Лекция 12.
Термодинамический анзац Бете: результаты

Михаил Лашкевич

Предел высоких температур

Уравнение Янга—Янга для одной частицы

$$\epsilon(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi}\, \phi'(\theta - \theta') \log\left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta')}\right) = mR\,\mathrm{ch}\,\theta \tag{1}$$

Предел высоких температур

Уравнение Янга—Янга для одной частицы

$$\epsilon(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi}\, \phi'(\theta-\theta') \log\left(1-\sigma e^{-\epsilon(\theta')}\right) = mR\,\mathrm{ch}\,\theta \tag{1}$$

имеет постоянное решение $\epsilon(\theta)=\epsilon_0$ при $R=0$:

$$\frac{\epsilon_0}{\log(1-\sigma e^{-\epsilon_0})} = \sigma\nu, \quad \nu = \int \frac{d\theta}{2\pi}\, \phi'(\theta) = \frac{\phi(+\infty)-\phi(-\infty)}{2\pi}. \tag{2}$$

Предел высоких температур

Уравнение Янга—Янга для одной частицы

$$\epsilon(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi}\, \phi'(\theta - \theta') \log\left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta')}\right) = mR \operatorname{ch} \theta \tag{1}$$

имеет постоянное решение $\epsilon(\theta) = \epsilon_0$ при $R = 0$:

$$\frac{\epsilon_0}{\log(1 - \sigma e^{-\epsilon_0})} = \sigma\nu, \quad \nu = \int \frac{d\theta}{2\pi}\, \phi'(\theta) = \frac{\phi(+\infty) - \phi(-\infty)}{2\pi}. \tag{2}$$

Пусть теперь R мало, но не равно нулю. Тогда

$$\theta_R \simeq \log \frac{2}{mR} \gg 1. \tag{3}$$

Предел высоких температур

Уравнение Янга—Янга для одной частицы

$$\epsilon(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi}\, \phi'(\theta-\theta') \log\left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta')}\right) = mR \operatorname{ch}\theta \tag{1}$$

имеет постоянное решение $\epsilon(\theta) = \epsilon_0$ при $R = 0$:

$$\frac{\epsilon_0}{\log(1-\sigma e^{-\epsilon_0})} = \sigma\nu, \quad \nu = \int \frac{d\theta}{2\pi}\, \phi'(\theta) = \frac{\phi(+\infty) - \phi(-\infty)}{2\pi}. \tag{2}$$

Пусть теперь R мало, но не равно нулю. Тогда

$$\theta_R \simeq \log \frac{2}{mR} \gg 1. \tag{3}$$

Если $|\theta| < \theta_R - \delta$ $(\delta \sim 1)$, то $\epsilon(\theta) = \epsilon_0$.

Предел высоких температур

Уравнение Янга—Янга для одной частицы

$$\epsilon(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\log\left(1-\sigma e^{-\epsilon(\theta')}\right) = mR\,\mathrm{ch}\,\theta \tag{1}$$

имеет постоянное решение $\epsilon(\theta)=\epsilon_0$ при $R=0$:

$$\frac{\epsilon_0}{\log(1-\sigma e^{-\epsilon_0})} = \sigma\nu, \quad \nu = \int \frac{d\theta}{2\pi}\,\phi'(\theta) = \frac{\phi(+\infty)-\phi(-\infty)}{2\pi}. \tag{2}$$

Пусть теперь R мало, но не равно нулю. Тогда

$$\theta_R \simeq \log\frac{2}{mR} \gg 1. \tag{3}$$

Если $|\theta| < \theta_R - \delta$ ($\delta \sim 1$), то $\epsilon(\theta)=\epsilon_0$.
Если $|\theta| > \theta_R + \delta$, то $\epsilon(\theta) \simeq mR\,\mathrm{ch}\,\theta$.

Предел высоких температур

Уравнение Янга—Янга для одной частицы

$$\epsilon(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\log\left(1-\sigma e^{-\epsilon(\theta')}\right) = mR\,\mathrm{ch}\,\theta \tag{1}$$

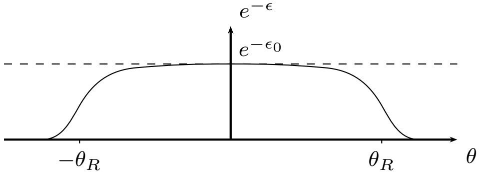
имеет постоянное решение $\epsilon(\theta) = \epsilon_0$ при $R = 0$:

$$\frac{\epsilon_0}{\log(1-\sigma e^{-\epsilon_0})} = \sigma\nu, \quad \nu = \int \frac{d\theta}{2\pi}\,\phi'(\theta) = \frac{\phi(+\infty)-\phi(-\infty)}{2\pi}. \tag{2}$$

Пусть теперь R мало, но не равно нулю. Тогда

$$\theta_R \simeq \log\frac{2}{mR} \gg 1. \tag{3}$$

Если $|\theta| < \theta_R - \delta$ ($\delta \sim 1$), то $\epsilon(\theta) = \epsilon_0$.
Если $|\theta| > \theta_R + \delta$, то $\epsilon(\theta) \simeq mR\,\mathrm{ch}\,\theta$.
Между этими областями имеются «кинки»:



«Кинк» и скейлинговая функция $f(r)$

Если θ_R достаточно велика «кинки» не чувствуют друг друга. Рассмотрим решение уравнения

$$\tilde{\epsilon}(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}) = e^{\theta}. \tag{4}$$

«Кинк» и скейлинговая функция $f(r)$

Если θ_R достаточно велика «кинки» не чувствуют друг друга. Рассмотрим решение уравнения

$$\tilde{\epsilon}(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \, \phi'(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}) = e^{\theta}. \tag{4}$$

Тогда можно использовать приближение

$$\epsilon(\theta) \simeq \tilde{\epsilon}(|\theta| - \theta_R).$$

«Кинк» и скейлинговая функция $f(r)$

Если θ_R достаточно велика «кинки» не чувствуют друг друга. Рассмотрим решение уравнения

$$\tilde{\epsilon}(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}) = e^{\theta}. \qquad (4)$$

Тогда можно использовать приближение

$$\epsilon(\theta) \simeq \tilde{\epsilon}(|\theta| - \theta_R).$$

Используем его, чтобы вычислить скейлинговую функцию $\boxed{R\mathcal{E}_0(R) = f(mR)}$

$$f(r) = \sigma r \int \frac{d\theta}{2\pi} \operatorname{ch}\theta \, \log\left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta, r)}\right). \qquad (5)$$

