**Лекция 10**
**Бозонизация модели Тирринга**

Рассмотрим *массивную модель Тирринга* в пространстве Минковского:

$$S^{MT}[\psi,\bar\psi]=\int d^2x\,\left(\bar\psi(i\hat\partial-m)\psi-\frac{g}{2}(\bar\psi\gamma^\mu\psi)^2\right). \tag{1}$$

Здесь $\psi(x)$, $\bar\psi(x)$ — фермионное поле и дираковски сопряженное ему поле, $\gamma^\mu$ — матрицы Дирака, а $\hat\partial=\gamma^\mu\partial_\mu$. Матрицы Дирака удовлетворяют стандартным соотношениям

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu},\qquad \gamma^{\mu+}=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0.$$

В двумерном случае гамма-матрицы можно записать в виде:

$$\gamma^0=\begin{pmatrix} & i\\ -i & \end{pmatrix},\qquad \gamma^1=\begin{pmatrix} & i\\ i & \end{pmatrix},\qquad \gamma^3=\gamma^0\gamma^1=\begin{pmatrix}-1 & \\ & 1\end{pmatrix}. \tag{2}$$

В модели имеется сохраняющийся ток

$$j^\mu=\bar\psi\gamma^\mu\psi. \tag{3}$$

В случае $m=0$ имеется еще один сохраняющийся ток

$$j_3^\mu=\bar\psi\gamma^3\gamma^\mu\psi=\epsilon^{\mu\nu}j_\nu. \tag{4}$$

В прошлый раз мы рассматривали модель синус-Гордона. В пространстве Минковского ее действие выглядит так:

$$S^{SG}[\phi]=\int d^2x\,\left(\frac{(\partial_\mu\phi)^2}{8\pi}+\lambda\cos\beta\phi\right). \tag{5}$$

В модели имеется топологическое число

$$q=\frac{\beta}{2\pi}(\phi(t,+\infty)-\phi(t,-\infty)), \tag{6}$$

принимающее целые значения. Его можно записать в виде

$$q=\frac{\beta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\partial_1\phi(t,x). \tag{7}$$

Это позволяет найти ток, ответственный за топологический заряд:

$$j^\mu_{\rm top}=\frac{\beta}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\phi. \tag{8}$$

В этой лекции мы убедимся, что массивная модель Тирринга и модель синус-Гордона эквивалентны [2,3], причем параметры связаны соотношениями

$$g=\pi(\beta^{-2}-1), \tag{9}$$

$$\lambda\sim mr_0^{\beta^2-1}, \tag{10}$$

а тирринговский ток совпадает с топологическим:

$$j^\mu=j^\mu_{\rm top}. \tag{11}$$

Это исключительно важное соответствие, называемое *бозонизацией*. Уравнение (11) играет ключевую роль в бозонизации.

Перепишем действие модели Тирринга, используя явный вид гамма-матриц:

$$S^{MT}[\psi,\bar\psi]=\int d^2x(i\bar\psi_1(\partial_0-\partial_1)\psi_1+i\bar\psi_2(\partial_0+\partial_1)\psi_2+im(\bar\psi_2\psi_1-\bar\psi_1\psi_2)-2g\bar\psi_1\bar\psi_2\psi_2\psi_1).$$

Подставляя $z = x^1 + x^0$, $\bar{z} = x^1 - x^0$, получаем

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x(-2i\bar{\psi}_1\bar{\partial}\psi_1 + 2i\bar{\psi}_2\partial\psi_2 + im(\bar{\psi}_2\psi_1 - \bar{\psi}_1\psi_2) - 2g\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\psi_2\psi_1).$$

В этих компонентах тирринговский ток имеет вид:

$$j^z = 2\bar{\psi}_2\psi_2, \qquad j^{\bar{z}} = -2\bar{\psi}_1\psi_1.$$

Рассмотрим случай $m = 0$, который допускает точное решение [1]. Начнем с решения классических уравнений движения

