infty)}e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(1)}e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(w)}e^{\mathrm{i}\alpha\varphi(0)}\rangle = 0$$

в силу того, что

$$(2\alpha_0 - \alpha) + \alpha_{12} + \alpha_{12} + \alpha = 2\alpha_0 - \alpha_- \neq 2\alpha_0.$$

Отсюда видно, что коррелятор станет ненулевым, если в него вставить оператор S_-, заряд которого как раз равен α_-:

$$\langle e^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha)\varphi(\infty)} e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(1)} e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(w)} e^{\mathrm{i}\alpha\varphi(0)} S_-(C)\rangle \neq 0.$$

Вопрос состоит в том, как провести контур C. Есть способ действительно нарисовать замкнутый (на накрывающей поверхности!) контур в виде «очков», охватывающих два поля. Но для вычислительных целей эти очки можно сжать и свести задачу к вычислению интеграла по незамкнутой кривой, соединяющей два поля. Если интеграл в силу особенностей начнет расходиться, его можно доопределить как аналитическое продолжение по α и α_- из той области, где он сходится. Мотивированные этими соображениями, напишем операторное разложение

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(z')} \int_z^{z'} du\, e^{\mathrm{i}\alpha_-\varphi(u)}\, e^{\mathrm{i}\alpha\varphi(z)} &= R^{\#}(z'-z)^{2\alpha\alpha_{12}} \int_z^{z'} du\,(z'-u)^{-\alpha_-^2}(u-z)^{2\alpha\alpha_-} + \cdots \\ &= R^{\#}(z'-z)^{1+(\alpha-\alpha_-)\alpha_-} \frac{\Gamma(1-\alpha_-^2)\Gamma(1+2\alpha\alpha_-)}{\Gamma(2+2\alpha\alpha_- - \alpha_-^2)} e^{\mathrm{i}(\alpha-\alpha_{12})\varphi(z)} + \cdots . \quad (14) \end{aligned}$$

Здесь мы использовали стандартное представление бета-функции

$$\int_0^1 du\, u^\alpha (1-u)^\beta = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}.$$

В (14) мы как раз получили второй член в правиле слияния! Теперь мы можем написать

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\alpha,\alpha_{12}}_{\alpha,\alpha_{12}}(\alpha-\alpha_{12};w) &= A_-^{-1}\langle e^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha)\varphi(\infty)} e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(1)} e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(w)} S_-(C_0^w) e^{\mathrm{i}\alpha\varphi(0)}\rangle \\ &= A_-^{-1}\int_0^w du\, u^{2\alpha\alpha_-}(w-u)^{-\alpha_-^2}(1-u)^{-\alpha_-^2}. \quad (15) \end{aligned}$$

Здесь $C_z^{z'}$ обозначает контур идущий от точки z до точки z', а A_- — некоторая константа. Наша уверенность в том, что мы можем поставить знак равенства основывается на двух фактах:

1. Правая часть уравнения (15) конформно-инвариантна и потому является решением дифференциального уравнения второго порядка, связанного с нуль-вектором.

2. При обходе переменной w вокруг нуля в правой части просто набегает множитель $e^{2\pi(\alpha-\alpha_-)\alpha_-}$ в точности такой, который набегает для конформного блока.

Отметим, что эти соображения остаются в силе и если мы не фиксируем точки значениями ∞, 1, w, 0, а также в случае многоточечных функций. Главное условие применимости этих соображений состоит в том, что среди N полей имеется как минимум $N-2$ вырожденных поля.

Как найти второе решение дифференциального уравнения? Для этого достаточно просто провести контур как-нибудь по-другому. Чтобы свойства монодромии вокруг нуля остались такими же простыми, контур следует провести от единицы до бесконечности:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\alpha,\alpha_{12}}_{\alpha,\alpha_{12}}(\alpha+\alpha_{12};w) &= A_+^{-1}\langle e^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha)\varphi(\infty)} S_-(C_1^\infty) e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(1)} e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(w)} e^{\mathrm{i}\alpha\varphi(0)}\rangle \\ &= A_+^{-1}\int_1^\infty du\, u^{2\alpha\alpha_-}(u-w)^{-\alpha_-^2}(u-1)^{-\alpha_-^2}. \quad (16) \end{aligned}$$

