Лекция 5

Теоретико-полевая модель в размерности $d \leq 4$. Ренормгруппа и ϵ-разложение.

В предыдущих лекциях мы рассматривали критические индексы и конформные размерности абстрактно, из общих соображений гипотезы подобия и конформной инвариантности. Теперь мы вернемся к модели Изинга и попробуем сосчитать масштабные размерности полей $\varphi(x)$ и $\varepsilon(x)$. Мы уже писали действие полевой модели в виде

$$\mathcal{S}[\varphi] = \int d^d x \, \left(\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{g}{4!}\varphi^4 \right), \tag{1}$$

В прошлый раз мы уже разбирали, как можно вычислять корреляционные функции по теории возмущений. Проблема состоит в том, что во флуктуационной области $r_c \gg r_0$ теория возмущений буквально неприменима, поскольку коэффициент нелинейности g велик.

Давайте рассуждать так. Действие (1) получено для достаточно длинноволновых флуктуаций, когда мы уже просуммировали статсумму по флуктуациям порядка параметра решетки. Однако теория поля не знает, на каком масштабе была произведена обрезка. Предположим, она была произведена на некотором масштабе R. Если мы теперь проинтегрируем по полям, меняющимся на масштабах от R до какого-то $R' > R$ («быстрые переменные» $\tilde{\varphi}$), поля на масштабах $> R'$ («медленные переменные» φ') должны описываться такой же теорией поля, но, возможно, с другими параметрами m, g и другой нормировкой поля:

$$\varphi = \tilde{\varphi} + Z_\varphi^{1/2}(R', R)\varphi', \tag{2a}$$

$$m^2 = Z_{m^2}^{-1}(R', R) m'^2, \tag{2b}$$

$$g = Z_g^{-1}(R', R) g' \tag{2c}$$

Это предположение называется *гипотезой скейлинга*, а (полу)группа преобразования параметров (2) — *ренормгруппой*. Чтобы действовать более аккуратно, будем считать, что поле $\tilde{\varphi}$ состоит из фурье-гармоник с волновыми векторами k, такими что $R'^{-1} < |k| < R^{-1}$. Соответственно, поле φ' состоит из гармоник с $|k| < R'^{-1}$.

Подставляя (2a) в действи (1), получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}[\varphi] &= \mathcal{S}'[\varphi'] + \mathcal{S}_{\text{contr}}[\varphi'] + \tilde{\mathcal{S}}[\varphi', \tilde{\varphi}], \\
\mathcal{S}'[\varphi'] &= \int d^d x \, \left(\frac{1}{2}(\nabla\varphi')^2 + \frac{m'^2}{2}\varphi'^2 + \frac{g'}{4!}\varphi'^4 \right) \\
\mathcal{S}_{\text{contr}}[\varphi'] &= \int d^d x \, \left(\frac{Z_\varphi - 1}{2}(\nabla\varphi')^2 + \frac{m^2(Z_\varphi - Z_{m^2})}{2}\varphi'^2 + \frac{g(Z_\varphi^2 - Z_g)}{4!}\varphi'^4 \right) \\
\tilde{\mathcal{S}}[\varphi', \tilde{\varphi}] &= \int d^d x \, \left(\frac{1}{2}(\nabla\tilde{\varphi})^2 + \frac{m^2}{2}\tilde{\varphi}^2 + \frac{g}{4!}\tilde{\varphi}^4 + \frac{g Z_\varphi^{1/2}}{6}(\varphi'\tilde{\varphi}^3 + Z_\varphi \varphi'^3 \tilde{\varphi}) + \frac{g Z_\varphi}{4}\varphi'^2\tilde{\varphi}^2 \right).
\end{aligned} \tag{3}$$

Поскольку мы собираемся интегрировать только по $\mathcal{D}\tilde{\varphi}$, первые два слагаемых $\mathcal{S}'[\varphi'] + \mathcal{S}_{\text{contr}}[\varphi']$ дают множитель, который можно вынести за знак функционального интеграла. В действии $\tilde{\mathcal{S}}[\varphi', \tilde{\varphi}]$ первые два члена будем рассматривать как невозмущенное действие, а остальные — как возмущение. Малость возмущения определяется здесь не малостью g, а малостью отношения $(R' - R)/R$. Члены вида $\varphi'\tilde{\varphi}$ опущены, так как содержат произведения пар фурье-гармоник заведомо разных частот.

