Лекция 12
Термодинамический анзац Бете: результаты

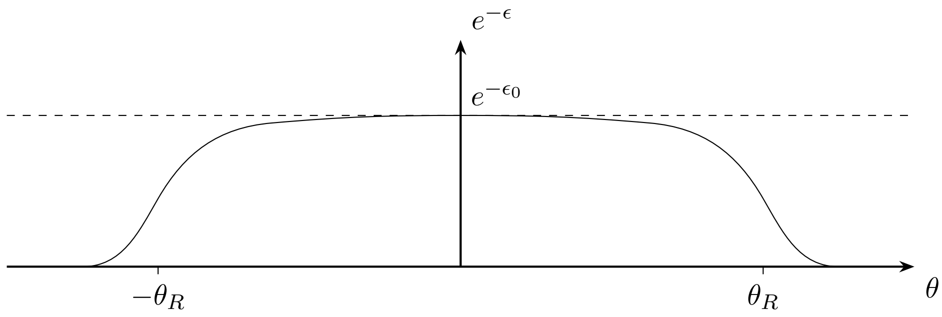
Вернемся к случаю одной частицы и рассмотрим предел высоких температур. Легко заметить, что уравнение (11.25) имеет постоянное решение $\epsilon(\theta)=\epsilon_0$ при $R=0$:

$$\frac{\epsilon_0}{\log(1-\sigma e^{-\epsilon_0})}=\sigma\nu, \qquad \nu=\int\frac{d\theta}{2\pi}\,\phi'(\theta)=\frac{\phi(+\infty)-\phi(-\infty)}{2\pi}. \tag{12.1}$$

Рассмотрим теперь малые, но конечные значения R. В этом случае имеется значение $\theta_R\gg 1$ при котором правая часть (11.25) равна единице:

$$\theta_R\simeq\log\frac{2}{mR}. \tag{12.2}$$

Если $e^{|\theta|}\ll e^{\theta_R}$, правой частью можно пренебречь и $\epsilon(\theta)=\epsilon_0$. Если же, наоборот,$e^{|\theta|}\gg e^{\theta_R}$, правая часть велика, так что $\epsilon(\theta)\simeq mR\operatorname{ch}\theta$ и $e^{-\epsilon(\theta)}\to 0$. Нетривиальным оно становится вблизи двух точек θ_R и $-\theta_R$, где имеет форму «кинка» для $e^{-\epsilon}$:



Но при больших θ_R решения вблизи этих двух точек не зависят друг от друга и от R. Так как $\epsilon(-\theta)=\epsilon(\theta)$, рассмотрим решение вблизи θ_R. Полагая $\tilde\epsilon(\theta)=\epsilon(\theta_R+\theta)$, мы получаем для $\tilde\epsilon(\theta)$ приближенное уравнение

$$\tilde\epsilon(\theta)-\sigma\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\log(1-\sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta')})=e^{\theta}. \tag{12.3}$$

В формуле (11.27) для скейлинговой функции $f(r)$ $(r=mR)$ в силу четности функции $\epsilon(\theta)$ можно $\operatorname{ch}\theta$ заменить на e^θ. Тогда вклад левого кинка будет подавлен, и в пределе $r\to 0$ скейлинговая функция выражается через правое кинковое решение:

$$f(r)=\sigma r\int\frac{d\theta}{2\pi}\,e^{\theta}\log(1-\sigma e^{-\epsilon(\theta)})=\sigma r e^{\theta_R}\int\frac{d\theta}{2\pi}\,e^{\theta}\log(1-\sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta)})=2\sigma\int\frac{d\theta}{2\pi}\,e^{\theta}\log(1-\sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta)}). \tag{12.4}$$

В приближении (12.3) ответ не зависит от r, поэтому формула (12.4) даст $f(0)$. Вычислим эту величину.