Если θ_R достаточно велика «кинки» не чувствуют друг друга. Рассмотрим решение уравнения

$$\tilde{\epsilon}(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}) = e^{\theta}. \tag{4}$$

Тогда можно использовать приближение

$$\epsilon(\theta) \simeq \tilde{\epsilon}(|\theta| - \theta_R).$$

Используем его, чтобы вычислить скейлинговую функцию

$$\boxed{R\mathcal{E}_0(R) = f(mR)}$$

$$f(r) = \sigma r \int \frac{d\theta}{2\pi} \operatorname{ch}\theta \, \log\left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta, r)}\right). \tag{5}$$

В силу четности $\epsilon(\theta)$ имеем

$$f(r) = \sigma r \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{\theta} \log(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)}) \tag{6}$$

Если θ_R достаточно велика «кинки» не чувствуют друг друга. Рассмотрим решение уравнения

$$\tilde{\epsilon}(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi}\, \phi'(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}) = e^{\theta}. \tag{4}$$

Тогда можно использовать приближение

$$\epsilon(\theta) \simeq \tilde{\epsilon}(|\theta| - \theta_R).$$

Используем его, чтобы вычислить скейлинговую функцию $\boxed{R\mathcal{E}_0(R) = f(mR)}$

$$f(r) = \sigma r \int \frac{d\theta}{2\pi}\, \operatorname{ch}\theta\, \log\left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta, r)}\right). \tag{5}$$

В силу четности $\epsilon(\theta)$ имеем

$$\begin{aligned} f(r) &= \sigma r \int \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{\theta} \log(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)}) \\ &\underset{r \ll 1}{\simeq} \sigma r e^{\theta_R} \int \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{\theta} \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)}) \end{aligned} \tag{6}$$

«Кинк» и скейлинговая функция $f(r)$

Если θ_R достаточно велика «кинки» не чувствуют друг друга. Рассмотрим решение уравнения

$$\tilde{\epsilon}(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi}\, \phi'(\theta-\theta') \log(1-\sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}) = e^{\theta}. \tag{4}$$

Тогда можно использовать приближение

$$\epsilon(\theta) \simeq \tilde{\epsilon}(|\theta| - \theta_R).$$

Используем его, чтобы вычислить скейлинговую функцию $\boxed{R\mathcal{E}_0(R) = f(mR)}$

$$f(r) = \sigma r \int \frac{d\theta}{2\pi}\, \operatorname{ch}\theta \, \log\left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta, r)}\right). \tag{5}$$

В силу четности $\epsilon(\theta)$ имеем

$$\boxed{e^{\theta_R} = \frac{2}{r}}$$

$$f(r) = \sigma r \int \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{\theta} \log(1-\sigma e^{-\epsilon(\theta)})$$
$$\underset{r \ll 1}{\simeq} \sigma r e^{\theta_R} \int \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{\theta} \log(1-\sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)}) = 2\sigma \int \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{\theta} \log(1-\sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)}). \tag{6}$$

«Кинк» и скейлинговая функция $f(r)$

Если θ_R достаточно велика «кинки» не чувствуют друг друга. Рассмотрим решение уравнения

$$\tilde{\epsilon}(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi}\, \phi'(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}) = e^{\theta}. \tag{4}$$

Тогда можно использовать приближение

$$\epsilon(\theta) \simeq \tilde{\epsilon}(|\theta| - \theta_R).$$

Используем его, чтобы вычислить скейлинговую функцию $\boxed{R\mathcal{E}_0(R) = f(mR)}$

$$f(r) = \sigma r \int \frac{d\theta}{2\pi}\, \mathrm{ch}\,\theta \, \log\left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta, r)}\right). \tag{5}$$

В силу четности $\epsilon(\theta)$ имеем

$$\boxed{e^{\theta_R} = \frac{2}{r}}$$

$$\begin{aligned} f(r) &= \sigma r \int \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{\theta} \log(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)}) \\ &\underset{r \ll 1}{\simeq} \sigma r e^{\theta_R} \int \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{\theta} \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)}) = 2\sigma \int \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{\theta} \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)}). \end{aligned} \tag{6}$$

Правая часть не зависит от r и дает $f(0)$. Попробуем вычислить эту величину.

$f(0)$: рецепт вычисления

Продифференцируем уравнение (4) для $\tilde{\epsilon}(\theta)$ по θ:

$$e^{\theta} = \tilde{\epsilon}'(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi}\, \phi''(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}).$$

$f(0)$: рецепт вычисления

Продифференцируем уравнение (4) для $\tilde{\epsilon}(\theta)$ по θ:

$$e^{\theta} = \tilde{\epsilon}'(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi}\, \phi''(\theta-\theta') \log(1-\sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}).$$

Теперь подставим в формулу для $f(0)$. Обозначим $\tilde{l}(\theta) = -\sigma \log(1-\sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)})$. Тогда

$$f(0) = -2\int \frac{d\theta}{2\pi}\, \tilde{\epsilon}'(\theta)\tilde{l}(\theta) - 2\int \frac{d\theta}{2\pi} \int \frac{d\theta'}{2\pi}\, \phi''(\theta-\theta')\tilde{l}(\theta)\tilde{l}(\theta') = f_1(0) + f_2(0),$$

$f(0)$: рецепт вычисления

Продифференцируем уравнение (4) для $\tilde{\epsilon}(\theta)$ по θ:

$$e^{\theta} = \tilde{\epsilon}'(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi''(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}).$$

Теперь подставим в формулу для $f(0)$. Обозначим $\tilde{l}(\theta) = -\sigma \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)})$. Тогда

$$f(0) = -2 \int \frac{d\theta}{2\pi} \tilde{\epsilon}'(\theta)\tilde{l}(\theta) - 2 \int \frac{d\theta}{2\pi} \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi''(\theta - \theta')\tilde{l}(\theta)\tilde{l}(\theta') = f_1(0) + f_2(0),$$

Первое слагаемое легко вычисляется

$$f_1(0) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{\epsilon_0}^{\infty} d\epsilon \log(1 - \sigma e^{-\epsilon}),$$

$f(0)$: рецепт вычисления

Продифференцируем уравнение (4) для $\tilde{\epsilon}(\theta)$ по θ:

$$e^\theta = \tilde{\epsilon}'(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi}\, \phi''(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}).$$

Теперь подставим в формулу для $f(0)$. Обозначим $\tilde{l}(\theta) = -\sigma \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)})$. Тогда

$$f(0) = -2 \int \frac{d\theta}{2\pi}\, \tilde{\epsilon}'(\theta)\tilde{l}(\theta) - 2 \int \frac{d\theta}{2\pi} \int \frac{d\theta'}{2\pi}\, \phi''(\theta - \theta')\tilde{l}(\theta)\tilde{l}(\theta') = f_1(0) + f_2(0),$$

Первое слагаемое легко вычисляется

$$f_1(0) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{\epsilon_0}^{\infty} d\epsilon \, \log(1 - \sigma e^{-\epsilon}),$$

А вот второе сложнее. Хотя функция $\phi''(\theta)$ нечетна, интеграл не равен нулю, потому что $\tilde{l}(\theta) \to l_0 = -\sigma \log(1 - \sigma e^{-\epsilon_0})$ при $\theta \to -\infty$. Порядок интегрирования важен.