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\psi_1 &= ig\bar{\psi}_2\psi_2\psi_1, \\ \partial\psi_2 &= -ig\bar{\psi}_1\psi_1\psi_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Из сохранения $j_3^\mu = \epsilon^{\mu\nu} j_\nu$ следует, что ток $j^\mu$ можно представить в виде

$$j^\mu = -\frac{\beta}{2\pi}\partial^\mu\tilde{\phi}. \tag{13}$$

Здесь $\tilde{\phi}$ и $\phi$ связаны между собой, как это описано в предыдущей лекции, и удовлетворяют уравнениям движения

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi = \partial_\mu\partial^\mu\tilde{\phi} = 0.$$

Общее решение этих уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z}), \\ \tilde{\phi}(x) &= \varphi(z) - \bar{\varphi}(\bar{z}), \end{aligned} \tag{14}$$

где $\varphi(z)$ и $\bar{\varphi}(\bar{z})$ — произвольные функции только $z$ и $\bar{z}$ соответственно. Коэффициент в (13) устанавливается из предположения (11).

Мы видим, что безмассовая модель эквивалентна свободному безмассовому бозону. Из (11) и (13) имеем

$$\frac{\beta}{2\pi}\partial\varphi = -\bar{\psi}_1\psi_1, \qquad \frac{\beta}{2\pi}\bar{\partial}\bar{\varphi} = -\bar{\psi}_2\psi_2. \tag{15}$$

Дальнейшее решение этих уравнений вместе с (12) в классическом случае неоднозначно. Проще обстоит дело как раз в квантовом случае. Давайте искать решение уравнений (15) в виде

$$\psi_i(x) = \eta_i\sqrt{\frac{N_i}{2\pi}}e^{i\alpha_i\varphi(z) + i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z})}, \qquad \bar{\psi}_i(x) = \eta_i\sqrt{\frac{N_i}{2\pi}}e^{-i\alpha_i\varphi(z) - i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z})}, \tag{16}$$

где $\eta_i$ — алгебраические множители, необходимые, чтобы обеспечить фермионное поведение полей $\psi_i$. Оказывается, что решения можно найти, если положить

$$\eta_1^2 = \eta_2^2 = i, \qquad \eta_1\eta_2 = -\eta_2\eta_1. \tag{17}$$

Прежде всего, потребуем, чтобы поля $\psi_i(x)$ вели себя как фермионы. Поскольку[1]

$$\psi_i(x')\psi_j(x) = \eta_i\eta_j\frac{\sqrt{N_iN_j}}{2\pi}(z' - z)^{\alpha_i\alpha_j}(\bar{z}' - \bar{z})^{\beta_i\beta_j}e^{i\alpha_i\varphi(z') + i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z}') + i\alpha_j\varphi(z) + i\beta_j\bar{\varphi}(\bar{z})}, \tag{18}$$

причем это выражение хорошо продолжается в евклидову область, легко получить, что

$$\alpha_i^2 - \beta_i^2 \in 2\mathbb{Z} + 1, \qquad \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 \in 2\mathbb{Z}. \tag{19}$$

Из (18) видно, что произведения вроде $\bar{\psi}_1\psi_1$ плохо определены. Давайте *определим* эти произведения следующим образом. Рассмотрим произведение, например

$$\bar{\psi}_1(x')\psi_1(x) = i\frac{N_1}{2\pi}(z' - z)^{-\alpha_1^2}(\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1^2}\left(1 - i\alpha_1(z' - z)\partial\phi(x) - i\beta_1(\bar{z}' - \bar{z})\bar{\partial}\phi(x) + \ldots\right). \tag{20}$$

[1] Мы всюду исключаем $R$, так как знаем, что инфракрасное обрезание в конечном итоге никуда не войдет.