С этим конформным блоком связано также разложение

$$\begin{aligned} & e^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha)\varphi(z')} \int_z^{z'} du\, e^{\mathrm{i}\alpha_-\varphi(u)}\, e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(z)} \\ &\quad = R^{\#}(z'-z)^{1+(2\alpha_0-\alpha-\alpha_-)\alpha_-} \frac{\Gamma(1-\alpha_-^2)\Gamma(-1-2\alpha\alpha_- + 2\alpha_-^2)}{\Gamma(\alpha_-^2 - 2\alpha\alpha_-)} e^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha-\alpha_{12})\varphi(z)} + \cdots , \quad (17) \end{aligned}$$

которое получается из (14) заменой α на $2\alpha_0-\alpha$.

Константы $A_\pm$ нетрудно найти. При $w\to 0$ четырехточки распадаются в две трехточки:

$$\begin{aligned} & \langle e^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha)\varphi(\infty)} e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(1)} e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(w)} S_-(C_0^w) e^{\mathrm{i}\alpha\varphi(0)}\rangle \\ &\quad = \langle e^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha)\varphi(\infty)} e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(1)} e^{\mathrm{i}(\alpha-\alpha_{12})\varphi(0)}\rangle \langle e^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha+\alpha_{12})\varphi(\infty)} e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(w)} e^{\mathrm{i}\alpha\varphi(0)}\rangle \end{aligned}$$

$$= w^{1+(\alpha-\alpha_-)\alpha_-}\frac{\Gamma(1-\alpha_-^2)\Gamma(1+2\alpha\alpha_-)}{\Gamma(2+2\alpha\alpha_- -\alpha_-^2)}.$$

Отсюда

$$A_- = \frac{\Gamma(1-\alpha_-^2)\Gamma(1+2\alpha\alpha_-)}{\Gamma(2+2\alpha\alpha_- -\alpha_-^2)}. \tag{18}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
&\langle e^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha)\varphi(\infty)}S_-(C_1^\infty)e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(1)}e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(w)}e^{\mathrm{i}\alpha\varphi(0)}\rangle\\
&\quad= \langle e^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha)\varphi(\infty)}S_-(C_1^\infty)e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(1)}e^{\mathrm{i}(\alpha+\alpha_{12})\varphi(0)}\rangle\langle e^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha-\alpha_{12})\varphi(\infty)}e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(w)}e^{\mathrm{i}\alpha\varphi(0)}\rangle\\
&\quad= w^{-\alpha\alpha_-}\frac{\Gamma(1-\alpha_-^2)\Gamma(-1-2\alpha\alpha_-+2\alpha_-^2)}{\Gamma(\alpha_-^2-2\alpha\alpha_-)}.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$A_+ = \frac{\Gamma(1-\alpha_-^2)\Gamma(-1-2\alpha\alpha_-+2\alpha_-^2)}{\Gamma(\alpha_-^2-2\alpha\alpha_-)}. \tag{19}$$

Теперь мы имеем явное интегральное представление для конформных блоков. Поэтому корреляционная функция записывается как