$f(0)$: рецепт вычисления

Продифференцируем уравнение (4) для $\tilde{\epsilon}(\theta)$ по θ:

$$e^{\theta} = \tilde{\epsilon}'(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi''(\theta-\theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}).$$

Теперь подставим в формулу для $f(0)$. Обозначим $\tilde{l}(\theta) = -\sigma \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)})$. Тогда

$$f(0) = -2 \int \frac{d\theta}{2\pi} \tilde{\epsilon}'(\theta)\tilde{l}(\theta) - 2 \int \frac{d\theta}{2\pi} \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi''(\theta-\theta')\tilde{l}(\theta)\tilde{l}(\theta') = f_1(0) + f_2(0),$$

Первое слагаемое легко вычисляется

$$f_1(0) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{\epsilon_0}^{\infty} d\epsilon \, \log(1 - \sigma e^{-\epsilon}),$$

А вот второе сложнее. Хотя функция $\phi''(\theta)$ нечетна, интеграл не равен нулю, потому что $\tilde{l}(\theta) \to l_0 = -\sigma \log(1 - \sigma e^{-\epsilon_0})$ при $\theta \to -\infty$. Порядок интегрирования важен.
Запишем второе слагаемое в виде

$$f_2(0) = 2 \int \frac{d\theta}{2\pi} \tilde{l}(\theta) \frac{d}{d\theta} \int \frac{d\theta'}{2\pi} \tilde{l}(\theta') \frac{\partial}{\partial\theta'} (\phi(\theta-\theta') + \pi\nu).$$

Мы добавили слагаемое $\pi\nu$ чтобы выражение в скобках равнялось нулю при $\theta \to -\infty$.

$f(0)$: рецепт вычисления

Теперь мы можем взять второй интеграл по частям

$$f_2(0) = -2\int \frac{d\theta}{2\pi}\,\tilde{l}(\theta)\frac{d}{d\theta}\int \frac{d\theta'}{2\pi}\,(\phi(\theta-\theta') + \pi\nu)\tilde{l}'(\theta').$$

Свободный член не зависит от θ и пропадает при дифференцировании.

$f(0)$: рецепт вычисления

Теперь мы можем взять второй интеграл по частям

$$f_2(0) = -2\int \frac{d\theta}{2\pi}\,\tilde{l}(\theta)\,\frac{d}{d\theta}\int \frac{d\theta'}{2\pi}\,(\phi(\theta-\theta') + \pi\nu)\tilde{l}'(\theta').$$

Свободный член не зависит от θ и пропадает при дифференцировании. Внутренний интеграл стремиться к нулю при $\theta \to -\infty$.

Теперь мы можем взять второй интеграл по частям

$$f_2(0) = -2\int \frac{d\theta}{2\pi}\,\tilde{l}(\theta)\frac{d}{d\theta}\int \frac{d\theta'}{2\pi}\left(\phi(\theta-\theta') + \pi\nu\right)\tilde{l}'(\theta').$$

Свободный член не зависит от θ и пропадает при дифференцировании. Внутренний интеграл стремиться к нулю при $\theta \to -\infty$. Берем внешний интеграл по частям:

$$f_2(0) = \pi\nu\int \frac{d\theta\, d\theta'}{2\pi^2}\,\tilde{l}'(\theta)\tilde{l}'(\theta') + \int \frac{d\theta\, d\theta'}{2\pi^2}\,\tilde{l}'(\theta)\phi(\theta-\theta')\tilde{l}'(\theta').$$

$f(0)$: рецепт вычисления

Теперь мы можем взять второй интеграл по частям

$$f_2(0) = -2\int \frac{d\theta}{2\pi}\,\tilde{l}(\theta)\frac{d}{d\theta}\int \frac{d\theta'}{2\pi}\,(\phi(\theta-\theta') + \pi\nu)\tilde{l}'(\theta').$$

Свободный член не зависит от θ и пропадает при дифференцировании. Внутренний интеграл стремиться к нулю при $\theta \to -\infty$. Берем внешний интеграл по частям:

$$f_2(0) = \pi\nu\int \frac{d\theta\, d\theta'}{2\pi^2}\,\tilde{l}'(\theta)\tilde{l}'(\theta') + \cancel{\int \frac{d\theta\, d\theta'}{2\pi^2}\,\tilde{l}'(\theta)\phi(\theta-\theta')\tilde{l}'(\theta')}.$$

Второй член обращается в нуль в силу нечетности $\phi(\theta)$ и того, что $l'(\theta) \to 0$ при $\theta \to \pm\infty$.

$f(0)$: рецепт вычисления

Теперь мы можем взять второй интеграл по частям

$$f_2(0) = -2\int \frac{d\theta}{2\pi}\,\tilde{l}(\theta)\frac{d}{d\theta}\int \frac{d\theta'}{2\pi}\,(\phi(\theta-\theta')+\pi\nu)\tilde{l}'(\theta').$$

Свободный член не зависит от θ и пропадает при дифференцировании. Внутренний интеграл стремиться к нулю при $\theta \to -\infty$. Берем внешний интеграл по частям:

$$f_2(0) = \pi\nu\int \frac{d\theta\,d\theta'}{2\pi^2}\,\tilde{l}'(\theta)\tilde{l}'(\theta') + \cancel{\int \frac{d\theta\,d\theta'}{2\pi^2}\,\tilde{l}'(\theta)\phi(\theta-\theta')\tilde{l}'(\theta')}.$$

