Лекция 21
Правила слияния, вырожденные модули и минимальные модели

Вернемся теперь к операторам $\phi_{21}(x)=\phi_{\Delta_{21}\bar\Delta_{21}}(x)$ и $\phi_{12}(x)=\phi_{\Delta_{12}\bar\Delta_{12}}(x)$, о которых уже шла речь в Лекции 19. Мы уже говорили, что наличие нуль-векторов в соответствующих модулях Верма алгебр Вирасоро приводят к дифференциальным уравнениям на корреляционные функции. По переменным z и $\bar z$ порядок этих дифференциальных уравнений равен двум. Рассмотрим операторное произведение $\phi_*(x')\phi_{\Delta\bar\Delta}(x)$, где звездочка означает индекс 12 или 21, при достаточно малом $|z'-z|$. Тогда в дифференциальном уравнении на корреляционную функцию можно пренебречь членами, связанными с остальными полями и написать

$$\left(\frac{3}{2(2\Delta_*+1)}\partial'^2-\frac{1}{z'-z}\partial'-\frac{\Delta}{(z'-z)^2}\right)\langle\phi_*(x')\phi_{\Delta\bar\Delta}(x)\dots\rangle=0. \tag{1}$$

Мы использовали сдвиговую инвариантность корреляционных функций, чтобы заменить $\partial\to-\partial'$. Таким образом, получилось обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Аналогичное уравнение можно написать по $\bar z'$, $\bar z$.

Уравнение (1) легко решить в виде

$$\langle\phi_*(x')\phi(x)\dots\rangle\sim(z'-z)^{\Delta'-\Delta-\Delta_*}(\bar z'-\bar z)^{\bar\Delta'-\bar\Delta-\bar\Delta_*}. \tag{2}$$

Подставляя это решение в уравнение, находим условие на Δ':

$$(\Delta'-\Delta_*-\Delta)^2-\frac{4\Delta_*+5}{3}(\Delta'-\Delta_*-\Delta)-\frac{2\Delta(2\Delta_*+1)}{3}=0.$$

Если записать конформные размерности в обозначениях теории поля Лиувилля

$$\Delta_a=a(Q-a),\qquad Q=b+b^{-1},\qquad c=1+6Q^2, \tag{3}$$

решение этого уравнения записывается очень просто. Прежде всего, размерности вырожденных на втором уровне полей равны

$$\Delta_{12}=\Delta_{-b/2},\qquad \Delta_{21}=\Delta_{-1/2b}. \tag{4}$$

Пусть

$$\Delta_*=\Delta_{a_*}\quad(a_*=-b/2\text{ or }-1/2b),\qquad \Delta=\Delta_a,\qquad \Delta'=\Delta_{a'}.$$

Тогда решения уравнения (1) определяются соотношением

$$a'=a\pm a_*. \tag{5}$$

Аналогично определяется $\bar\Delta'$. Такое простое решение, как мы увидим ниже, не случайно.

Поскольку общее решение уравнения (1) является линейной комбинацией решений (2), мы можем предположить операторное разложение

$$\phi_*(x')\phi_{\Delta\bar\Delta}(x)=\sum_{\Delta',\bar\Delta'}\frac{C^{\Delta'\bar\Delta'}_{\Delta_*\bar\Delta_*,\Delta\bar\Delta}}{(z'-z)^{\Delta+\Delta_*-\Delta'}(\bar z'-\bar z)^{\bar\Delta+\bar\Delta_*-\bar\Delta'}}\Big(\phi_{\Delta'\bar\Delta'}(x)+\cdots\Big). \tag{6}$$

Многоточие обозначает вклад полей-потомков из конформного семейства $[\phi_{\Delta'\bar\Delta'}]$. Формально число слагаемых в правой части равно, по меньшей мере, четырем. Но это будет противоречить локальности теории, так как тогда спины полей $\Delta'-\bar\Delta'$ будут, вообще говоря, не целыми или полуцелыми. Более того, при обходе z' вокруг z по замкнутому контуру в положительном направлении члены с $\Delta'=\bar\Delta'=\Delta_{a\pm a_*}$ не изменятся, в то время как члены с $\Delta'=\Delta_{a\pm a_*}$, $\bar\Delta'=\Delta_{a\mp a_*}$ умножатся на комплексные множители $e^{2\pi\mathrm{i}(\Delta'-\bar\Delta')}$. Поэтому следует наложить дополнительные условия.

