Лекция 12
$O(3)$-модель: генерация массы инстантонами

Рассмотрим $O(3)$-модель:

$$S[\boldsymbol{n}] = \frac{1}{2g}\int d^2x\,(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2, \qquad n_1^2+n_2^2+n_3^2=1. \tag{1}$$

Найдем решения классических уравнений движения в евклидовом пространстве, такие что действие на этих решениях конечно. В квантовой механике эти решения должны отвечать туннельным процессам, амплитуда которых будет порядка e^{-S}, где S — значение действия для такого решения.

Из конечности действия следует, что решение должно стремиться к константе на бесконечности:

$$\boldsymbol{n}_0(x) \underset{x\to\infty}{\to} \boldsymbol{n}_0. \tag{2}$$

Таким образом, бесконечность можно рассматривать как точку на двумерной сфере S^2. Непрерывная функция $\boldsymbol{n}(x)$, удовлетворяющая условию (2), осуществляет непрерывное отображение

$$\boldsymbol{n} : S^2 \to S^2. \tag{3}$$

Такие отображения классифицируются *топологическим числом* q, таким что $\boldsymbol{n}$ осуществляет $|q|$-листное накрытие сферы сферой. Если $q>0$, отображение сохраняет ориентацию, а если $q<0$, меняет ее. Представителем класса q может быть, например, отображение:

$$\theta' = \theta, \qquad \varphi' = q\varphi, \tag{4}$$

где (θ,φ) — полярные координаты на сфере.

Выразим топологическое число через поле $\boldsymbol{n}$. Очевидно,

$$q = \frac{1}{S}\int d^2x \frac{\partial(x')}{\partial(x)},$$

где (x^1,x^2) и (x'^1,x'^2) — положительно ориентированные глобальные координаты на сфере, а S — площадь сферы в координатах (x'^1,x'^2). В сферических координатах

$$q = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\, \frac{\partial(\varphi',\theta')}{\partial(\varphi,\theta)}\sin\theta' = \frac{1}{4\pi}\int d^2x\, \frac{\partial(\varphi',\theta')}{\partial(x^1,x^2)}\sin\theta'.$$

Чтобы найти якобиан $\partial(\varphi',\theta')/\partial(x^1,x^2) = (\partial\varphi'/\partial x^1)(\partial\theta'/\partial x^2) - (\partial\varphi'/\partial x^2)(\partial\theta'/\partial x^1)$, перепишем сферические переменные через $\boldsymbol{n}$ и x. Положим

$$\boldsymbol{n} = (\sin\theta'\cos\varphi', \sin\theta'\sin\varphi', \cos\theta'). \tag{5}$$

Можно проверить прямым вычислением, что

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{n}\,(\partial_\mu\boldsymbol{n}\times\partial_\nu\boldsymbol{n})\epsilon^{\mu\nu} = \frac{\partial(\varphi',\theta')}{\partial(x^1,x^2)}\sin\theta'. \tag{6}$$

Отсюда получаем

$$q = \frac{1}{8\pi}\int d^2x\,\boldsymbol{n}\,(\partial_\mu\boldsymbol{n}\times\partial_\nu\boldsymbol{n})\epsilon^{\mu\nu}. \tag{7}$$

Моно вывести (7) еще проще. Вектор $\partial_1\boldsymbol{n}\,dx^1$ представляет собой маленький вектор перемещения на сфере, отвечающий перемещению на $(dx^1,0)$ в x-пространстве. Аналогично $\partial_2\boldsymbol{n}\,dx^2$ представляет собой вектор пенемещения на сфере, отвечающий перемещению на $(0,dx^2)$. Оба вектора перпендикулярны вектору $\boldsymbol{n}$. Тогда $|\partial_1\boldsymbol{n}\times\partial_2\boldsymbol{n}\,dx^1\,dx^2| = \pm\boldsymbol{n}\,(\partial_1\boldsymbol{n}\times\partial_2\boldsymbol{n})\,d^2x$ есть площадь маленького параллелограмма на сфере. Знак «$+$» отвечает отображению, сохраняющему ориентацию, а знак «$-$» — отображению, меняющему ориентацию. Следовательно,

$$\int d^2x\,\boldsymbol{n}\,(\partial_1\boldsymbol{n}\times\partial_2\boldsymbol{n}) = \frac{1}{2}\int d^2x\,\boldsymbol{n}\,(\partial_\mu\boldsymbol{n}\times\partial_\nu\boldsymbol{n})\epsilon^{\mu\nu}$$

равно площади на сфере, заметаемой при интегрировании по всему x-пространству, равной $4\pi q$.