Второй член обращается в нуль в силу нечетности $\phi(\theta)$ и того, что $l'(\theta)\to 0$ при $\theta \to \pm\infty$. Отсюда

$$f_2(0) = \frac{\nu}{2\pi}\left(\int d\theta\,\tilde{l}'(\theta)\right)^2$$

Теперь мы можем взять второй интеграл по частям

$$f_2(0) = -2\int \frac{d\theta}{2\pi}\,\tilde{l}(\theta)\frac{d}{d\theta}\int \frac{d\theta'}{2\pi}\,(\phi(\theta-\theta')+\pi\nu)\tilde{l}'(\theta').$$

Свободный член не зависит от θ и пропадает при дифференцировании. Внутренний интеграл стремиться к нулю при $\theta \to -\infty$. Берем внешний интеграл по частям:

$$f_2(0) = \pi\nu\int \frac{d\theta\, d\theta'}{2\pi^2}\,\tilde{l}'(\theta)\tilde{l}'(\theta') + \cancel{\int \frac{d\theta\, d\theta'}{2\pi^2}\,\tilde{l}'(\theta)\phi(\theta-\theta')\tilde{l}'(\theta')}.$$

Второй член обращается в нуль в силу нечетности $\phi(\theta)$ и того, что $l'(\theta)\to 0$ при $\theta \to \pm\infty$. Отсюда

$$f_2(0) = \frac{\nu}{2\pi}\left(\int d\theta\,\tilde{l}'(\theta)\right)^2 = \frac{\nu l_0^2}{2\pi}$$

Теперь мы можем взять второй интеграл по частям

$$f_2(0) = -2\int \frac{d\theta}{2\pi}\,\tilde{l}(\theta)\frac{d}{d\theta}\int \frac{d\theta'}{2\pi}\,(\phi(\theta-\theta')+\pi\nu)\tilde{l}'(\theta').$$

Свободный член не зависит от θ и пропадает при дифференцировании. Внутренний интеграл стремиться к нулю при $\theta \to -\infty$. Берем внешний интеграл по частям:

$$f_2(0) = \pi\nu\int \frac{d\theta\, d\theta'}{2\pi^2}\,\tilde{l}'(\theta)\tilde{l}'(\theta') + \cancel{\int \frac{d\theta\, d\theta'}{2\pi^2}\,\tilde{l}'(\theta)\phi(\theta-\theta')\tilde{l}'(\theta')}.$$

Второй член обращается в нуль в силу нечетности $\phi(\theta)$ и того, что $l'(\theta) \to 0$ при $\theta \to \pm\infty$. Отсюда

$$\boxed{\epsilon_0 = -\nu l_0}$$

$$f_2(0) = \frac{\nu}{2\pi}\left(\int d\theta\,\tilde{l}'(\theta)\right)^2 = \frac{\nu l_0^2}{2\pi} = -\frac{\epsilon_0 l_0}{2\pi}.$$

$f(0)$: рецепт вычисления

Теперь мы можем взять второй интеграл по частям

$$f_2(0) = -2\int \frac{d\theta}{2\pi}\,\tilde{l}(\theta)\frac{d}{d\theta}\int \frac{d\theta'}{2\pi}\,(\phi(\theta-\theta') + \pi\nu)\tilde{l}'(\theta').$$

Свободный член не зависит от θ и пропадает при дифференцировании. Внутренний интеграл стремиться к нулю при $\theta \to -\infty$. Берем внешний интеграл по частям:

$$f_2(0) = \pi\nu \int \frac{d\theta\, d\theta'}{2\pi^2}\,\tilde{l}'(\theta)\tilde{l}'(\theta') + \cancel{\int \frac{d\theta\, d\theta'}{2\pi^2}\,\tilde{l}'(\theta)\phi(\theta-\theta')\tilde{l}'(\theta')}.$$

Второй член обращается в нуль в силу нечетности $\phi(\theta)$ и того, что $l'(\theta) \to 0$ при $\theta \to \pm\infty$. Отсюда

$$\boxed{\epsilon_0 = -\nu l_0}$$

$$f_2(0) = \frac{\nu}{2\pi}\left(\int d\theta\,\tilde{l}'(\theta)\right)^2 = \frac{\nu l_0^2}{2\pi} = -\frac{\epsilon_0 l_0}{2\pi}.$$

Окончательно получаем

$$f(0) = \frac{\sigma}{\pi}\left(\frac{\epsilon_0}{2}\log(1-\sigma e^{-\epsilon_0}) + \int_{\epsilon_0}^{\infty} d\epsilon\,\log(1-\sigma e^{-\epsilon})\right). \tag{7}$$

Дилогарифм Роджерса

Запишем ответ через дилогарифм Роджерса, определенный соотношениями

$$\mathrm{L}(z) = -\frac{1}{2}\int_0^z du\left(\frac{\log(1-u)}{u} + \frac{\log u}{1-u}\right) = \frac{\log z\log(1-z)}{2} - \int_0^z \frac{du}{u}\,\log(1-u) \qquad (0 \le z \le 1), \tag{8}$$

Запишем ответ через дилогарифм Роджерса, определенный соотношениями

$$\mathrm{L}(z) = -\frac{1}{2}\int_0^z du\left(\frac{\log(1-u)}{u}+\frac{\log u}{1-u}\right) = \frac{\log z\log(1-z)}{2} - \int_0^z \frac{du}{u}\log(1-u) \qquad (0\le z\le 1),$$

$$\mathrm{L}(-z) = -\mathrm{L}\left(\frac{z}{z+1}\right), \quad \mathrm{L}(1/z) = 2\mathrm{L}(1) - \mathrm{L}(z). \tag{8}$$

Дилогарифм Роджерса

Запишем ответ через дилогарифм Роджерса, определенный соотношениями

$$\mathrm{L}(z) = -\frac{1}{2}\int_0^z du\left(\frac{\log(1-u)}{u} + \frac{\log u}{1-u}\right) = \frac{\log z \log(1-z)}{2} - \int_0^z \frac{du}{u}\log(1-u) \qquad (0 \le z \le 1),$$

$$\mathrm{L}(-z) = -\mathrm{L}\left(\frac{z}{z+1}\right), \quad \mathrm{L}(1/z) = 2\mathrm{L}(1) - \mathrm{L}(z). \tag{8}$$

Имеем

$$f(0) = -\frac{\sigma}{\pi}\mathrm{L}(\sigma e^{-\epsilon_0}) \quad \Rightarrow \quad c_{\text{eff}} = \frac{6\sigma}{\pi^2}\mathrm{L}(\sigma e^{-\epsilon_0}). \tag{9}$$