Начиная с этого момента мы ограничимся семейством конформных теорий поля, удовлетворяющих двум условиям:

1. Спин всех первичных полей равен нулю: $\Delta_i=\bar\Delta_i$.

2. Для каждой размерности Δ имеется ровно одно первичное поле ϕ_Δ этой размерности (*условие минимальности*).

3. Центральный заряд алгебры Вирасоро $c < 1$ или $c > 25$, что отвечает наличию вырожденных модулей Верма.

Мы будем считать, что при $c > 25$

$$0 < b < 1, \tag{7}$$

а при $c < 1$

$$b = \mathrm{i}\alpha_-, \qquad b^{-1} = \mathrm{i}\alpha_+, \qquad Q = 2\mathrm{i}\alpha_0, \qquad \alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 1}, \tag{8}$$

то есть

$$\alpha_+\alpha_- = -1, \qquad \alpha_+ > 1. \tag{9}$$

Есть много конформных моделей, не удовлетворяющих этим условиям, и притом не менее интересных. Кроме того, многие из моделей, удовлетворяющих этим условиям, могут быть самосогласованно дополнены полями, нарушающими эти условия. Но давайте все-таки для определенности рассматривать именно такие модели.

Будем обозначать поля $\phi_{\Delta\Delta}(x)$ просто как $\phi_\Delta(x)$, а вместо $\phi_{\Delta_a}(x)$ будем писать $\phi_a(x)$. Ограничения 1, 2 приводят к следующему *правилу слияния* полей ϕ_* и ϕ_{Δ_a}:

$$[\phi_{a_*}][\phi_a] = [\phi_{a+a_*}] + [\phi_{a-a_*}]. \tag{10}$$

Эта запись будет символически заменять полное выражение

$$\begin{aligned}\phi_{a_*}(x')\phi_a(x) = {}& \frac{C^{a+a_*}_{a_*,a}}{|z'-z|^{2(\Delta_{a_*}+\Delta_a-\Delta_{a+a_*})}}(\mathcal{L}^{a+a_*}_{a_*,a}(z'-z)\bar{\mathcal{L}}^{a+a_*}_{a_*,a}(\bar z'-\bar z)\phi_{a+a_*})(x)\\ &+ \frac{C^{a-a_*}_{a_*,a}}{|z'-z|^{2(\Delta_{a_*}+\Delta_a-\Delta_{a-a_*})}}(\mathcal{L}^{a-a_*}_{a_*,a}(z'-z)\bar{\mathcal{L}}^{a-a_*}_{a_*,a}(\bar z'-\bar z)\phi_{a-a_*})(x).\end{aligned} \tag{11}$$

Рассмотрим специальный случай $a = 0$. Тогда, очевидно,

$$\phi_{a_*}(x')\cdot 1 = \phi_{a_*}(x') = \mathcal{L}^{a_*}_{a_*,0}(z'-z)\bar{\mathcal{L}}^{a_*}_{a_*,0}(\bar z'-\bar z)\phi_{a_*}(z),$$

так что $C^{a_*}_{a_*,0} = 1$, $C^{a_*}_{-a_*,0} = 0$. Получаются очевидные правила слияния

$$[\phi_{21}][1] = [\phi_{21}], \qquad [\phi_{12}][1] = [\phi_{12}].$$

Рассмотрим теперь произведение

$$\begin{aligned}\phi_{12}(x')\phi_{12}(x) = {}& \frac{C^0_{-b/2,-b/2}}{|z'-z|^{4\Delta_{12}}}\mathcal{L}^1_{-b/2,-b/2}(z'-z)\bar{\mathcal{L}}^1_{-b/2,-b/2}(\bar z'-\bar z)1\\ &+ \frac{C^{-b}_{-b/2,-b/2}}{|z'-z|^{4\Delta_{12}-2\Delta_{-b}}}(\mathcal{L}^{-b}_{-b/2,-b/2}(z'-z)\bar{\mathcal{L}}^{-b}_{-b/2,-b/2}(\bar z'-\bar z)\phi_{-b})(x),\end{aligned} \tag{12}$$