Из тождества

$$\int d^2x\,(\partial_\mu \boldsymbol{n} + \epsilon_{\mu\nu}\boldsymbol{n}\times\partial^\nu \boldsymbol{n})^2 = 2\int d^2x\,(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 - 2\int d^2x\,\boldsymbol{n}\,(\partial_\mu \boldsymbol{n}\times\partial_\nu \boldsymbol{n})\epsilon^{\mu\nu} \tag{8}$$

получаем

$$S[\boldsymbol{n}] = \frac{4\pi q}{g} + \frac{1}{4g}\int d^2x\,(\partial_\mu \boldsymbol{n} + \epsilon_{\mu\nu}\boldsymbol{n}\times\partial^\nu \boldsymbol{n})^2. \tag{9}$$

Заменой $\boldsymbol{n}\to-\boldsymbol{n}$, $q\to-q$ получим

$$S[\boldsymbol{n}] = -\frac{4\pi q}{g} + \frac{1}{4g}\int d^2x\,(\partial_\mu \boldsymbol{n} - \epsilon_{\mu\nu}\boldsymbol{n}\times\partial^\nu \boldsymbol{n})^2. \tag{10}$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$S[\boldsymbol{n}] \ge \frac{4\pi|q|}{g}. \tag{11}$$

Неравенство (11) превращается в равенство на решениях уравнения первого порядка (*уравнения самодуальности*)

$$\partial_\mu \boldsymbol{n} = -\epsilon_{\mu\nu}\boldsymbol{n}\times\partial^\nu \boldsymbol{n} \qquad (q>0), \tag{12}$$

$$\partial_\mu \boldsymbol{n} = \epsilon_{\mu\nu}\boldsymbol{n}\times\partial^\nu \boldsymbol{n} \qquad (q<0). \tag{13}$$

Решения этих уравнений минимизируют действие, поэтому составляют подкласс решений уравнений движения. Чтобы их явно решить, используем стереографическую проекцию на плоскость. При этом удобно использовать комплексную координату w на этой плоскости:

$$n_1 + in_2 = \frac{2w}{1+|w|^2}, \qquad n_3 = \frac{1-|w|^2}{1+|w|^2}. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (12), (13), получим

$$\bar\partial w = 0 \qquad (q>0), \tag{15}$$

$$\partial w = 0 \qquad (q<0). \tag{16}$$

Рассмотрим случай $q>0$. Функция $w(z)$ должна быть мероморфной функцией на сфере, то есть единственными особенностями этой функции, включая особенность в бесконечности, могут быть только полюса. Количество нулей и полюсов такой функции должно быть конечно. Нулям отвечает точка $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$, а полюсам $\boldsymbol{n}=(0,0,-1)$. Самое общее такое решение (15) имеет вид

$$w(q,\vec a,\vec b,c;z) = c\prod_{j=1}^{q}\frac{z-a_j}{z-b_j}, \tag{17}$$

где $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $a_j,b_j\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Легко найти топологическое число, соответствующее этому решению. Пусть $w_0\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Тогда число решений уравнения $w(z)=w_0$ с учетом кратностей не зависит от w_0. Положим w_0 равным, например, бесконечности. Тогда очевидно, что число решений этого уравнения равно q. Это значит, что $w(z)$ осуществляет q-листное накрытие и топологическое число равно q.

Аналогично, в случае топологического числа $q<0$ получаем:

$$w(q,\vec a,\vec b,c;\bar z) = c\prod_{j=1}^{-q}\frac{\bar z-a_j}{\bar z-b_j}, \tag{18}$$

Решения (17) и (18) называются *(много)инстантонными решениями.*

Попробуем использовать инстантонные решения, чтобы приближенно вычислить функциональный интеграл для квантовой $O(3)$-модели. Мы будем интегрировать по многоинстантонным решениям и малым флуктуациям вблизи них.