Мы будем вычислять эффективное действие $\tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}[\varphi']$,

$$e^{-\tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}[\varphi']} = \int \mathcal{D}\tilde{\varphi} \, e^{-\tilde{\mathcal{S}}[\varphi', \tilde{\varphi}]}, \tag{4}$$

и подбирать значения Z_φ, Z_{m^2} и Z_g так, чтобы

$$\mathcal{S}_{\text{contr}}[\varphi'] + \tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}[\varphi'] = 0. \tag{5}$$

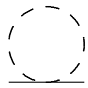
При этом будем считать, что

$$r_0 \ll R < R' \ll r_c. \tag{6}$$

Пусть линии, отвечающие полю φ', будут сплошными, а линии, отвечающие полю $\tilde{\varphi}$ — пунктирными. Давайте вычислим поправки к члену второго порядка (собственно-энергетическую часть) и к члену четвертого порядка (к четырехточечной вершинной части), связанные с интегрированием по $\tilde{\varphi}$. Члены первого и третьего порядка возникнуть не могут, а члены порядка шесть и выше иррелевантны и нас интересовать не будут. Кроме того, мы будем рассматривать квадратичный член $m^2\tilde{\varphi}^2/2$ как возмущение, а не как часть невозмущенного действия. Это сильно упростит разложение при условии (6).

Давайте рассмотрим поправку первого порядка по g в собственноэнергетическую часть:

$$-\Sigma^{(1,0)}(k) = \frac{1}{2}$$

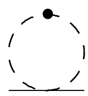


$$= -\frac{gZ_\varphi}{2}\int_{R'^{-1}<|k|<R^{-1}} \frac{d^dq}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{q^2}$$

$$= -\frac{gZ_\varphi}{2}\frac{S_d}{(2\pi)^d}\int_{R'^{-1}}^{R^{-1}} q^{d-3}\,dq = -\frac{gZ_\varphi}{2(d-2)}\frac{S_d}{(2\pi)^d}\left(\frac{1}{R^{d-2}}-\frac{1}{R'^{d-2}}\right). \quad (7)$$

Интеграл здесь имеет степенную ультрафиолетовую расходимость, то есть при $R\to 0$ интеграл растет как R^{2-d}. Это значит, что основной вклад в этот инеграл дают атомные масштабы и эта поправка приводит только к сдвигу критической точки T_c. Математически этот сдвиг компенсируется аддитивной перенормировкой массы и нас интересовать не будет. Рассмотрим теперь поправку первого порядка как по g, так и по m:

$$-\Sigma^{(1,1)}(k) = \frac{1}{2}$$



$$= \frac{1}{2}gZ_\varphi m^2\int_{R'^{-1}<|k|<R^{-1}} \frac{d^dq}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{q^4}$$

$$= \frac{gm^2Z_\varphi}{2}\frac{S_d}{(2\pi)^d}\int_{R'^{-1}}^{R^{-1}} q^{d-5}\,dq = \frac{gm^2Z_\varphi}{2}\frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{R'^{4-d}-R^{4-d}}{4-d}. \quad (8)$$

Этот вклад уже сходится ультрафиолетово, но расходится инфракрасно, то есть при $R'\to\infty$. Конечно, при учете всех порядков по m^2 (что означает замену q^2 на q^2+m^2 в (7)) эта инфракрасная расходимость будет обрезана на масштабах r_c. Но в области $R'\ll r_c$ это как раз то, что нам нужно. При $d=4$ эта инфракрасная расходимость — логарифмическая и никак не зависит от конкретных масштабов:

$$-\Sigma^{(1,1)}(k) = \frac{gm^2Z_\varphi}{16\pi^2}\log\frac{R'}{R} \qquad (d=4),$$

то есть квадратичная по φ' часть $\mathcal{S}_{\text{contr}}[\varphi'] + \tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}[\varphi']$ имеет вид

$$\frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^k}\left((Z_\varphi-1)k^2 + (Z_\varphi - Z_{m^2})m^2 - \frac{gm^2Z_\varphi}{16\pi^2}\log\frac{R'}{R}\right)|\varphi'_k|^2.$$

Условие обращения в нуль этого выражения имеет вид

$$Z_\varphi - 1 = 0, \qquad (Z_\varphi - Z_{m^2})m^2 - \frac{gm^2Z_\varphi}{16\pi^2}\log\frac{R'}{R} = 0.$$