что приводит к правилу слияния

$$[\phi_{-b/2}][\phi_{-b/2}] = [\phi_0] + [\phi_{-b}].$$

Аналогично

$$[\phi_{-1/2b}][\phi_{-1/2b}] = [\phi_0] + [\phi_{-1/b}].$$

Теперь рассмотрим слияние полей ϕ_{-b}, $\phi_{-1/b}$ с общим полем ϕ_a. Легко понять, что

$$[\phi_{-b/2}][\phi_{-b/2}][\phi_a] = [\phi_{-b/2}][\phi_{a+b/2}] + [\phi_{-b/2}][\phi_{a-b/2}] = [\phi_{a+b}] + [\phi_a] + [\phi_{a-b}].$$

В силу ассоциативности алгебры слияний, которое является следствием кроссинг-симметрии, имеем

$$[\phi_{-b}][\phi_a] = [\phi_{a+b}] + [\phi_a] + [\phi_{a-b}], \qquad [\phi_{-1/b}][\phi_a] = [\phi_{a+1/b}] + [\phi_a] + [\phi_{a-1/b}].$$

Так как получается, по всей видимости, три решения, мы можем предположить, что корреляционные функции полей ϕ_{-b}, $\phi_{-1/b}$ удовлетворяют дифференциальному уравнению третьего порядка.

Это так и есть. Модули Верма со старшими весами Δ_{-b}, $\Delta_{-1/b}$ имеют нуль-вектор на уровне 3. Продолжая последовательные слияния с ϕ_{21}, ϕ_{12}, можно получить две серии специальных полей

$$\phi_{m1}(x) = \phi_{\frac{1-m}{2b}}, \qquad \phi_{1n}(x) = \phi_{\frac{1-n}{2}b}$$

с правилами слияния

$$\begin{aligned}
[\phi_{m1}][\phi_a] &= \sum_{k=1}^{m} [\phi_{a+\frac{m+1-2k}{2b}}],\\
[\phi_{1n}][\phi_a] &= \sum_{l=1}^{n} [\phi_{a+\frac{n+1-2l}{2}b}],\\
[\phi_{m'1}(x)][\phi_{m1}(x)] &= \sum_{k=1}^{\min(m,m')} [\phi_{m+m'+1-2k,1}] = [\phi_{|m-m'|+1,1}] + [\phi_{|m-m'|+3,1}] + \dots + [\phi_{m+m'-1,1}],\\
[\phi_{1n'}(x)][\phi_{1n}(x)] &= \sum_{l=1}^{\min(n,n')} [\phi_{1,n+n'+1-2l}] = [\phi_{1,|n-n'|+1}] + [\phi_{1,|n-n'|+3}] + \dots + [\phi_{1,n+n'-1}].
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим произведение $\phi_{21}(x')\phi_{12}(x)$. Два первых правила переписываются в виде

$$[\phi_{21}][\phi_{12}] = [\phi_{-1/2b-b/2}] + [\phi_{1/2b-b/2}], \qquad [\phi_{21}][\phi_{12}] = [\phi_{-1/2b-b/2}] + [\phi_{-1/2b+b/2}],$$

Из соображений совместности получаем

$$[\phi_{21}][\phi_{12}] = [\phi_{-b/2-1/2b}].$$

Поле в правой стороне равенства можно назвать ϕ_{22}. Вообще, положим

$$a_{mn} = \frac{1-m}{2b} + \frac{1-n}{2}b, \qquad \Delta_{mn} = \Delta_{a_{mn}}, \qquad \phi_{mn}(x) = \phi_{a_{mn}}(x). \tag{13}$$

Теорема 1 (В. Кац) *Модуль Верма со старшим весом Δ вырожден тогда и только тогда, когда его размерность равна одной из размерностей Δ_{mn}, $mn > 0$, причем нуль-вектор находится на уровне mn.*