Продифференцируем уравнение (12.3) по θ:

$$e^{\theta}=\tilde\epsilon'(\theta)-\sigma\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi''(\theta-\theta')\log(1-\sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta')}).$$

Подставляя это в правую часть (12.4), мы получаем два слагаемых

$$f_1(0)=-2\int\frac{d\theta}{2\pi}\,\tilde\epsilon'(\theta)\tilde l(\theta)=\frac{\sigma}{\pi}\int_{\epsilon_0}^{\infty}d\epsilon\,\log(1-\sigma e^{-\epsilon}), \quad \text{где } \tilde l(\theta)=-\sigma\log(1-\sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta)}),$$

и

$$f_2(0)=-2\int\frac{d\theta}{2\pi}\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi''(\theta-\theta')\tilde l(\theta)\tilde l(\theta').$$

Слагаемое $f_1(0)$ не зависит от вида функции $\tilde\epsilon(\theta)$ и сводится к интегралу от элементарных функций. Слагаемое $f_2(0)$ в силу нечетности и быстрого убывания $\phi''(\theta)$ обратилось бы в нуль, если бы интегралы коммутировали. Но эти интегралы не коммутируют, потому что $\tilde l(\theta)$ стремиться к конечному значению

$$l_0=-\sigma\log(1-\sigma e^{-\epsilon_0})=-\nu^{-1}\epsilon_0$$

при $\theta \to -\infty$. Сначала перепишем интеграл в виде

$$f_2(0) = -2\int \frac{d\theta}{2\pi}\,\tilde{l}(\theta)\frac{d}{d\theta}\int \frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\tilde{l}(\theta')$$

Интеграл по θ' можно взять по частям, поскольку $\phi'(\theta)$ быстро убывает при $\theta \to \pm\infty$. Получаем

$$f_2(0) = -2\int \frac{d\theta}{2\pi}\,\tilde{l}(\theta)\frac{d}{d\theta}\int \frac{d\theta'}{2\pi}\,(\phi(\theta-\theta')+\pi\nu)\tilde{l}'(\theta')$$

Постоянное слагаемое $\pi\nu$ (пропадающее при дифференцировании по θ) добавлено к ϕ для того, чтобы интеграл стремился к нулю при $\theta \to -\infty$. При этом интеграл по θ' сходится, поскольку $l'(\theta)$ стремится к нулю достаточно быстро при $\theta \to \pm\infty$. После этого можно взять по частям интеграл по θ:

$$f_2(0) = \pi\nu\int \frac{d\theta\,d\theta'}{2\pi^2}\,\tilde{l}'(\theta)\tilde{l}'(\theta') + \int \frac{d\theta\,d\theta'}{2\pi^2}\,\tilde{l}'(\theta)\phi(\theta-\theta')\tilde{l}'(\theta').$$

В каждом из этих слагаемых интегралы коммутируют в силу быстрого убывания $l'(\theta)$. Второе слагаемое равно нулю в силу нечетности функции ϕ, а интеграл в первом слагаемом элементарно берется:

$$f_2(0) = \frac{\nu l_0^2}{2\pi} = -\frac{\epsilon_0 l_0}{2\pi}.$$

Окончательно получаем

$$f(0) = \frac{\sigma}{\pi}\left(\frac{\epsilon_0}{2}\log(1-\sigma e^{-\epsilon_0}) + \int_{\epsilon_0}^{\infty} d\epsilon\,\log(1-\sigma e^{-\epsilon})\right). \tag{12.5}$$

Эту функцию принято записывать через так называемый *дилогарифм Роджерса*:

$$\begin{gathered}\mathrm{L}(z) = -\frac{1}{2}\int_0^z du\left(\frac{\log(1-u)}{u}+\frac{\log u}{1-u}\right) = \frac{\log z\log(1-z)}{2} - \int_0^z \frac{du}{u}\,\log(1-u) \quad (0\le z\le 1),\\ \mathrm{L}(-z) = -\mathrm{L}\left(\frac{z}{z+1}\right), \qquad \mathrm{L}(1/z) = 2\mathrm{L}(1)-\mathrm{L}(z).\end{gathered} \tag{12.6}$$

Дилогарифм Роджерса не является продолжением комплексно-аналитической функции на вещественную ось, но является монотонной непрерывной функцией, вещественно-аналитической всюду, кроме точек 0 и 1.