Первое условие означает, что в первом порядке по g не происходит перенормировки (скейлинга) параметра порядка φ и связано с тем, что собственно-энергетическая часть $\Sigma(k)$ в этом приближении не зависит от k. Второе условие означает, что

$$m'^2 - m^2 = -\frac{gm^2}{16\pi^2}\log\frac{R'}{R}.$$

Давайте поделим эту величину на $\log\frac{R'}{R}$:

$$\frac{m'^2-m^2}{\log R' - \log R} = -\frac{gm^2}{16\pi^2}.$$

Устремляя R' к R, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dm^2}{d\xi} = -\frac{gm^2}{16\pi^2}, \qquad \xi = \log R, \qquad R \gg r_c. \tag{9}$$

Это дифференциальное уравнение описывает зависимость константы m^2 от масштаба. Это уравнение можно было бы решить, если бы мы знали зависимость g от ξ. Но прежде рассмотрим случай $d < 4$. Дело в том, что при $d < 4$ из решения этого уравнения можно извлечь непосредственный физический смысл. Действительно, при $R \sim r_c$ квадрат массы должен быть перейти в r_c^{-1}, а при $R \sim r_0$ естественно было бы ожитдать, что он будет пропорционален τ. Сравнивая эти два параметра, мы могли бы получить критический индекс ν или, эквивалентно, масштабную размерность d_ε.

Для удобства положим

$$d = 4 - \epsilon.$$

Тогда опять $Z_\varphi = 1$ и

$$m'^2 - m^2 = -\frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{gm^2}{2}(R'^\epsilon - R^\epsilon).$$

Теперь мы можем сделать то же самое, но хотелось бы опять дифференциоровать по безразмерному параметру ξ. Получаем

$$\frac{dm^2}{d\xi} = -\frac{S_d g m^2}{2(2\pi)^d}R^\epsilon.$$

Неудобство правой части состоит в том, что она явно зависит от R. Вспомним, однако, что константа g размерна и размерный множитель в правой части как раз компенсирует ее размерность. Определим безразмерную константу

$$\tilde{g} = gR^\epsilon. \tag{10}$$

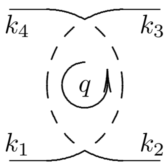
Мы приходим к совершенно тому же уравнению ренормгруппы

$$\frac{dm^2}{d\xi} = -\frac{S_d \tilde{g} m^2}{2(2\pi)^d}, \qquad \xi = \log R, \qquad R \gg r_c. \tag{11}$$

Мы видим, что уравнение формально совпадает с уравнением при $d = 4$, только вместо константы g стоит ее безразмерный аналог $\tilde{g}$.

Исследуем теперь перенормировку константы g. В нулевом порядке четырехчастичная вершинная функция равна $-g$. Первая неисчезающая поправка дается вторым порядком по g и равна

$$\Gamma^{(2,0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{1}{2}$$



$+$ Две кросс-диаграммы. (12)

Под q в круговой стрелке понимается, что по правой пунктирной линии течет вверх импульс $q - k_1 - k_2$, а по левой — вниз импульс $q - k_3 - k_4$. Кросс-диаграммы отличаются нетривиальными перестановкми конечных точек. В целях получения ренормгруппового потока нам достаточно вычислить эту поправку при $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$. Имеем

$$\Gamma^{(2,0)}(0,0,0,0) = \frac{3(-g)^2}{2}\int_{R'^{-1}<|k|<R^{-1}} \frac{d^d q}{(2\pi)^d}\frac{1}{q^4} = \frac{3(-g)^2}{2}\frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{R'^\epsilon - R^\epsilon}{\epsilon}.$$

В четырехмерном пределе $\epsilon \to 0$ мы имеем

$$g' - g = -\frac{3g^2}{16\pi^2}\log\frac{R'}{R}$$

и, соответственно,

$$\frac{dg}{d\xi} = -\frac{3g^2}{16\pi^2} \qquad (d = 4). \tag{13}$$

Это уравнение легко решается:

$$g = \frac{g_0}{1 + \frac{3g_0}{16\pi^2}\log\frac{R}{R_0}}, \tag{14}$$

где g_0 — значение константы связи в некоторой «начальной точке» R_0. Что означает это решение? Мы видим, что с ростом R константа связи уменьшается. Это говорит о том, что теория возмущений становится применимой при больших масштабах. С уменьшением масштаба R константа связи растет и при некотором конечном значении обращается в бесконечность. Понятно, что вблизи этого значения теория возмущений уже неприменима. Достоинство метода ренормгруппы состоит в том, что он позволяет исследовать корреляционные функции в большом диапазоне масштабов. В частности, появление логарифма в (14) и, следовательно, в решении уравнения (9) означает логарифмическую зависимость корреляционных функций от координат, нарушающую конформную инвариантность в области $r_0 \ll r \ll r_c$.