$$\begin{aligned}
G(w,\bar w) &= C_{\alpha,\alpha_{12},\alpha+\alpha_{12}}C^{\alpha+\alpha_{12}}_{\alpha_{12},\alpha}\mathcal{F}^{\alpha,\alpha_{12}}_{\alpha,\alpha_{12}}(\alpha+\alpha_{12};w)\overline{\mathcal{F}^{\alpha,\alpha_{12}}_{\alpha,\alpha_{12}}(\alpha+\alpha_{12};w)}\\
&\quad+ C_{\alpha,\alpha_{12},\alpha-\alpha_{12}}C^{\alpha-\alpha_{12}}_{\alpha_{12},\alpha}\mathcal{F}^{\alpha,\alpha_{12}}_{\alpha,\alpha_{12}}(\alpha-\alpha_{12};w)\overline{\mathcal{F}^{\alpha,\alpha_{12}}_{\alpha,\alpha_{12}}(\alpha-\alpha_{12};w)}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Если мы найдем структурные константы $C^{\alpha\pm\alpha_{12}}_{\alpha_{12},\alpha}$, мы будем иметь явное интегральное представление для всех (не только четырехточечных) корреляционных функций в теории. Но для этого нужно выписать коэффициенты разложения конформных блоков $\mathcal{F}(\dots;w)$ по конформным блокам $\mathcal{F}(\dots;1-w)$, а затем решить уравнения ассоциативности. Оказывается, сделать это не так уж трудно. Обратим внимание на конформные блоки $\mathcal{F}(\dots;1-w)$ можно записать через практически те же корреляционные функции экспонент:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\alpha\ \ ,\alpha}_{\alpha_{12},\alpha_{12}}(0;1-w) &= A_-^{\prime -1}\langle e^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha)\varphi(\infty)}e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(1)}S_-(C_w^1)e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(w)}e^{\mathrm{i}\alpha\varphi(0)}\rangle\\
&= A_-^{\prime -1}\int_w^1 du\, u^{2\alpha\alpha_-}(u-w)^{-\alpha_-^2}(1-u)^{-\alpha_-^2},
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\alpha\ \ ,\alpha}_{\alpha_{12},\alpha_{12}}(\alpha_{13};1-w) &= A_+^{\prime -1}\langle e^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha)\varphi(\infty)}e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(1)}e^{\mathrm{i}\alpha_{12}\varphi(w)}e^{\mathrm{i}\alpha\varphi(0)}S_-(C^0_{-\infty})\rangle\\
&= A_+^{\prime -1}\int_{-\infty}^0 du\,(-u)^{2\alpha\alpha_-}(w-u)^{-\alpha_-^2}(1-u)^{-\alpha_-^2},
\end{aligned} \tag{22}$$

причем

$$A'_- = \frac{\Gamma^2(1-\alpha_-^2)}{\Gamma(2-2\alpha_-^2)}, \tag{23}$$

$$A'_+ = \frac{\Gamma(-1-2\alpha\alpha_-+2\alpha_-^2)\Gamma(1+2\alpha\alpha_-)}{\Gamma(2\alpha_-^2)}. \tag{24}$$

Разница заключается только в том, что контуры интегрирования проходят от w до 1 и от $-\infty$ до 0. То есть функции (15), (16) можно выразить через (21), (22) путем перекидывания контуров. Я не буду утомлять вас вычислением (хотя оно и очень поучительно) и приведу лишь результат:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\alpha,\alpha_{12}}_{\alpha,\alpha_{12}}(\alpha-\alpha_{12};w) &= K_{--}\mathcal{F}^{\alpha\ \ ,\alpha}_{\alpha_{12},\alpha_{12}}(0;1-w)+K_{-+}\mathcal{F}^{\alpha\ \ ,\alpha}_{\alpha_{12},\alpha_{12}}(\alpha_{13};1-w),\\
\mathcal{F}^{\alpha,\alpha_{12}}_{\alpha,\alpha_{12}}(\alpha+\alpha_{12};w) &= K_{+-}\mathcal{F}^{\alpha\ \ ,\alpha}_{\alpha_{12},\alpha_{12}}(0;1-w)+K_{++}\mathcal{F}^{\alpha\ \ ,\alpha}_{\alpha_{12},\alpha_{12}}(\alpha_{13};1-w),
\end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned}
K_{--} &= -\frac{A'_-}{A_-}\frac{\sin\pi\alpha_-^2}{\sin 2\pi\alpha_-^2}, \quad K_{-+} = \frac{A'_+}{A_-}\frac{\sin 2\pi(\alpha\alpha_- -\alpha_-^2)}{\sin 2\pi\alpha_-^2},\\
K_{+-} &= -\frac{A'_-}{A_+}\frac{\sin\pi\alpha_-^2}{\sin 2\pi\alpha_-^2}, \quad K_{++} = \frac{A'_+}{A_+}\frac{\sin 2\pi\alpha\alpha_-}{\sin 2\pi\alpha_-^2}.
\end{aligned} \tag{26}$$

В обозначениях Лекции 20, полагая $\phi_m = \phi_{\alpha-\alpha_{12}}$, $\phi_{m'} = \phi_{\alpha+\alpha_{12}}$, получим

$$(C^{\alpha-\alpha_{12}}_{\alpha,\alpha_{12}})^2 K_{--}K_{-+} + (C^{\alpha+\alpha_{12}}_{\alpha,\alpha_{12}})^2 K_{+-}K_{++} = 0$$