Отсюда немедленно следует, что корреляционная функция $\langle \phi_{mn}(x)\phi_{\Delta_1}(x_1)\dots\phi_{\Delta_N}(x_N)\rangle$ удовлетворяет дифференциальному уравнению порядка mn по ∂_z (и такому же уравнению по $\bar\partial_z$). Если одно из полей $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ имеет вид Δ_{mn}, конформные блоки $\mathcal{F}^{\Delta_1\Delta_2}_{\Delta_4\Delta_3}(\Delta; w)$ (соответственно $\bar{\mathcal{F}}^{\Delta_1\Delta_2}_{\Delta_4\Delta_3}(\Delta; \bar w)$) со всем допустимыми правилами слияния значениями Δ представляют собой все линейно независимые решения этого уравнения.

Напишем теперь общие правила слияния для полей ϕ_{mn} $(m, n > 0)$:

$$\begin{aligned}
[\phi_{mn}][\phi_a] &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} [\phi_{a+\frac{m+1-2k}{2b}+\frac{n+1-2l}{2}b}],\\
[\phi_{m'n'}][\phi_{mn}] &= \sum_{k=1}^{\min(m,m')}\ \sum_{l=1}^{\min(n,n')} [\phi_{m+m'+1-2k,n+n'+1-2l}].
\end{aligned} \tag{14}$$

Мы видим, что сектор вырожденных полей замыкается и может рассматриваться как замкнутая теория поля. В следующей лекции будет описана конструкция, позволяющая получить конформные блоки такой теории и найти структурные константы.

Заметим, что теория поля может быть унитарной, если все ее конформные размерности больше нуля. Действительно, вычислим норму состояния $L_{-1}|\Delta\rangle$. Пусть $\||\Delta\rangle\|^2 = 1$. Тогда

$$\|L_{-1}|\Delta\rangle\|^2 = \langle\Delta|L_1L_{-1}|\Delta\rangle = 2\Delta\langle\Delta|\Delta\rangle = 2\Delta.$$

Если какая-нибудь размерность отрицательна, то и квадрат нормы этого вектора отрицателен, то есть представление алгебры Вирасоро не унитарно. Можно показать, что положительность старшего веса Δ является необходимым и достаточным условием унитарности представления.

Для общих значений a кажется непростым делом добиться унитарности. Тем не мене, теория Лиувилля с $c > 25$ является унитарной. В этой теории, кроме единичного оператора, физическими первичными полями являются экспоненты $e^{a\varphi(x)}$ со значениями a равными

$$a = \frac{Q}{2} + \mathrm{i}P, \qquad P \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Размерности таких полей $\Delta(P) = Q^2/4 + P^2 \geq Q^2 > 0$. При этом P имеет смысл импульса «частицы», налетающей на потенциальный барьер $e^{b\varphi}$. Теория Лиувилля, таким образом, вообще не содержит вырожденных семейств полей, кроме семейства единичного оператора.

В случае $c < 1$ невозможно как раз добиться унитарности представлений, отвечающих невырожденным полям. Среди вырожденных семейств, вообще говоря, тоже имеются неунитарные. Действительно, конформные размерности

$$\Delta_{mn} = a_{mn}(Q - a_{mn}) = \alpha_{mn}(\alpha_{mn} - 2\alpha_0), \qquad \alpha_{mn} = \frac{1-m}{2}\alpha_+ + \frac{1-n}{2}\alpha_-,$$

отрицательны, если они попадают в полосу $0 < \alpha_{mn} < 2\alpha_0 = \alpha_+ + \alpha_-$. Это значит, что отрицательным конформным размерностям отвечает полоса, ограниченная условиями

$$n - 1 > \alpha_+^2(m-1), \qquad n + 1 < \alpha_+^2(m+1),$$

причем $\alpha_-^2 > 1$. Это наклонная полоса зажатая между двух параллельных линий наклона α_+^2, проходящих через точки $(1,1)$ и $(-1,-1)$. При иррациональных α_+^2 в силу теоремы об эргодичности иррациональной намотки тора в эту полосу обязательно попадет бесконечно много целых положительных точек (m,n). Поэтому в качестве кандидатов на унитарную теорию следует рассмотреть теории с рациональными значениями α_+^2.