Имеем

$$c_{\mathrm{eff}} = -\frac{6}{\pi}f(0) = \frac{6\sigma}{\pi^2}\mathrm{L}(\sigma e^{-\epsilon_0}). \tag{12.7}$$

Надо сказать, что дилогарифм Роджерса встречается во множестве задач, связанных с термодинамическим анзацем Бете, и потому хорошо изучен. Найдено множество его специальных значений. Нам будут важны следующие равенства:

$$\mathrm{L}(0) = 0, \qquad \mathrm{L}(1) = \frac{\pi^2}{6} = \mathrm{L}(z)+\mathrm{L}(1-z), \qquad \mathrm{L}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{15}. \tag{12.8}$$

Рассмотрим несколько примеров. Начнем с тривиальных. Для свободной частицы $S(\theta)=1$, $\nu=0$ и $\epsilon_0=0$. Поэтому имеем

$$c^{FB} = c_{\mathrm{eff}}^{FB} = \frac{6}{\pi^2}\mathrm{L}(1) = 1$$

в бозонном случае и

$$c^{FF} = c_{\mathrm{eff}}^{FF} = -\frac{6}{\pi^2}\mathrm{L}(-1) = \frac{6}{\pi^2}\mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

в фермионном случае (модель Изинга в нулевом магнитном поле).

Теперь перейдем к нетривиальным случаям. Рассмотрим матрицу рассеяния бризера в модели синус-Гордона:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta + i\pi p)}{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta - i\pi p)}. \tag{12.9}$$

Начнем со случая $-1 < p < 0$, который соответствует модели sh-Гордона. Это «фермионная» S-матрица для бозонов: $S(0) = -1$. В этой модели имеется всего одна частица, так что можно прямо применять полученные формулы. В этом случае $\nu = 1$ и уравнение (12.1) не имеет решения. С помощью предельного перехода

$$\epsilon_0 + \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \equiv \log(e^{\epsilon_0} + 1) = \delta \to +0$$

мы находим $e^{\epsilon_0} = +0$. Отсюда имеем

$$c_{\text{eff}}^{ShG} = -\frac{6}{\pi^2}\mathrm{L}(-\infty) = \frac{6}{\pi^2}\mathrm{L}(1) = 1.$$

Итак, модель sh-Гордона на малых масштабах ведет себя как модель свободного безмассового бозона.

Теперь рассмотрим матрицу (12.9) при $0 < p < 1$. В отличие от предыдущего случая, здесь $\nu = -1$ и уравнение (12.1) имеет решение

$$e^{-\epsilon_0} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Отсюда получаем эффективный центральный заряд

$$c_{\text{eff}}^{LY} = \frac{2}{5}. \tag{12.10}$$

Очевидно, эта величина имеет смысл только тогда, кода спектр состоит из одной этой частицы. Спектр модели синус-Гордона содержит также солитоны и высшие бризеры (на последнее указывает полюс в $S_{11}(\theta)$). Если учесть все эти частицы, окажется, что эффективный центральный заряд модели синус-Гордона равен единице. То есть, опять же, модель синус-Гордона на малых масштабах ведет себя как свободный безмассовый бозон. Ответ (12.10) верен для случая $p = 2/3$, когда мы отождествляем связанное состояние с самой частицей 1. Этот ответ согласуется с гипотезой о том, что такая теория является возмущением теории Ли—Янга с центральным зарядом $c = -22/5$ и $\Delta_{\min} = -1/5$.

Оценим число N частиц в системе. Согласно формуле (11.30), имеем

$$\frac{N}{L} \simeq -2\frac{\partial}{\partial R}\log\frac{2}{mR}\log(1 + e^{-\epsilon_0}) \sim R^{-1}.$$

Таким образом, среднее расстояние между частицами по порядку величины равно $R \ll \xi$ и предположение (11.2) термодинамического анзаца Бете не выполнено. Возникает вопрос: почему все же термодинамический анзац Бете работает? Ответ на этот вопрос дан в работе Классена и Мельцера[19]. Они обратили внимание на то, что, как показали Дашен, Ма и Бернштейн в 1969 году [20], вириальные коэффициенты газа полностью определяются S-матрицей составляющих его частиц. Точные S-матрицы дают точные вириальные коэффициенты и, коль скоро газ не испытывает фазового перехода при повышении температуры, его статистическая сумма является аналитическим продолжением статистической суммы из области $R \gg \xi$. Это значит, что условием применимости термодинамического анзаца Бете является отсутствие фазового перехода для системы частиц, и это условие выполняется в одном пространственном измерении.