Используя симметрию структурных констант в нашей теории, получим

$$\begin{aligned}\left(\frac{C^{\alpha+\alpha_{12}}_{\alpha,\alpha_{12}}}{C^{\alpha}_{\alpha-\alpha_{12},\alpha_{12}}}\right)^2 &= -\frac{K_{+-}K_{++}}{K_{--}K_{-+}} = -\frac{A_+^2}{A_-^2}\frac{\sin 2\pi(\alpha\alpha_- - \alpha_-^2)}{\sin 2\pi\alpha\alpha_-} \\ &= \frac{\gamma(1+2\alpha\alpha_- - \alpha_-^2)\gamma(2+2\alpha\alpha_- - \alpha_-^2)}{\gamma(1+2\alpha\alpha_-)\gamma(2+2\alpha\alpha_- - 2\alpha_-^2)},\end{aligned} \tag{27}$$

где

$$\gamma(z) = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(1-z)}.$$

Если, например, мы положим $\alpha = \alpha_{12}$, то, поскольку $C^{\alpha_{12}}_{0,\alpha_{12}} = 1$, мы немедленно получим

$$(C^{13}_{12,12})^2 = \frac{\gamma(1-2\alpha_-^2)\gamma(2-2\alpha_-^2)}{\gamma(1-\alpha_-^2)\gamma(2-3\alpha_-^2)}.$$

Легко проверить, что в случае модели Изинга ($\alpha_-^2 = 3/4$) этот квадрат равен единице.

Таким способом можно найти все структурные константы $C^{1.n+1}_{1n,12}$. Заменой α_-^2 на α_+^2 получаются структурные константы $C^{m+1.1}_{m1,21}$. Чтобы найти вообще все структурные константы $C^{m''n''}_{mn,m'n'}$ необходимо научиться вычислять интегралы вида

$$\begin{aligned}&\langle e^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha-\alpha_{mn}-k\alpha_+-l\alpha_-)\varphi(\infty)} e^{\mathrm{i}\alpha_{mn}\varphi(1)} \int_0^1 du_k \int_0^{u_k} du_{k-1}\ldots\int_0^{u_2} du_1\, e^{\mathrm{i}\alpha_+\varphi(u_k)}\ldots e^{\mathrm{i}\alpha_+\varphi(u_1)} \\ &\qquad\times \int_0^1 dv_k \int_0^{v_l} dv_{l-1}\ldots\int_0^{v_2} dv_1\, e^{\mathrm{i}\alpha_-\varphi(v_k)}\ldots e^{\mathrm{i}\alpha_-\varphi(v_1)} e^{\mathrm{i}\alpha\varphi(0)}\rangle \\ &\qquad= \int_0^1 du_k \int_0^{u_k} du_{k-1}\ldots\int_0^{u_2} du_1 \int_0^1 dv_l \int_0^{v_l} dv_{l-1}\ldots\int_0^{v_2} dv_1 \\ &\qquad\quad\times \prod_{i=1}^k u_i^{2\alpha\alpha_{1n}}(1-u_i)^{(2\alpha_0-\alpha-\alpha_{1n}-k\alpha_-)\alpha_{1n}} \prod_{i>j}^k (u_i-u_j)^{2\alpha_-^2} \\ &\qquad\qquad\times \prod_{i=1}^l v_i^{2\alpha\alpha_{1n}}(1-v_i)^{(2\alpha_0-\alpha-\alpha_{1n}-l\alpha_-)\alpha_{1n}} \prod_{i>j}^l (v_i-v_j)^{2\alpha_-^2} \prod_{i=1}^k\prod_{j=1}^l (u_i-v_j)^{-2}\end{aligned}$$

и научиться перебрасывать интегралы в соответствующих четырехточках. Это было сделано Доценко и Фатеевым (1985), причем были получены явные формулы для всех структурных констант вырожденных полей.