Запишем ответ через дилогарифм Роджерса, определенный соотношениями

$$\mathrm{L}(z) = -\frac{1}{2}\int_0^z du\,\left(\frac{\log(1-u)}{u} + \frac{\log u}{1-u}\right) = \frac{\log z \log(1-z)}{2} - \int_0^z \frac{du}{u}\,\log(1-u) \qquad (0 \le z \le 1),$$

$$\mathrm{L}(-z) = -\mathrm{L}\left(\frac{z}{z+1}\right), \quad \mathrm{L}(1/z) = 2\mathrm{L}(1) - \mathrm{L}(z). \tag{8}$$

Имеем

$$f(0) = -\frac{\sigma}{\pi}\mathrm{L}(\sigma e^{-\epsilon_0}) \quad \Rightarrow \quad c_{\text{eff}} = \frac{6\sigma}{\pi^2}\mathrm{L}(\sigma e^{-\epsilon_0}). \tag{9}$$

Дилогарифм Роджерса хорошо изучен, про него доказано множество теорем. Нам понадобятся простейшие свойства:

$$\mathrm{L}(0) = 0, \quad \mathrm{L}(1) = \frac{\pi^2}{6} = \mathrm{L}(z) + \mathrm{L}(1-z), \quad \mathrm{L}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{15}. \tag{10}$$

Запишем ответ через дилогарифм Роджерса, определенный соотношениями

$$\mathrm{L}(z) = -\frac{1}{2}\int_0^z du\left(\frac{\log(1-u)}{u} + \frac{\log u}{1-u}\right) = \frac{\log z\log(1-z)}{2} - \int_0^z \frac{du}{u}\log(1-u) \qquad (0 \le z \le 1),$$

$$\mathrm{L}(-z) = -\mathrm{L}\left(\frac{z}{z+1}\right), \quad \mathrm{L}(1/z) = 2\mathrm{L}(1) - \mathrm{L}(z). \tag{8}$$

Имеем

$$f(0) = -\frac{\sigma}{\pi}\mathrm{L}(\sigma e^{-\epsilon_0}) \quad \Rightarrow \quad c_{\mathrm{eff}} = \frac{6\sigma}{\pi^2}\mathrm{L}(\sigma e^{-\epsilon_0}). \tag{9}$$

Дилогарифм Роджерса хорошо изучен, про него доказано множество теорем. Нам понадобятся простейшие свойства:

$$\mathrm{L}(0) = 0, \quad \mathrm{L}(1) = \frac{\pi^2}{6} = \mathrm{L}(z) + \mathrm{L}(1-z), \quad \mathrm{L}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{15}. \tag{10}$$

Для свободной частицы $S(\theta) = 1$, $\nu = 0$ и $\epsilon_0 = 0$. Для нейтрального бозона имеем

$$c^{FB} = c^{FB}_{\mathrm{eff}} = \frac{6}{\pi^2}\mathrm{L}(1) = 1.$$

Запишем ответ через дилогарифм Роджерса, определенный соотношениями

$$\mathrm{L}(z)=-\frac{1}{2}\int_0^z du\left(\frac{\log(1-u)}{u}+\frac{\log u}{1-u}\right)=\frac{\log z\log(1-z)}{2}-\int_0^z\frac{du}{u}\log(1-u)\qquad(0\le z\le 1),$$

$$\mathrm{L}(-z)=-\mathrm{L}\left(\frac{z}{z+1}\right),\quad \mathrm{L}(1/z)=2\mathrm{L}(1)-\mathrm{L}(z).\tag{8}$$

Имеем

$$f(0)=-\frac{\sigma}{\pi}\mathrm{L}(\sigma e^{-\epsilon_0})\quad\Rightarrow\quad c_{\mathrm{eff}}=\frac{6\sigma}{\pi^2}\mathrm{L}(\sigma e^{-\epsilon_0}).\tag{9}$$

Дилогарифм Роджерса хорошо изучен, про него доказано множество теорем. Нам понадобятся простейшие свойства:

$$\mathrm{L}(0)=0,\quad \mathrm{L}(1)=\frac{\pi^2}{6}=\mathrm{L}(z)+\mathrm{L}(1-z),\quad \mathrm{L}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=-\frac{\pi^2}{15}.\tag{10}$$

Для свободной частицы $S(\theta)=1$, $\nu=0$ и $\epsilon_0=0$. Для нейтрального бозона имеем

$$c^{FB}=c^{FB}_{\mathrm{eff}}=\frac{6}{\pi^2}\mathrm{L}(1)=1.$$

Для майорановского фермиона (= модель Изинга в нулевом магнитном поле) имеем

$$c^{FF}=c^{FF}_{\mathrm{eff}}=-\frac{6}{\pi^2}\mathrm{L}(-1)=\frac{6}{\pi^2}\mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим матрицу рассеяния бризера в модели синус-Гордона:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th} \frac{1}{2}(\theta + i\pi p)}{\operatorname{th} \frac{1}{2}(\theta - i\pi p)}. \tag{11}$$

Модели sh-Гордона и Ли—Янга

Рассмотрим матрицу рассеяния бризера в модели синус-Гордона:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta + i\pi p)}{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta - i\pi p)}. \tag{11}$$

При $-1 < p < 0$ эта матрица рассеяния описывает модель sh-Гордона. Для нее имеем $\sigma = S(0) = -1$ и $\nu = 1$.

Модели sh-Гордона и Ли—Янга

Рассмотрим матрицу рассеяния бризера в модели синус-Гордона:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta + i\pi p)}{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta - i\pi p)}. \tag{11}$$

При $-1 < p < 0$ эта матрица рассеяния описывает модель sh-Гордона. Для нее имеем $\sigma = S(0) = -1$ и $\nu = 1$. Уравнение $\epsilon_0 = -\log(1 + e^{-\epsilon_0})$ не имеет решения.

Рассмотрим матрицу рассеяния бризера в модели синус-Гордона:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta + i\pi p)}{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta - i\pi p)}. \tag{11}$$

При $-1 < p < 0$ эта матрица рассеяния описывает модель sh-Гордона. Для нее имеем $\sigma = S(0) = -1$ и $\nu = 1$. Уравнение $\epsilon_0 = -\log(1 + e^{-\epsilon_0})$ не имеет решения. С помощью предельного перехода

$$\epsilon_0 + \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \equiv \log(e^{\epsilon_0} + 1) = \delta \to +0$$

мы находим $e^{\epsilon_0} = +0 \;\Rightarrow\; e^{-\epsilon_0} = +\infty$.