Перепишем (9) и (10) через поле $w(z,\bar z)$:

$$S[w,\bar w] = \frac{4\pi q}{g} + \frac{8}{g}\int d^2x\,\frac{\bar\partial w\partial\bar w}{(1+|w|^2)^2} \tag{19}$$

$$= -\frac{4\pi q}{g} + \frac{8}{g}\int d^2x\,\frac{\partial w\bar\partial\bar w}{(1+|w|^2)^2}. \tag{20}$$

Рассмотрим случай $q\ge 0$. Пусть

$$S_q[\varphi,\bar\varphi] = S[w(q,\vec a,\vec b,c;z)(1+\varphi(z,\bar z)), w^*(q,\vec a,\vec b,c;z)(1+\bar\varphi(z,\bar z))]. \tag{21}$$

Легко видеть, что

$$S_q[\varphi,\bar\varphi] = \frac{4\pi q}{g} + \frac{8}{g}\int d^2x\,\frac{|w|^2}{(1+|w|^2)^2}\bar\partial\varphi\partial\bar\varphi. \tag{22}$$

Соответственно, q-инстантонный вклад в статсумму имеет вид

$$Z_q = \frac{e^{-4\pi q/g}}{(q!)^2}\int d\mu(\vec a,\vec b)\,Z[w(q,\vec a,\vec b,c;z)], \qquad Z[w] = \int D\varphi\,D\bar\varphi\,\exp\left(-\frac{8}{g}\int d^2x\,\frac{|w|^2}{(1+|w|^2)^2}\bar\partial\varphi\partial\bar\varphi\right). \tag{23}$$

Здесь $\mu(\vec a,\vec b)$ — мера интегрирования по $\vec a$ и $\vec b$, инвариантная относительно сдвигов, растяжений и инверсии. Такую меру легко найти:

$$\mu(\vec a,\vec b) = \prod_{j=1}^q d^2a_j\,d^2b_j\prod_{i<j}|a_i-a_j|^4|b_i-b_j|^4\prod_{i,j}|a_i-b_j|^{-4}. \tag{24}$$

Константу c можно считать фиксированной, например, положить $c=1$.

Легко видеть, что интеграл $Z[w]$ не зависит от константы связи g. Из-за вклада ультрафиолетового и инфракрасного обрезания этот интеграл не будет буквально инвариантен относительно конформных преобразований параметров a_j, b_j. Он будет преобразовываться по правилу:

$$Z[w]\to Z[w']\prod_{j=1}^q\left|\frac{da'_j}{da_j}\right|^{2\alpha}\left|\frac{db'_j}{db_j}\right|^{2\alpha}$$

с некоторым α. Отсюда следует, что

$$Z[w]\sim\prod_{i<j}|a_i-a_j|^{-4\alpha}|b_i-b_j|^{-4\alpha}\prod_{i\ne j}|a_i-b_j|^{4\alpha}.$$

Некоторыми достаточно сложными вычислениями можно показать, что $\alpha=1/2$. Если поверить в это, то получится

$$Z_q\sim\frac{\lambda^q}{(q!)^2}\int\prod_{j=1}^q d^2a_j\,d^2b_j\prod_{i<j}|a_i-a_j|^2|b_i-b_j|^2\prod_{i,j}|a_i-b_j|^{-2}, \tag{25}$$

где $\lambda\sim e^{-4\pi/g}$.

Легко проверить, что это плазма, описываемая моделью синус-Гордона с $\beta^2=1$ или моделью Тирринга с $g=0$, то есть свободным массивным фермионом. Это значит, что инстантоны в модели генерируют массу.

Дефект приведенных рассуждений состоит в том, что мы учитывали только инстантонные решения. Мы можем, конечно, учесть и антиинстантонные решения. Однако реалистичное описание модели может быть только при использовании флуктуаций вблизи функций, содержащих как инстантоны, так и антиинстантоны. К сожалению, такое описание пока отсутствует.

Имеется одно важное следствие существования топологического числа (7). Дело в том, что действие $O(3)$-модели можно модифицировать:

$$S_\theta(\boldsymbol n) = S(\boldsymbol n) + i\theta q = \frac{1}{2g}\int d^2x\,(\partial_\mu\boldsymbol n)^2 + i\frac{\theta}{8\pi}\int d^2x\,\boldsymbol n(\partial_\mu\boldsymbol n\times\partial_\nu\boldsymbol n)\epsilon^{\mu\nu}. \tag{26}$$

Последний член называют *θ-членом.* Физические свойства модели существенно зависят от θ, так как статсумма (и производящий функционал) записываются в виде

$$Z = \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{i\theta q} Z_q.$$

В частности, известно, что при $\theta = \pi$ $O(3)$-модель безмассова, но не масштабно-инвариантна.

Задачи

1. С помощью подстановки (5) получите (6).
2. Выведите тождество (8).
3. Получите (15), (16) из (12), (13).