Мы уже говорили, что модуль Верма со старшим весом Δ_{mn} имеет нуль-вектор на уровне mn. А не может ли он иметь еще один нуль-вектор? По теореме Каца должны существовать два других положительных числа $\tilde{m}$, $\tilde{n}$, такие что

$$\Delta_{mn} = \Delta_{\tilde{m}\tilde{n}},$$

то есть

$$a_{mn}(Q - a_{mn}) = a_{\tilde{m}\tilde{n}}(Q - a_{\tilde{m}\tilde{n}}).$$

Очевидно, единственная возможность состоит в том, что

$$a_{mn} = Q - a_{\tilde{m}\tilde{n}},$$

то есть

$$(m + \tilde{m})b^{-1} + (n + \tilde{n})b = 0.$$

Очевидно, это уравнение имеет решение только когда $b = \mathrm{i}\alpha_-$ мнимое ($c < 1$) и $b^2 = -\alpha_-^2$ — рациональное число. Пусть

$$\alpha_-^2 = \frac{p}{q}, \qquad p > q > 0 \text{ — взаимно-простые числа,} \tag{16}$$

что соответствует центральному заряду алгебры Вирасоро

$$c = 1 - \frac{6(q-p)^2}{pq}. \tag{17}$$

Очевидно, что тогда $pb^{-1} + qb = 0$ и

$$\tilde{m} = p - m, \qquad \tilde{n} = q - n. \tag{18}$$

Исходя из нашего условия 2, потребуем, чтобы

$$\phi_{mn}(x) = \phi_{p-m,q-n}. \tag{19}$$

Это очень важное условие. Оно накладывает на правила слияния серьезные ограничения. Именно,

$$
\begin{gathered}
[\phi_{mn}] = \sum_{m''n''} [\phi_{m''n''}], \qquad \frac{m+m'-m''}{2} \in \mathbb{Z}, \qquad \frac{n+n'-n''}{2} \in \mathbb{Z}, \\
\max(|m-m'|+1,\, m+m'-p+1) \le m \le \min(m+m'-1,\, p-|m-m'|-1), \\
\max(|n-n'|+1,\, n+n'-q+1) \le n \le \min(n+n'-1,\, q-|n-n'|-1).
\end{gathered} \tag{20}
$$

Таким образом, теория замыкается на конечном числе первичных полей (*таблице Каца*):

$$
\phi_{mn}(x), \qquad 1 \le m \le p-1, \qquad 1 \le n \le q-1. \tag{21}
$$

Размерности этих полей можно записать так:

$$
\Delta_{mn} = \frac{(qm-pn)^2-(q-p)^2}{4pq}. \tag{22}
$$

Такие конформные теории поля называют *минимальными рациональными* теориями.

Все размерности минимальной рациональной теории поля положительны тогда и только тогда, когда

$$
q = p+1. \tag{23}
$$

Такие теории называют *унитарными минимальными* моделями.

Рассмотрим простейший пример унитарной минимальной рациональной модели: $p=3$, $q=4$, что соответствует

$$
c = 1/2.
$$

В теории имеется три первичных поля с размерностями

$$
1 : \Delta_{11} = \Delta_{23} = 0, \qquad \epsilon : \Delta_{21} = \Delta_{13} = \frac{1}{2}, \qquad \sigma : \Delta_{12} = \Delta_{22} = \frac{1}{16}
$$

и правилами слияния

$$
[\epsilon][\epsilon] = [1], \qquad [\epsilon][\sigma] = [\sigma], \qquad [\sigma][\sigma] = [1]+[\epsilon].
$$