Рассмотрим матрицу рассеяния бризера в модели синус-Гордона:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th} \frac{1}{2}(\theta + i\pi p)}{\operatorname{th} \frac{1}{2}(\theta - i\pi p)}. \tag{11}$$

При $-1 < p < 0$ эта матрица рассеяния описывает модель sh-Гордона. Для нее имеем $\sigma = S(0) = -1$ и $\nu = 1$. Уравнение $\epsilon_0 = -\log(1 + e^{-\epsilon_0})$ не имеет решения. С помощью предельного перехода

$$\epsilon_0 + \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \equiv \log(e^{\epsilon_0} + 1) = \delta \to +0$$

мы находим $e^{\epsilon_0} = +0 \;\Rightarrow\; e^{-\epsilon_0} = +\infty$. Отсюда имеем

$$c_{\text{eff}}^{ShG} = -\frac{6}{\pi^2}\mathrm{L}(-\infty) = \frac{6}{\pi^2}\mathrm{L}(1) = 1.$$

Итак, модель sh-Гордона на малых масштабах ведет себя как модель свободного безмассового бозона.

Рассмотрим матрицу рассеяния бризера в модели синус-Гордона:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th} \frac{1}{2}(\theta + i\pi p)}{\operatorname{th} \frac{1}{2}(\theta - i\pi p)}. \tag{11}$$

При $-1 < p < 0$ эта матрица рассеяния описывает модель sh-Гордона. Для нее имеем $\sigma = S(0) = -1$ и $\nu = 1$. Уравнение $\epsilon_0 = -\log(1 + e^{-\epsilon_0})$ не имеет решения. С помощью предельного перехода

$$\epsilon_0 + \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \equiv \log(e^{\epsilon_0} + 1) = \delta \to +0$$

мы находим $e^{\epsilon_0} = +0 \;\Rightarrow\; e^{-\epsilon_0} = +\infty$. Отсюда имеем

$$c_{\text{eff}}^{ShG} = -\frac{6}{\pi^2}\mathrm{L}(-\infty) = \frac{6}{\pi^2}\mathrm{L}(1) = 1.$$

Итак, модель sh-Гордона на малых масштабах ведет себя как модель свободного безмассового бозона.

Теперь рассмотрим случай $0 < p < 1$. В этом случае $\nu = -1$,

Рассмотрим матрицу рассеяния бризера в модели синус-Гордона:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta + i\pi p)}{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta - i\pi p)}. \tag{11}$$

При $-1 < p < 0$ эта матрица рассеяния описывает модель sh-Гордона. Для нее имеем $\sigma = S(0) = -1$ и $\nu = 1$. Уравнение $\epsilon_0 = -\log(1 + e^{-\epsilon_0})$ не имеет решения. С помощью предельного перехода

$$\epsilon_0 + \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \equiv \log(e^{\epsilon_0} + 1) = \delta \to +0$$

мы находим $e^{\epsilon_0} = +0 \;\Rightarrow\; e^{-\epsilon_0} = +\infty$. Отсюда имеем

$$c_{\mathrm{eff}}^{ShG} = -\frac{6}{\pi^2}\mathrm{L}(-\infty) = \frac{6}{\pi^2}\mathrm{L}(1) = 1.$$

Итак, модель sh-Гордона на малых масштабах ведет себя как модель свободного безмассового бозона.

Теперь рассмотрим случай $0 < p < 1$. В этом случае $\nu = -1$, а уравнение $\epsilon_0 = \log(1 + e^{-\epsilon_0})$ имеет решение

$$e^{-\epsilon_0} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Рассмотрим матрицу рассеяния бризера в модели синус-Гордона:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th} \frac{1}{2}(\theta + i\pi p)}{\operatorname{th} \frac{1}{2}(\theta - i\pi p)}. \tag{11}$$

При $-1 < p < 0$ эта матрица рассеяния описывает модель sh-Гордона. Для нее имеем $\sigma = S(0) = -1$ и $\nu = 1$. Уравнение $\epsilon_0 = -\log(1 + e^{-\epsilon_0})$ не имеет решения. С помощью предельного перехода

$$\epsilon_0 + \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \equiv \log(e^{\epsilon_0} + 1) = \delta \to +0$$

мы находим $e^{\epsilon_0} = +0 \;\Rightarrow\; e^{-\epsilon_0} = +\infty$. Отсюда имеем

$$c_{\text{eff}}^{ShG} = -\frac{6}{\pi^2}\mathrm{L}(-\infty) = \frac{6}{\pi^2}\mathrm{L}(1) = 1.$$

Итак, модель sh-Гордона на малых масштабах ведет себя как модель свободного безмассового бозона.

Теперь рассмотрим случай $0 < p < 1$. В этом случае $\nu = -1$, а уравнение $\epsilon_0 = \log(1 + e^{-\epsilon_0})$ имеет решение

$$e^{-\epsilon_0} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Отсюда получаем

$$c_{\text{eff}}^{LY} = 2/5, \tag{12}$$

что имеет смысл для редуцированной модели при $p = 2/3$, когда эта частица — единственная.

Рассмотрим матрицу рассеяния бризера в модели синус-Гордона:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th} \frac{1}{2}(\theta + i\pi p)}{\operatorname{th} \frac{1}{2}(\theta - i\pi p)}. \tag{11}$$

При $-1 < p < 0$ эта матрица рассеяния описывает модель sh-Гордона. Для нее имеем $\sigma = S(0) = -1$ и $\nu = 1$. Уравнение $\epsilon_0 = -\log(1 + e^{-\epsilon_0})$ не имеет решения. С помощью предельного перехода

$$\epsilon_0 + \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \equiv \log(e^{\epsilon_0} + 1) = \delta \to +0$$

мы находим $e^{\epsilon_0} = +0 \;\Rightarrow\; e^{-\epsilon_0} = +\infty$. Отсюда имеем

$$c_{\text{eff}}^{ShG} = -\frac{6}{\pi^2}\mathrm{L}(-\infty) = \frac{6}{\pi^2}\mathrm{L}(1) = 1.$$

Итак, модель sh-Гордона на малых масштабах ведет себя как модель свободного безмассового бозона.

Теперь рассмотрим случай $0 < p < 1$. В этом случае $\nu = -1$, а уравнение $\epsilon_0 = \log(1 + e^{-\epsilon_0})$ имеет решение

$$e^{-\epsilon_0} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Отсюда получаем

$$c_{\text{eff}}^{LY} = 2/5, \tag{12}$$

что имеет смысл для редуцированной модели при $p = 2/3$, когда эта частица — единственная. Этот эффективный заряд соответствует модели Ли—Янга с $c = -22/5$ и $\Delta_{\min} = -1/5$.