Рассмотрим теперь случай $d < 4$. Имеем

$$\frac{dg}{d\xi} = -\frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{3g^2}{2}R^\epsilon.$$

Опять в правой части появляется R^ϵ. Попробуем избавится от него подстановкой $g = \tilde{g}R^{-\epsilon}$. Получаем

$$\frac{d\tilde{g}}{d\xi} = \epsilon\tilde{g} - \frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{3\tilde{g}^2}{2}. \tag{15}$$

Имеется важно отличие решения этого уравнения от решения (14) уравнения (9). Дело в том что уравнение обладает устойчивой неподвижной точкой

$$\tilde{g} = \tilde{g}^* \equiv \frac{2(2\pi)^d}{3S_d}\,\epsilon. \tag{16}$$

На малых масштабах, если $\tilde{g}_0 \gg \epsilon$ (что является необходимым условием существования флуктуационной области) решение для $\tilde{g}$ дается формулой (14) с заменой g, g_0 на $\tilde{g}$, $\tilde{g}_0$ и $1/16\pi^2$ на $S_d/(2\pi)^d$. С ростом масштаба $\tilde{g}_0$ падает и асимптотически стремится к $\tilde{g}^*$. Если эта стабилизация происходит при масштабах $\sim r_* \ll r_c$, масштабная инвариантность выполняется при

$$r_* \lesssim r \ll r_c. \tag{17}$$

Давайте оценим значение r_*. Так как $g = r_0^{-\epsilon}$ при $R \sim r_0$ потребуем, чтобы $\tilde{g}_0 \sim 1$ при $R_0 \sim r_0$. Тогда

$$\tilde{g} \sim \frac{(2\pi)^d}{3S_d\log\frac{R}{r_0}} \qquad \text{при } R \gg r_0.$$

Стабилизация у неподвижной точки происходит, когда $\tilde{g} \simeq \tilde{g}^*$ в этой формуле. Поэтому

$$\log\frac{r_*}{r_0} \simeq \frac{1}{\epsilon}$$

и

$$r_* \sim r_0 e^{1/\epsilon}. \tag{18}$$

Если величина ϵ мала, неподвижная точка близка к нулю и теория возмущений, которую мы развивали, верна. При $\epsilon \sim 1$ теория возмущений должна терять свою применимость. Тем не менее, оказывается, что результаты теории возмущений дают хорошие результаты при $\epsilon = 1$ ($d = 3$) вплоть до четвертого порядка по ϵ. Далее ряд по ϵ, по видимому, начинает расходиться. Метод вычисления критических индексов основанный на вычислении в окрестности стабильной точки (16) называется *методом ϵ-разложения.*

Теперь подставим значение фиксированной точки в уравнение (11) для квадрата массы:

$$\frac{dm^2}{d\xi} = -\frac{\epsilon}{3}m^2 \qquad \text{при } r \geq r_*.$$

Отсюда

$$m^2 = m_*^2 \left(\frac{R}{r_*}\right)^{-\epsilon/3}.$$

Продолжая это соотношение вниз от r_* до r_0 и вверх по R до r_c, получим оценку

$$m^2 \sim m_0^2 \left(\frac{r_c}{r_0}\right)^{-\epsilon/3}.$$

Учитывая, что $m \sim r_c^{-1}$ при $R = r_c$, получаем

$$\tau \propto m_0^2 \sim r_0^{-\epsilon/3} r_c^{\epsilon/3-2}.$$

Отсюда получаем в первом порядке по ϵ:

$$d_\tau \equiv \frac{1}{\nu} = 2 - \frac{\epsilon}{3}, \qquad d_\varepsilon = d - 2 + \frac{\epsilon}{3}. \tag{19}$$

Отсюда

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12}, \qquad \alpha = 2 - d\nu = \frac{\epsilon}{6}.$$