Операторные разложения можно написать как

$$
\begin{aligned}
\epsilon(x')\epsilon(x) &= \frac{1}{|z'-z|^2} + \cdots\,, \\
\epsilon(x')\sigma(x) &= \frac{C^{\sigma}_{\epsilon\sigma}\sigma(x)}{|z'-z|} + \cdots\,, \\
\sigma(x')\sigma(x) &= \frac{1}{|z'-z|^{1/4}} + C^{\epsilon}_{\sigma\sigma}\epsilon(x)|z'-z|^{3/4} + \cdots\,,
\end{aligned}
$$

где точки обозначают вклад потомков. Мы нормировали операторы ϵ и σ так, чтобы коэффициенты в парных корреляционных функциях равнялись единице:

$$
\langle\epsilon(x')\epsilon(x)\rangle = \frac{1}{|z'-z|^2}, \qquad \langle\sigma(x')\sigma(x)\rangle = \frac{1}{|z'-z|^{1/4}}.
$$

Чтобы найти структурные константы $C^{\sigma}_{\epsilon\sigma}$ и $C^{\epsilon}_{\sigma\sigma}$, необходимо решить дифференциальные уравнения для корреляционных функций. Прежде всего, заметим, что

$$
C^{\sigma}_{\epsilon\sigma} = C_{\sigma\epsilon\sigma} = C_{\epsilon\sigma\sigma} = C^{\epsilon}_{\sigma\sigma}
$$

в силу того, что мы положили $C^{\mathbf{1}}_{\sigma\sigma} = C^{\mathbf{1}}_{\epsilon\epsilon} = 1$. Поэтому достаточно вычислить только одну структурную константу. Рассмотрим корреляционную функцию

$$
G(w,\bar w) = \langle\sigma(\infty,\infty)\sigma(1,1)\sigma(w,\bar w)\sigma(0,0)\rangle = \mathcal{F}^{\sigma\sigma}_{\sigma\sigma}(\mathbf{1};w)\bar{\mathcal{F}}^{\sigma\sigma}_{\sigma\sigma}(\mathbf{1};\bar w) + (C^{\epsilon}_{\sigma\sigma})^2\mathcal{F}^{\sigma\sigma}_{\sigma\sigma}(\epsilon;w)\bar{\mathcal{F}}^{\sigma\sigma}_{\sigma\sigma}(\epsilon;\bar w)
$$

В окончательном ответе можно будет заменить произведения $\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}$ на $|\mathcal{F}|^2$, но я здесь хочу подчеркнуть, что пока мы рассматриваем w и $\bar w$ как независимые переменные. В дальнейшем для простоты мы будем писать

$$
\mathcal{F}_{\mathbf{1}}(w) = \mathcal{F}^{\sigma\sigma}_{\sigma\sigma}(\mathbf{1};w), \qquad \mathcal{F}_{\epsilon}(w) = \mathcal{F}^{\sigma\sigma}_{\sigma\sigma}(\epsilon;w).
$$

В силу размерности $1/16$ поля σ корреляционная функция $G(w,\bar{w})$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{4}{3}\frac{d^2}{dw^2}-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{w^2}+\frac{1}{(1-w)^2}\right)-\frac{1}{8w(1-w)}+\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{1-w}\right)\frac{d}{dw}\right)G(w,\bar{w})=0.$$

Следовательно, и конформные блоки должны удовлетворять этому уравнению:

$$\left(\frac{4}{3}\frac{d^2}{dw^2}-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{w^2}+\frac{1}{(1-w)^2}\right)-\frac{1}{8w(1-w)}+\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{1-w}\right)\frac{d}{dw}\right)\mathcal{F}_i(w)=0.$$

Это уравнение можно упростить подстановкой

$$\mathcal{F}_i(w)=w^{-1/8}(1-w)^{-1/8}u_i(w).$$

Получаем

$$\left(w(1-w)\frac{d^2}{dw^2}+\left(\frac{1}{2}-w\right)\frac{d}{dw}+\frac{1}{16}\right)u(w)=0.$$

Это гипергеометрическое уравнение, однако его можно решить, не вдаваясь в теорию гипергеометрических функций. Для этого воспользуемся подстановкой

$$w=\sin^2\theta.$$

Тогда уравнение сведется к виду

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+\frac{1}{4}\right)u(w)=0.$$