Проблема плотности частиц

Оценим число N частиц в системе. Согласно формуле

$$\frac{N}{L} = \sigma \frac{\partial}{\partial R} \int \frac{d\theta}{2\pi} \log\left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta, mR)}\right)$$

Проблема плотности частиц

Оценим число N частиц в системе. Согласно формуле

$$\frac{N}{L} = \sigma \frac{\partial}{\partial R} \int \frac{d\theta}{2\pi} \log\left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta, mR)}\right)$$

имеем

$$\frac{N}{L} \simeq -2 \frac{\partial}{\partial R} \log \frac{2}{mR} \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \sim R^{-1}.$$

Проблема плотности частиц

Оценим число N частиц в системе. Согласно формуле

$$\frac{N}{L} = \sigma \frac{\partial}{\partial R} \int \frac{d\theta}{2\pi} \log\left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta, mR)}\right)$$

имеем

$$\frac{N}{L} \simeq -2 \frac{\partial}{\partial R} \log \frac{2}{mR} \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \sim R^{-1}.$$

Таким образом, среднее расстояние между частицами по порядку величины равно $R \ll \xi$ и, таким образом, предположение

$$N\xi \ll L$$

термодинамического анзаца Бете не выполнено.

Проблема плотности частиц

Оценим число N частиц в системе. Согласно формуле

$$\frac{N}{L} = \sigma \frac{\partial}{\partial R} \int \frac{d\theta}{2\pi} \log\left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta, mR)}\right)$$

имеем

$$\frac{N}{L} \simeq -2 \frac{\partial}{\partial R} \log \frac{2}{mR} \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \sim R^{-1}.$$

Таким образом, среднее расстояние между частицами по порядку величины равно $R \ll \xi$ и, таким образом, предположение

$$N\xi \ll L$$

термодинамического анзаца Бете не выполнено. Возникает вопрос, почему все же термодинамический анзац Бете работает.

Проблема плотности частиц

Оценим число N частиц в системе. Согласно формуле

$$\frac{N}{L} = \sigma \frac{\partial}{\partial R} \int \frac{d\theta}{2\pi} \log\left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta, mR)}\right)$$

имеем

$$\frac{N}{L} \simeq -2 \frac{\partial}{\partial R} \log \frac{2}{mR} \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \sim R^{-1}.$$

Таким образом, среднее расстояние между частицами по порядку величины равно $R \ll \xi$ и, таким образом, предположение

$$N\xi \ll L$$

термодинамического анзаца Бете не выполнено. Возникает вопрос, почему все же термодинамический анзац Бете работает. Ответ на этот вопрос дан в работе Классена и Мельцера (1990). Они обратили внимание на то, что, как показали Дашен, Ма и Бернштейн в 1969 году, вириальные коэффициенты газа полностью определяются S-матрицей составляющих его частиц.

Проблема плотности частиц

Оценим число N частиц в системе. Согласно формуле

$$\frac{N}{L} = \sigma \frac{\partial}{\partial R} \int \frac{d\theta}{2\pi} \log\left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta, mR)}\right)$$

имеем

$$\frac{N}{L} \simeq -2 \frac{\partial}{\partial R} \log \frac{2}{mR} \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \sim R^{-1}.$$

Таким образом, среднее расстояние между частицами по порядку величины равно $R \ll \xi$ и, таким образом, предположение

$$N\xi \ll L$$

термодинамического анзаца Бете не выполнено. Возникает вопрос, почему все же термодинамический анзац Бете работает. Ответ на этот вопрос дан в работе Классена и Мельцера (1990). Они обратили внимание на то, что, как показали Дашен, Ма и Бернштейн в 1969 году, вириальные коэффициенты газа полностью определяются S-матрицей составляющих его частиц. Точные S-матрицы дают точные вириальные коэффициенты и, коль скоро газ не испытывает фазового перехода при повышении температуры, его статистическая сумма является аналитическим продолжением статистической суммы из области $R \gg \xi$.

Проблема плотности частиц

Оценим число N частиц в системе. Согласно формуле

$$\frac{N}{L} = \sigma \frac{\partial}{\partial R} \int \frac{d\theta}{2\pi} \log\left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta, mR)}\right)$$

имеем

$$\frac{N}{L} \simeq -2 \frac{\partial}{\partial R} \log \frac{2}{mR} \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \sim R^{-1}.$$

Таким образом, среднее расстояние между частицами по порядку величины равно $R \ll \xi$ и, таким образом, предположение

$$N\xi \ll L$$

термодинамического анзаца Бете не выполнено. Возникает вопрос, почему все же термодинамический анзац Бете работает. Ответ на этот вопрос дан в работе Классена и Мельцера (1990). Они обратили внимание на то, что, как показали Дашен, Ма и Бернштейн в 1969 году, вириальные коэффициенты газа полностью определяются S-матрицей составляющих его частиц. Точные S-матрицы дают точные вириальные коэффициенты и, коль скоро газ не испытывает фазового перехода при повышении температуры, его статистическая сумма является аналитическим продолжением статистической суммы из области $R \gg \xi$. Это значит, что условием применимости термодинамического анзаца Бете является отсутствие фазового перехода для одномерного газа.

Несколько частиц с диагональной S-матрицей

Рассмотрим систему частиц $a = 1, \ldots, r$ с диагональной S-матрицей $S_{ab}(\theta) = Z_{ab} e^{i\phi_{ab}(\theta)}$ и параметрами $\sigma_a = \pm$.