Далее, из условия $Z_\varphi = 1 + O(\epsilon^2)$ мы заключаем, что конформная размерность поля φ не меняется в первом порядке по ϵ, то есть

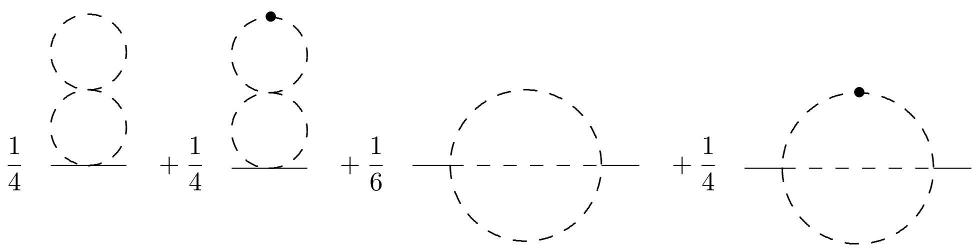
$$d_\varphi = \frac{d-2}{2} = 1 - \frac{\epsilon}{2}, \qquad \eta = 0. \tag{20}$$

Первый неисчезающий вклад в в аномальную размерность η имеет порядок ϵ^2. Давайте вычислим его. Мы хотим разложить собственно-энергетическую часть в ряд по k^2,

$$\Sigma(k) = \Sigma_0 + \Sigma_1 k^2 + \Sigma_2 k^4 + \ldots, \tag{21}$$

и вычислить Σ_1.

Поправки второго порядка по g и до первого порядка по m в $-\Sigma(k)$ имеют вид



Первая диаграмма содержит ультрафиолетово расходящуюся петлю, которая, как мы уже знаем, компенсируется сдвигом температуры перехода или, на языке теории поля, бесконечной перенормировкой массы. Поэтому сумму этой диаграммы с соответствующей контрчленной диаграммой можно положить равной нулю. Вторая диаграмма не зависит от k и потому не может давать вклад в Σ_1. Третья диаграмма расходится ультрафиолетово, но содержит зависящую от k часть. Более того, в разложении по k^2 для этой диаграммы только вклад в Σ_0 бесконечен. Все остальные вклады конечны, но только вклад в Σ_1 имеет нужную нам логарифмическую инфракрасную расходимость при $d = 4$. У четвертой диаграммы логарифмически расходящийся вклад имеется как раз в Σ_0, но не в Σ_1. Поэтому нам надо вычислить именно третью диаграмму.

В импульсном пространстве вклад третьей диаграммы можно записать как

$$\Sigma^{(2,0)}(k) - \Sigma^{(2,0)}(0)$$
$$= -\frac{g^2 Z_\varphi}{6}\left(\int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d}\,\frac{d^d q_2}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{(k+q_1)^2 q_2^2 (q_1-q_2)^2} - \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d}\,\frac{d^d q_2}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{q_1^2 q_2^2 (q_1-q_2)^2}\right) + \ldots$$

Эти интегралы можно было бы взять методом Фейнмана, но здесь есть сложности с границами интегрирования, что мешает, скажем, разложить разность по степеням k. Поэтому удобнее вычислять интеграл в прямом пространстве.

Аккуратный переход к прямому пространству не прост, так как преобразование Фурье пропагаторов, определенных в обратном пространстве, приводит к довольно сложным выражениям в обратном пространстве. Поэтому для упрощения вычисления примем просто, что

$$\langle\tilde\varphi(x)\tilde\varphi(0)\rangle = \begin{cases} G_0(x), & R < |x| < R', \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь

$$G_0(x) = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{e^{\mathrm{i}kx}}{q^2} = \frac{1}{(d-2)S_d|x|^{d-2}} \qquad (d>2). \tag{22}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\Sigma^{(2,0)}(k) - \Sigma^{(2,0)}(0) = -\frac{g^2 Z_\varphi}{6}\int d^dx\, G_0^3(x)(e^{-\mathrm{i}kx}-1) = \frac{g^2 Z_\varphi}{12}\int d^dx\, G_0^3(x)(kx)^2 + \ldots \\ = k^2\frac{g^2 Z_\varphi}{12d}\int_{R<|x|<R'} d^dx\, G_0^3(x)x^2 + \ldots\end{aligned} \tag{23}$$