Обратим внимание, что в последнем выражении $k \le m$, $l \le n$. С чем это связано? Не может ли быть коррелятора, нарушающего это условие? Оказывается, не может. Чтобы понять это давайте вспомним, что интегралы от z до z' возникли как сжатие замкнутых контуров. Рассмотрим интеграл

$$Q^{(m)}_\pm = \int_{C(z_0)} du_m \int_{C(u_m)} du_{m-1}\ldots\int_{C(u_2)} du_1\, e^{\mathrm{i}\alpha_+\varphi(u_m)} e^{\mathrm{i}\alpha_\pm\varphi(u_m-1)}\ldots e^{\mathrm{i}\alpha_\pm\varphi(u_1)}$$

где $z_0 \ne z$, контур $C(\zeta)$ начинается в точке ζ, обходит точку z и возвращается в ζ. Пусть $\mathcal{F}_\alpha$ — фоковский модуль над оператором $e^{\mathrm{i}\alpha\varphi(z)}$, то есть пространство всех операторов, получаемых из него умножением на производные от поля $\varphi(z)$:

$$\mathcal{F}_\alpha = \mathrm{span}\left\{(\partial^{r_1}\varphi(z)\partial^{r_2}\varphi(z)\cdots)e^{\mathrm{i}\alpha\varphi(z)}\right\}, \qquad \mathcal{F}_{mn} = \mathcal{F}_{\alpha_{mn}}$$

Рассмотрим выражения

$$Q^{(m)}_+\Phi \in \mathcal{F}_{-m,n}, \qquad Q^{(n)}_-\Phi \in \mathcal{F}_{m,-n}, \quad \text{если} \quad \Phi \in \mathcal{F}_{mn}.$$

Нетрудно доказать, что такой интеграл не зависит от начальной точки z_0. Действительно, суммарная степень интеграла для первого выражения,

$$m + 2m\alpha_+\alpha_{mn} + 2\frac{m(m-1)}{2}\alpha_+^2 + (\text{целое}) = mn + (\text{целое}),$$

целая (аналогично для второго выражения). Это значит, что этот интегралы хорошо определены. При этом $Q_+^{(m)}$ действует из фоковского модуля над полем $e^{\mathrm{i}\alpha_{mn}\varphi}$ в фоковский модуль над полем $e^{\mathrm{i}\alpha_{-m,n}\varphi}$. С другой стороны, как легко проверить,

$$\Delta_{-m,n} = \Delta_{m,-n} = \Delta_{mn} + mn. \tag{28}$$

Это значит, что для $\Phi = e^{\mathrm{i}\alpha_{mn}\varphi}$ интегралы равны нулю:

$$Q_+^{(m)} e^{\mathrm{i}\alpha_{mn}\varphi(z)} = Q_-^{(n)} e^{\mathrm{i}\alpha_{mn}\varphi(z)} = 0.$$

То есть мы не можем «навесить» на поле $e^{\mathrm{i}\alpha_{mn}\varphi}$ больше чем $m-1$ экранирующих операторов S_+ и больше чем $n-1$ операторов S_-.

Пусть v — некоторый вектор в $\mathcal{F}_{mn}$ на уровне mn. Тогда

$$Q_+^{(m)} v = \text{ const}\, e^{\mathrm{i}\alpha_{-m,n}\varphi}.$$

Если константа не равна нулю, этот вектор не может быть получен из старшего вектора действием алгебры Вирасоро, так как она коммутирует с экранирующими операторами. Поэтому физическим векторам в фоковском модули соответствует подпредставление определенное условием

$$Q_+^{(m)}\Phi = 0$$

или

$$Q_-^{(n)}\Phi = 0.$$

Оба условия эквивалентны.

В модуле же $\mathcal{F}_{-m,-n}$, соответствующем полю $e^{\mathrm{i}(2\alpha_0-\alpha_{mn})\varphi(z)}$, физическими состояниями являются состояния, не являющиеся образами $Q_+^{(m)}\mathcal{F}_{m,-n}$ (либо $Q_-^{(n)}\mathcal{F}_{-m,n}$. То есть, чтобы получить неприводимое представление, по этим образам нужно профакторизовать. Все это верно для иррациональных значений α_-^2. Для рациональных теорий конструкция значительно сложнее.

В случае теории Лиувилля ($c > 25$) интерес представляют как раз *невырожденные* поля. При этом представление свободными полями отсутствуют, однако соотношение (27) и некоторые другие соотношения дают *функциональные* уравнения на структурные константы, которые можно решить. Ответ был найден А. Замолодчиковым и Ал. Замолодчиковым в 1995 г.

Задачи

1. Найти все структурные константы вида $C_{1.n,12}^{1.n+1}$.
2. Найти все структурные константы вида $C_{\alpha,\alpha_{13}}^{\alpha}$.