Рассмотрим теперь случай нескольких частиц с диагональной матрицей рассеяния. Уравнение (11.25) в пределе $R \to 0$ имеет вид

$$\epsilon_{0a} = \sum_b \nu_{(ab)}\sigma_b \log(1 - \sigma_b e^{-\epsilon_{0b}}), \qquad \nu_{(ab)} = \frac{1}{2}(\nu_{ab} + \nu_{ba}), \qquad \nu_{ab} = \frac{\phi_{ab}(+\infty)}{\pi}. \tag{12.11}$$

Сумма берется по всем частицам в спектре. Формула для значения в нуле скейлинговой функции $f(m_{\min}R) = R\mathscr{E}_0(R)$ и, следовательно, эффективного центрального заряда имеет почти тот же вид:

$$c_{\text{eff}} = -\frac{6}{\pi}f(0) = \frac{6}{\pi^2}\sum_a \sigma_a \mathrm{L}(\sigma_a e^{-\epsilon_{0a}}). \tag{12.12}$$

Рассмотрим теорию рассеяния бризеров в модели синус-Гордона. Как мы помним, эта теория становится замкнутой в точках $p = 2/(2N-1)$ после отождествления n-го и $(2N-1-n)$-го бризеров. Система имеет фермионный характер ($\sigma_n = -1$), а константы $\nu_{nn'}$ даются формулами

$$\nu_{nn'} = \delta_{nn'} - 2\min(n, n'). \tag{12.13}$$

Систему уравнений (12.11) удобно записать в переменных $y_n = e^{-\epsilon_{0n}}$:

$$y_n(1+y_n)^{2n-1}\prod_{m=1}^{n-1}(1+y_m)^{2m}\prod_{m=n+1}^{N-1}(1+y_m)^{2n} = 1, \qquad n = 1,\ldots,N-1. \tag{12.14}$$

От произведений по m можно избавится, переписав эту систему в виде

$$y_n^{-2} = (1+y_{n-1}^{-1})(1+y_{n+1}^{-1}) \quad (1 \le n \le N-1), \qquad y_0^{-1} = 0, \qquad y_N = y_{N-1}. \tag{12.15}$$

Полученная Y*-система* не эквивалентна системе (12.14), но, во-первых, любое решение системы (12.14) удовлетворяет системе (12.15), а во-вторых, единственное положительное ($\forall n : y_n > 0$) решение Y-системы совпадает с единственным положительным решением системы (12.14).

Для дилогарифма Роджерса есть много теорем о его значениях на решениях Y-систем.[1] В частности, система

$$y_n^{-2} = (1+y_{n-1}^{-1})(1+y_{n+1}^{-1}) \quad (1 \le n \le l-1), \qquad y_0^{-1} = y_l^{-1} = 0, \tag{12.16}$$

имеет единственное положительное решение, и на нем

$$-\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{l-1}\mathrm{L}(-y_n) = 2 - \frac{6}{l+2} \tag{12.17}$$

Если мы заметим, что при $l = 2N-1$ решение системы (12.16) является симметричным ($y_{l-n} = y_n$), то для $0 \le n \le N$ оно решает систему (12.15), а величина

$$c_{\text{eff}}^N = -\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{N-1}\mathrm{L}(-y_n) = 1 - \frac{3}{2N+1} \tag{12.18}$$

совпадает с эффективным центральным зарядом «ленточных» моделей $M(2, 2N+1)$.

Вернемся к задаче об одной частице и изучим следующие члены в разложении $f(r)$. В первом приближении надо учесть влияние второй экспоненты на кинк $\tilde\epsilon(\theta)$. Добавим вклад второй экспоненты в правую часть (12.3):

$$\tilde\epsilon(\theta) + \delta\epsilon(\theta) - \sigma\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\log(1-\sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta')-\delta\epsilon(\theta')}) = e^\theta + \left(\tfrac{mR}{2}\right)^2 e^{-\theta}.$$

В силу малости $(mR)^2$ мы можем считать этот вклад малым при $e^\theta \gg e^{-\theta_R}$. Раскладывая по $\delta\epsilon$, получаем

$$\delta\epsilon(\theta) = \left(\frac{mR}{2}\right)^2\psi_-(\theta), \tag{12.19}$$

где $\psi_-(\theta)$ является решением линейной задачи. Нам понадобится еще одна функция $\psi_+(\theta)$, поэтому определим эти функции вместе:

$$\psi_\pm(\theta) - \int\frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\frac{\psi_\pm(\theta')}{e^{\tilde\epsilon(\theta')}-\sigma} = e^{\pm\theta} \tag{12.20}$$

Заметим, что уравнение для ψ_+ получается дифференцированием уравнения (12.3) по θ, поэтому

$$\psi_+(\theta) = \tilde\epsilon'(\theta). \tag{12.21}$$

[1]Обзор этих теорем можно найти в работе [21].