Интеграл в правой части (23) легко берется:

$$1 - Z_\varphi = \Sigma_1^{(2,0)} = \frac{g^2 Z_\varphi}{12d(d-2)^3S_d^2}\frac{R'^{2\epsilon} - R^{2\epsilon}}{2\epsilon}.$$

Так как $|Z_\varphi - 1| \ll 1$ при $R'/R - 1 \ll 1$ имеем $Z_\varphi^{-1} - 1 \simeq -\log Z_\varphi$. Отсюда получаем уравнение на перенормировку параметра порядка:

$$\frac{d\log Z_\varphi}{d\xi} = -\frac{\tilde g^2}{12d(d-2)^3S_d^2}. \tag{24}$$

Решения этого уравнения удобно интерпретировать так. Пусть $Z_\varphi(R)$ — произвольное решение. Тогда величина

$$Z_\varphi(R', R) = \frac{Z_\varphi(R')}{Z_\varphi(R)} \tag{25}$$

в точности совпадает с параметром Z_φ, определенным в (2a). Знание $Z_\varphi(R)$ позволяет установить размерность поля φ.

Рассмотрим парные корреляционные функции $\langle\varphi(x)\varphi(0)\rangle$, $\langle\varphi'(x)\varphi'(0)\rangle$ на масштабах $r_c \gg |x| > R' > R$. Поскольку поле $\tilde\varphi(x)$ определено на масштабах $R' > r > R$, имеем

$$\langle\varphi'(x)\tilde\varphi(0)\rangle = \langle\tilde\varphi(x)\tilde\varphi(0)\rangle = 0 \qquad \text{при } |x| > R'.$$

Отсюда имеем

$$\langle\varphi(x)\varphi(0)\rangle = Z_\varphi(R', R)\langle\varphi'(x)\varphi'(0)\rangle = \frac{Z_\varphi(R')}{Z_\varphi(R)}\langle\varphi'(x)\varphi'(0)\rangle.$$

С другой стороны, в интервале $r_0 \ll |x| \ll r_c$ единственным масштабным параметром оказывается параметр обрезки R, поэтому

$$|x|^{d-2}\langle\varphi(x)\varphi(0)\rangle = |x'|^{d-2}\langle\varphi'(x')\varphi'(0)\rangle, \qquad \text{если } \frac{x'}{R'} = \frac{x}{R}.$$

Совмещая последние две формулы, получаем

$$\langle\varphi(x')\varphi(0)\rangle = \frac{Z_\varphi(R')}{Z_\varphi(R)}\left(\frac{|x|}{|x|'}\right)^{d-2}\langle\varphi(x)\varphi(0)\rangle, \qquad \text{если } \frac{|x'|}{|x|} = \frac{R'}{R}.$$

Параметр R' — произвольный. Положим $|x| = R$, $|x'| = R'$. Величина R' произвольна, поэтому x' — произвольный вектор. Заменяя теперь букву x' на x, получаем

$$\langle\varphi(x)\varphi(0)\rangle = \text{const} \cdot \frac{Z_\varphi(|x|)}{|x|^{d-2}}. \tag{26}$$

В области (17) имеем

$$\frac{d\log Z_\varphi}{d\xi} = -\frac{\tilde{g}^{*2}}{12d(d-2)^3 S_d^2} = -\frac{(2\pi)^{2d}}{27d(d-2)^3 S_d^4}\epsilon^2 = -\frac{\epsilon^2}{54} + O(\epsilon^3).$$

Следовательно,

$$Z(R) = R^{-\epsilon^2/54}, \qquad r_* \lesssim r \ll r_c. \tag{27}$$

Окончательно, получаем

$$\eta = \frac{\epsilon^2}{54}, \qquad d_\varphi = 1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{108}. \tag{28}$$

Задачи

1. Рассмотрим систему с n-компонентным параметром порядка $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\mathcal{S}[\boldsymbol{\varphi}] = \int d^d x \left(\frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{\varphi})^2 + \frac{m^2}{2}\boldsymbol{\varphi}^2 + \frac{g}{8}(\boldsymbol{\varphi}^2)^2 \right).$$

Построить уравнения ренормгруппы для этой системы, найти значение $\tilde{g}^*$ и вычислить в первом порядке по ϵ размерность поля $\varepsilon = \boldsymbol{\varphi}^2$ и во втором порядке по ϵ размерность поля $\boldsymbol{\varphi}$.