Усредним это произведение по окружности $|z'-z|^2 = r_0$ и будем считать $r_0$ малым. Старший член в разложении по $r_0$ примем за $\bar{\psi}_1(x)\psi_1(x)$. Предположим, что

$$\alpha_1^2 - \beta_1^2 = 1. \tag{21}$$

Тогда первый и третий члены в разложении (20) обратятся в нуль. Старшим ненулевым членом будет второй:

$$iN_1 r_0^{-2\beta_1^2}\left(\frac{-i\alpha_1\partial\varphi}{2\pi}\right).$$

Выражение в скобках и есть $\bar{\psi}_1\psi_1$. Отсюда получаем

$$\beta = -r_0^{-2\beta_1^2}N_1\alpha_1.$$

Аналогично, полагая

$$\alpha_2^2 - \beta_2^2 = -1, \tag{22}$$

получим

$$\beta = -r_0^{-2\alpha_2^2}N_2\beta_2.$$

Теперь рассмотрим уравнения движения (12). Подставляя (15) и (16) , получим

$$i\beta_1\bar{\partial}\bar{\varphi}e^{i\alpha_1\varphi+i\beta_1\bar{\varphi}} = -ig\frac{\beta}{2\pi}\bar{\partial}\bar{\varphi}e^{i\alpha_1\varphi+i\beta_1\bar{\varphi}},$$
$$i\alpha_2\partial\varphi e^{i\alpha_2\varphi+i\beta_2\bar{\varphi}} = ig\frac{\beta}{2\pi}\partial\bar{\varphi}e^{i\alpha_2\varphi+i\beta_2\bar{\varphi}}.$$

Отсюда получаем

$$\alpha_2 = -\beta_1 = \frac{g\beta}{2\pi} \tag{23}$$

Чтобы зафиксировать коэффициенты $\alpha_i$, $\beta_i$, нужно узнать еще нормировочные множители $N_i$. Вместо того, чтобы аккуратно извлекать сингулярные члены в антикоммутаторах, давайте просто зафиксируем их так, чтобы член $-m\bar{\psi}\psi = im(\bar{\psi}_2\psi_1 - \bar{\psi}_1\psi_2)$ был бы пропорционален $\cos\beta\phi$.

Рассмотрим разложение

$$\bar{\psi}_2(x')\psi_1(x) = -\eta_1\eta_2\frac{\sqrt{N_1N_2}}{2\pi}(z'-z)^{-\alpha_1\alpha_2}(\bar{z}'-\bar{z})^{-\beta_1\beta_2}\left(e^{i(\alpha_1-\alpha_2)\varphi(z)+i(\beta_1-\beta_2)\bar{\varphi}(\bar{z})}+\dots\right).$$

Первый член выживает при усреднении по углам, если

$$\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2, \tag{24}$$

что согласуется с (21–23) и дает, кроме того

$$\alpha_1 = -\beta_2 \tag{25}$$

Если отождествить $i\bar{\psi}_2\psi_1$ с $e^{i\beta\phi}$, то мы получим

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta, \tag{26}$$
$$\beta_1 - \beta_2 = \beta. \tag{27}$$

Из (21), (23), (25), (26) легко получить

$$\begin{aligned}\alpha_1 = -\beta_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}+\beta\right),\\ \alpha_2 = -\beta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}-\beta\right).\end{aligned} \tag{28}$$

Подставляя ответ в (23), получаем (9).

Кроме того, находим

$$N_1 = -N_2 = -r_0^{\frac{\beta^2}{2}+\frac{1}{2\beta^2}-1}\,\frac{2\beta^2}{\beta^2+1}, \tag{29}$$

Кроме того, можно принять, что

$$\eta_1\eta_2|0\rangle = |0\rangle$$

всюду в $\bar\psi_2\psi_1 - \bar\psi_1\psi_2$. Если считать, что в теории возмущений этот оператор всегда стоит справа от всех других, то найдем

$$i(\bar\psi_2\psi_1 - \bar\psi_1\psi_2) = \frac{2}{\pi}\frac{\beta^2}{\beta^2+1}r_0^{\beta^2-1}\cos\beta\phi, \tag{30}$$

откуда находим (10).