Уравнение для ψ_- не удается решить аналитически. Но нужную поправку для $f(r)$ оказывается возможным выразить через ψ_+. Подставим решение $\tilde\epsilon+\delta\epsilon$ вместо $\tilde\epsilon$ в правую часть (12.4) и получим[2]

$$f(r)=f(0)+\frac{r^2}{2}\int\frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{e^\theta\psi_-(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma}.$$

Теперь в правой части выразим e^θ через ψ_+:

$$f''(0)=\int\frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{\psi_+(\theta)\psi_-(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma}-\int\frac{d\theta}{2\pi}\frac{d\theta'}{2\pi}\,\frac{\phi'(\theta-\theta')\psi_+(\theta)\psi_-(\theta')}{(e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma)(e^{\tilde\epsilon(\theta')}-\sigma)}.$$

Интегралы во втором слагаемом коммутируют. Переобозначив в нем $\theta\leftrightarrow\theta'$, мы видим, что множители, содержащие ψ_- собираются в $e^{-\theta}$. Использовав затем (12.21), получим

$$f''(0)=\int\frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{e^{-\theta}\psi_+(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma}=-\int\frac{d\theta}{2\pi}\,e^{-\theta}\tilde l'(\theta). \tag{12.22}$$

Мы видим, что интеграл определяется формой кинка на его левом крае, где $e^{-\theta}$ больше. Его нетрудно вычислить, если фаза S-матрицы спадает как

$$\phi(\theta)=-\phi(-\theta)=\pi\nu+Ae^{-\theta}+o(e^{-\theta}),\qquad\theta\to\infty. \tag{12.23}$$

В этом случае при $\theta\to-\infty$ имеем

$$e^{-\theta}\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,(\phi(\theta-\theta')+\pi\nu)\tilde l'(\theta')=-A\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,e^{-\theta'}\tilde l'(\theta')=Af''(0).$$

С другой стороны разность $\tilde\epsilon(\theta)-\epsilon_0=o(e^\theta)$ при $\theta\to-\infty$. Это немедленно следует из требования сходимости интеграла в левой части уравнения (12.3). Поэтому, взяв интеграл в левой части по частям, получим для нее

$$e^{-\theta}\left(\epsilon_0+\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\tilde l(\theta')\right)\bigg|_{\theta\to-\infty}=e^{-\theta}\left(\tilde\epsilon(\theta)+\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\tilde l(\theta')\right)\bigg|_{\theta\to-\infty}=1.$$

Следовательно,

$$f''(0)=A^{-1}=\lim_{\theta\to\infty}\Big((\phi(\theta)-\pi\nu)e^\theta\Big)^{-1}. \tag{12.24}$$

Отсюда мы можем получить плотность энергии в бесконечном объеме:

$$\varepsilon_\infty=-\frac{f''(0)m^2}{2}. \tag{12.25}$$

Для S-матрицы (12.9) имеем $A=4\sin\pi p$. Следовательно, для модели sh-Гордона ($-1<p<0$)

$$\varepsilon_\infty=\frac{m^2}{8\sin\pi(-p)}, \tag{12.26}$$

а для модели Ли—Янга

$$\varepsilon_\infty=-\frac{m^2}{4\sqrt3}. \tag{12.27}$$

Более тщательный анализ показывает, что выражение $f(r)-f(0)-\frac12 f''(0)r^2$ действительно раскладывается по целым степеням r^α с некоторым показателем $\alpha>0$, что позволяет найти конформную размерность возмущающего оператора $\Delta_\text{p}=1-\alpha/4$ для унитарной модели или $1-\alpha/2$ для неунитарной. Вычисление коэффициента при первой поправке позволяет связать константу связи λ с массой частицы m.