Это уравнение имеет два решения

$$u_1(w)=\cos\frac{\theta}{2},\qquad u_2(w)=\sin\frac{\theta}{2}.$$

В пределе $\theta\to 0$ имеем $\theta\simeq 2w^{1/2}$, поэтому

$$\mathcal{F}_1(w)\simeq w^{-1/8},\qquad \mathcal{F}_2(w)\simeq w^{3/8}.$$

При обходи w вокруг точки 0 параметр θ меняется на $-\theta$, так что

$$\mathcal{F}_1(e^{2\pi\mathrm{i}}w)=e^{-\mathrm{i}\pi/4}\mathcal{F}_1(w),\qquad \mathcal{F}_2(e^{2\pi\mathrm{i}}w)=e^{3\mathrm{i}\pi/4}\mathcal{F}_2(w). \tag{24}$$

Вид особенности и свойство монодромии заставляют нас отождествить решения $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ с конформными блоками

$$\mathcal{F}_1(w)=\mathcal{F}_{\mathbf{1}}(w),\qquad \mathcal{F}_2(w)=\mathcal{F}_\epsilon(w).$$

Мы получаем

$$G(w,\bar{w})=(w\bar{w}(1-w)(1-\bar{w}))^{-1/8}\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\bar\theta}{2}+(C^\epsilon_{\sigma\sigma})^2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\bar\theta}{2}\right). \tag{25}$$

Из свойства (24) мы немедленно получаем, что функция $G(w,\bar{w})$ не меняется на эвклидовой плоскости ($\bar{w}=w^*$) при обходе w вокруг нуля. Для однозначности корреляционной функции требуется еще проверить, что она не меняется при обходе w вокруг единицы. Так как $1-w=\cos^2\theta=\sin^2(\frac{\pi}{2}-\theta)$, обходу вокруг единицы отвечает замена $\theta\to\pi-\theta$:

$$G(1+e^{2\pi\mathrm{i}}(w-1),1+e^{2\pi\mathrm{i}}(\bar{w}-1))=(w\bar{w}(1-w)(1-\bar{w}))^{-1/8}\left(\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\bar\theta}{2}+(C^\epsilon_{\sigma\sigma})^2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\bar\theta}{2}\right).$$

Сравнивая с (25), получаем

$$(C^\epsilon_{\sigma\sigma})^2=1.$$

Поскольку знак поля $\epsilon(x)$ у нас ничем не фиксирован, мы можем с полным основанием положить

$$C^\epsilon_{\sigma\sigma}=C^\sigma_{\epsilon\sigma}=1. \tag{26}$$

Теория $c = 1/2$ замечательна еще и тем, что к ней можно добавить два полулокальных поля $\psi(z) = \phi_{1/2,0}(x)$ и $\bar\psi(\bar z) = \phi_{0,1/2}(x)$ со спинами $1/2$ и $-1/2$ соответственно. Добавляя такие поля, мы нарушаем условие 1. Тем не менее, мы сейчас получим важный результат. В силу дифференциального уравнения (1), верного и для $\psi(z)$ в киральном секторе, мы имеем операторные разложения:

$$\psi(z')\bar\psi(\bar z) = C^{\epsilon}_{\psi\bar\psi}\epsilon(x) + \cdots,$$

$$\psi(z')\psi(z) = \frac{1}{z'-z} + \cdots, \qquad \bar\psi(\bar z')\psi(\bar z) = \frac{1}{\bar z'-\bar z} + \cdots,$$

$$\psi(z')\epsilon(x) = \frac{C^{\bar\psi}_{\psi\epsilon}\bar\psi(\bar z)}{z'-z} + \cdots, \qquad \bar\psi(\bar z')\epsilon(x) = \frac{C^{\psi}_{\bar\psi\epsilon}\psi(z)}{\bar z'-\bar z} + \cdots,$$

$$\psi(z')\sigma(x) = \frac{C^{\mu}_{\psi\sigma}\mu(x)}{(z'-z)^{1/2}} + \cdots, \qquad \bar\psi(\bar z')\sigma(x) = \frac{C^{\mu}_{\bar\psi\sigma}\mu(x)}{(\bar z'-\bar z)^{1/2}} + \cdots,$$