Строго говоря, пока мы нашли только точное решение для безмассовой модели Тирринга. Однако из наших рассуждений следует, что теории возмущений по члену $m\bar\psi\psi$ для модели Тирринга и теория возмущений по $\cos\beta\phi$ для модели синус-Гордона совпадают, что дает сильное основание в пользу совпадения теорий. Отметим, что константа связи $g$ в модели Тирринга не перенормируется, в то время как "масса" $m$ не является физической величиной и существенно перенормируется. Это связано с тем, что массовый член $\bar\psi_2\psi_1 - \bar\psi_1\psi_2$ имеет масштабную размерность $\beta^2$ из-за переопределения произведения полей. Измерима константа $\lambda$ модели синус-Гордона, причем

$$\lambda \sim m_{\text{phys}}^{2-\beta^2}, \qquad m \sim m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}}r_0)^{1-\beta^2} = m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}}r_0)^{\frac{g/\pi}{1+g/\pi}}, \tag{31}$$

где $m_{\text{phys}}$ — масса физических возбуждений (например, тирринговских фермионов) в теории.

Остается еще один вопрос: чему соответствуют тирринговские фермионы в модели синус-Гордона? Оказывается, они соответствуют кинкам — нетривиальным возбуждениям с топологическими числами $q = \pm 1$.

### Литература


[1] W. E. Thirring, *Annals Phys.* **3** (1958) 91
[2] S. Coleman, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 2088
[3] S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 3026


### Задачи

**1.** Докажите, что в безмассовой модели Тирринга ток (4) сохраняется.

**2.** Выведите (18).

**3.** Покажите, что классическая теория синус-Гордона имеет решения

$$\phi(t,x) = \pm\frac{4}{\beta}\operatorname{arctg}\exp\frac{m(x-vt-x_0)}{\sqrt{1-v^2}}$$

при $m^2 = 4\pi\lambda\beta^2$, при $|v|<1$ и произвольном $x_0$. Найти топологические заряды этих решений.

**4.** Повторить конструкцию для случая свободного фермиона $g=0$. Проверить, что в этом случе $m_{\text{phys}} = m = \pi\lambda$.

**5.** В теории свободного бозонного поля показать, что тензор энергии-импульса имеет только две ненулевые компоненты:

$$T_{zz} = \frac{T(z)}{2\pi} = -\frac{(\partial\phi)^2}{4\pi}, \qquad T_{\bar z\bar z} = \frac{\bar T(z)}{2\pi} = -\frac{(\bar\partial\phi)^2}{4\pi}.$$

В квантовом случае произведения нужно заменить на нормальные произведения $:\ldots:$, определенные следующим образом:

$$\varphi_1\varphi_2 = {:}\varphi_1\varphi_2{:} + \langle\varphi_1\varphi_2\rangle, \qquad {:}\varphi_1\ldots\varphi_n{:}\varphi_{n+1} = {:}\varphi_1\ldots\varphi_n\varphi_{n+1}{:} + \sum_{i=1}^{n}{:}\varphi_1\ldots\widehat{\varphi}_i\ldots\varphi_n{:}\langle\varphi_i\varphi_{n+1}\rangle$$

(шляпка означает опущенный множитель).

Покажите, что компоненты тензора энергии-импульса имеют следующее операторное разложение

$$T(z')T(z) = \frac{1/2}{(z'-z)^4} + \frac{2T(z)}{(z'-z)^2} + \frac{\partial T(z)}{z'-z} + O(1).$$

Покажите, что

$$T(z')V_\alpha(z) = \frac{\Delta_\alpha V_\alpha(z)}{(z'-z)^2} + \frac{\partial V_\alpha(z)}{z'-z} + O(1), \qquad V_\alpha(z) = e^{i\alpha\varphi(z)} = :e^{i\alpha\varphi(z)}:,$$

причем $\Delta_\alpha = \alpha^2/2$ — масштабная размерность поля $V(z)$.

**6.** Покажите, что в модели Тирринга, в согласии с (31), в однопетлевом приближении масса перенормируется следующим образом

$$m_{\text{phys}} = m\left(1 + \frac{g}{\pi}\log\frac{\Lambda}{m}\right),$$

где $\Lambda$ — параметр обрезания по импульсам.

При выводе диаграммной техники удобно пользоваться представлением для действия модели Тирринга со вспомогательным полем:

$$S[\psi, \bar{\psi}, A^\mu] = \int d^D x \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - \hat{A} - m)\psi + \frac{1}{2g}A^\mu A_\mu\right).$$