[2]Если мы посмотрим на формулу (11.8), мы увидим, что поправки, связанные с возмущением, могут быть больше r^2 при малых r, если $1-\Delta_\text{p}$ достаточно мало. Однако они (кроме очень специальных случаев) имеют другую аналитическую зависимость от R, поэтому здесь мы будем эти поправки игнорировать.

Задачи

1. Выведите (12.11) и (12.12).

2. Покажите, что для S-матриц бризеров в модели синус-Гордона при $0 < p < 1$ набег фазы дается формулой (12.13). Выведите (12.14), (12.15).

3. Покажите, что для моделей, описываемых бризерным сектором модели синус-Гордона в точках $p = 2/(2N-1)$ с отождествлением частиц $n \sim 2N-1-n$ величина ϵ_∞ дается формулой (12.26) с параметром $m = m_1$.

4. Покажите, что при больших значениях θ функция $\epsilon(\theta)$ имеет асимптотику вида

$$\epsilon(\theta) = \frac{mR}{2} e^\theta + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(mR)(mRe^\theta)^{-n},$$

где функции $s_n(r)$ конечны при $r \to 0$. Выразите $s_1(r)$ через $f(r)$. Покажите, что остальные коэффициенты $s_n(r)$ можно представить в виде

$$s_n(mR) = -nA_n\sigma(mR)^n \int \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{n\theta} \log(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)}), \qquad \phi(\theta) = \pi\nu + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n\theta},$$

причем $s_n(0) \neq 0$, если $A_n \neq 0$. Оцените значения $s_n(0)$ при больших n. Найдите значения n, при которых $A_n \neq 0$, для модели sh-Гордона и модели Ли—Янга.

5*. Рассмотрите модель с матрицей рассеяния фундаментальной частицы

$$S_{11}(\theta) = S_{1\bar{1}}(i\pi - \theta) = \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{2\pi i}{N}\right)}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{2\pi i}{N}\right)}, \tag{12.28}$$

где $N \geq 2$ — целое число. Эта S-матрица имеет полюс, порождающий серию связанных состояний $n = 2, 3, \ldots, N$ (см. задачу 10.5). При отождествлении $\bar{n} = N - n$, спектр замыкается ($\mathbb{Z}_N$-симметричная модель Изинга). Найдите параметры $\nu_{nn'}$ для этой теории и покажите, что эффективный центральный заряд совпадает с центральным зарядом теории $\mathbb{Z}_N$-парафермионов:

$$c = 2 - \frac{6}{N+2}. \tag{12.29}$$

Найдите также значения ϵ_∞.

Семинар 12

Вычисление вакуумной плотности энергии ε_∞ в системе из нескольких частиц

Рассмотрим модель с двумя частицами с массами m_1 и $m_2 = \kappa m_1 > m_1$. Вторая частица является связанным состоянием двух первых в полюсе S-матрицы $\theta = iu$, так что $\kappa = 2\cos\frac{\pi u}{2}$. Матрицы рассеяния диагональны. Задача состоит в том, чтобы выразить ε_∞ через асимптотики фаз $\phi_{ab}(\theta)$ и массы m_a. Получим общее выражение для $f''(0)$ через $\tilde{\epsilon}_a(\theta)$:

$$f''(0) = \sum_a \kappa_a I_a, \text{ где } I_a = -\int \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{-\theta} \tilde{l}'_a(\theta).$$

Здесь предполагается $\kappa_1 = 1$.
Положим

$$\phi_{ab}(\theta) = \pi\nu_{ab} + A_{ab}e^{-\theta} + o(e^{-\theta}) \text{ при } \theta \to +\infty.$$

Тогда величины I_a являются решениями уравнения

$$\sum_b A_{ba} I_b = \kappa_a.$$

Теперь нужно проанализировать вид асимптотик $S_{ab}(\theta)$, исходя из условий задачи, и найти $f''(0)$. Получим

$$A = A_{11}\begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & \kappa^2 \end{pmatrix} \text{ или } A_{ab} = A_{11}\kappa_a\kappa_b \;\Rightarrow\; f''(0) = A_{11}^{-1},\ \epsilon_\infty = -\frac{m_1^2}{2A_{11}}.$$