где $\mu(x)$ — новое поле размерности $\Delta = \bar\Delta = \frac{1}{16}$, не взаимно-локальное с $\sigma(x)$. Если мы положим $C^{\epsilon}_{\psi\bar\psi} = 1$, то пределом $x' \to x$ получаем

$$\epsilon(x) = \psi(z)\bar\psi(\bar z). \tag{27}$$

Отсюда немедленно следует, что $C^{\bar\psi}_{\psi\epsilon} = C^{\psi}_{\bar\psi\epsilon} = 1$. Легко также получить соотношения

$$\psi(z')\mu(x) = \frac{C^{\sigma}_{\psi\mu}\sigma(x)}{(z'-z)^{1/2}} + \cdots, \qquad \bar\psi(\bar z')\mu(x) = \frac{C^{\sigma}_{\bar\psi\mu}\sigma(x)}{(\bar z'-\bar z)^{1/2}} + \cdots.$$

$$\sigma(x')\mu(x) = C^{\psi}_{\sigma\mu}\psi(z)\frac{(z'-z)^{3/8}}{(\bar z'-\bar z)^{1/8}} + C^{\bar\psi}_{\sigma\mu}\bar\psi(\bar z)\frac{(\bar z'-\bar z)^{3/8}}{(z'-z)^{1/8}} + \cdots.$$

Можно вычислить корреляционную функцию

$$\tilde G(w,\bar w) = \langle\sigma(\infty,\infty)\mu(1,1)\sigma(w,\bar w)\mu(1,1)\rangle. \tag{28}$$

Она удовлетворяет тем же дифференциальным уравнением, так что выражается через те же конформные блоки, но по-другому:

$$\tilde G(w,\bar w) = \mathcal{F}_{\mathbf{1}}(w)\bar{\mathcal{F}}_{\epsilon}(\bar w) + \mathcal{F}_{\epsilon}(w)\bar{\mathcal{F}}_{\mathbf{1}}(\bar w).$$

Отсюда следует, что

$$C^{\psi}_{\sigma\mu} = C^{\bar\psi}_{\sigma\mu} = C^{\mu}_{\psi\sigma} = C^{\mu}_{\bar\psi\sigma} = C^{\sigma}_{\psi\mu} = C^{\sigma}_{\bar\psi\mu} = 1. \tag{29}$$

В полях $\psi(z)$, $\bar\psi(\bar z)$ нетрудно узнать компоненты свободного майорановского фермиона с действием

$$S[\psi] = \frac{1}{4\pi}\int d^2x\,(\psi\bar\partial\psi - \bar\psi\partial\bar\psi).$$

Из правил преобразования полей при монодромии (обходе одного поля вокруг другого) нетрудно заключить, что $\sigma(x)$ и $\mu(x)$ представляют собой параметр порядка и беспорядка теории (или наоборот, что в критической точке неважно). Поле $\epsilon(x)$ представляет собой плотность энергии. Таким образом, теория $c = 1/2$ описывает модель Изинга в критической точке.

Заметим, что вне критической точки модель Изинга описывается действием

$$S_{\text{Ising}} = S^{\text{CFT}}_{c=1/2} + \tau\int d^2x\,\epsilon(x) + h\int d^2x\,\sigma(x), \tag{30}$$

где τ пропорционально $T - T_c$, а h — внешнему магнитному полю.

Остальные рациональные минимальные модели соответствуют более сложным критическим точкам и не описываются теориями свободных полей.

Результаты, описанные в последних трех лекциях, принадлежат Белавину, Полякову и А. Замолодчикову (1983).

Задачи

1. Разложите конформные блоки $\mathcal{F}_i(w)$ в теории $c = 1/2$ по $\mathcal{F}_i(1-w)$ и покажите, что уравнения ассоциативности приводят к тому же решению для структурной константы.

2. Покажите, что корреляционная функция $\tilde G(w,\bar w)$, определенная (28), монодромно-инвариантна, то есть не меняется при обходе w вокруг точек 0 и 1 при условии $\bar w = w^*$.