Несколько частиц с диагональной S-матрицей

Рассмотрим систему частиц $a = 1, \ldots, r$ с диагональной S-матрицей $S_{ab}(\theta) = Z_{ab} e^{i\phi_{ab}(\theta)}$ и параметрами $\sigma_a = \pm$. При $R = 0$ уравнения Янга—Янга сводятся к системе алгебраических уравнений

$$\epsilon_{0a} = \sum_{b=1}^{r} \nu_{ab} \sigma_b \log(1 - \sigma_b e^{-\epsilon_{0b}}), \qquad \nu_{ab} = \frac{\phi_{ab}(+\infty) - \phi_{ab}(-\infty)}{2\pi}. \tag{13}$$

Рассмотрим систему частиц $a = 1, \dots, r$ с диагональной S-матрицей $S_{ab}(\theta) = Z_{ab} e^{i\phi_{ab}(\theta)}$ и параметрами $\sigma_a = \pm$. При $R = 0$ уравнения Янга—Янга сводятся к системе алгебраических уравнений

$$\epsilon_{0a} = \sum_{b=1}^{r} \nu_{ab} \sigma_b \log(1 - \sigma_b e^{-\epsilon_{0b}}), \qquad \nu_{ab} = \frac{\phi_{ab}(+\infty) - \phi_{ab}(-\infty)}{2\pi}. \tag{13}$$

Для скейлинговой функции $f(m_{\min} R) = R\mathcal{E}_0(R)$ значение $f(0)$ дается формулой

$$f(0) = -\frac{1}{\pi} \sum_a \sigma_a \mathrm{L}(\sigma_a e^{-\epsilon_{0a}}). \tag{14}$$

Рассмотрим систему частиц $a = 1, \ldots, r$ с диагональной S-матрицей $S_{ab}(\theta) = Z_{ab} e^{i\phi_{ab}(\theta)}$ и параметрами $\sigma_a = \pm$. При $R = 0$ уравнения Янга—Янга сводятся к системе алгебраических уравнений

$$\epsilon_{0a} = \sum_{b=1}^{r} \nu_{ab} \sigma_b \log(1 - \sigma_b e^{-\epsilon_{0b}}), \qquad \nu_{ab} = \frac{\phi_{ab}(+\infty) - \phi_{ab}(-\infty)}{2\pi}. \tag{13}$$

Для скейлинговой функции $f(m_{\min} R) = R\mathcal{E}_0(R)$ значение $f(0)$ дается формулой

$$f(0) = -\frac{1}{\pi} \sum_a \sigma_a \mathrm{L}(\sigma_a e^{-\epsilon_{0a}}). \tag{14}$$

Рассмотрим теорию рассеяния бризеров в модели синус-Гордона. Эта теория замкнута при $p = 2/(2N-1)$, если отождествить n-й и $(2N-1-n)$-й бризеры.

Рассмотрим систему частиц $a = 1, \dots, r$ с диагональной S-матрицей $S_{ab}(\theta) = Z_{ab}e^{i\phi_{ab}(\theta)}$ и параметрами $\sigma_a = \pm$. При $R = 0$ уравнения Янга—Янга сводятся к системе алгебраических уравнений

$$\epsilon_{0a} = \sum_{b=1}^{r} \nu_{ab}\sigma_b \log(1 - \sigma_b e^{-\epsilon_{0b}}), \qquad \nu_{ab} = \frac{\phi_{ab}(+\infty) - \phi_{ab}(-\infty)}{2\pi}. \tag{13}$$

Для скейлинговой функции $f(m_{\min}R) = R\mathcal{E}_0(R)$ значение $f(0)$ дается формулой

$$f(0) = -\frac{1}{\pi}\sum_a \sigma_a \mathrm{L}(\sigma_a e^{-\epsilon_{0a}}). \tag{14}$$

Рассмотрим теорию рассеяния бризеров в модели синус-Гордона. Эта теория замкнута при $p = 2/(2N-1)$, если отождествить n-й и $(2N-1-n)$-й бризеры. Константы $\nu_{nn'}$ даются формулами

$$\nu_{nn'} = \delta_{nn'} - 2\min(n, n'). \tag{15}$$

Рассмотрим систему частиц $a = 1, \ldots, r$ с диагональной S-матрицей $S_{ab}(\theta) = Z_{ab} e^{i\phi_{ab}(\theta)}$ и параметрами $\sigma_a = \pm$. При $R = 0$ уравнения Янга—Янга сводятся к системе алгебраических уравнений

$$\epsilon_{0a} = \sum_{b=1}^{r} \nu_{ab} \sigma_b \log(1 - \sigma_b e^{-\epsilon_{0b}}), \qquad \nu_{ab} = \frac{\phi_{ab}(+\infty) - \phi_{ab}(-\infty)}{2\pi}. \tag{13}$$

Для скейлинговой функции $f(m_{\min} R) = R\mathcal{E}_0(R)$ значение $f(0)$ дается формулой

$$f(0) = -\frac{1}{\pi} \sum_a \sigma_a \mathrm{L}(\sigma_a e^{-\epsilon_{0a}}). \tag{14}$$

Рассмотрим теорию рассеяния бризеров в модели синус-Гордона. Эта теория замкнута при $p = 2/(2N-1)$, если отождествить n-й и $(2N-1-n)$-й бризеры. Константы $\nu_{nn'}$ даются формулами

$$\nu_{nn'} = \delta_{nn'} - 2\min(n, n'). \tag{15}$$

Возьмем экспоненту от уравнений (13) и запишем их в переменных $y_n = e^{-\epsilon_{0n}}$:

$$y_n (1 + y_n)^{2n-1} \prod_{m=1}^{n-1} (1 + y_m)^{2m} \prod_{m=n+1}^{N-1} (1 + y_m)^{2n} = 1, \quad n = 1, \ldots, N-1. \tag{16}$$

Y-система

Эту систему можно переписать в виде

$$y_n^{-2} = (1 + y_{n-1}^{-1})(1 + y_{n+1}^{-1}) \quad (1 \le n \le N-1), \quad y_0^{-1} = 0, \quad y_N = y_{N-1}. \quad (17)$$

Эту систему можно переписать в виде

$$y_n^{-2} = (1 + y_{n-1}^{-1})(1 + y_{n+1}^{-1}) \quad (1 \le n \le N-1), \quad y_0^{-1} = 0, \quad y_N = y_{N-1}. \tag{17}$$

Системы неэквивалентны, но единственное положительное решение этой системы совпадает с единственным положительным решением предыдущей системы.

Эту систему можно переписать в виде

$$y_n^{-2} = (1 + y_{n-1}^{-1})(1 + y_{n+1}^{-1}) \quad (1 \le n \le N - 1), \quad y_0^{-1} = 0, \quad y_N = y_{N-1}. \tag{17}$$

Системы неэквивалентны, но единственное положительное решение этой системы совпадает с единственным положительным решением предыдущей системы.

Теорема (об Y-системе)

Система

$$y_n^{-2} = (1 + y_{n-1}^{-1})(1 + y_{n+1}^{-1}) \quad (1 \le n \le l - 1), \quad y_0^{-1} = y_l^{-1} = 0, \tag{18}$$

имеет единственное положительное решение, и

$$-\frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{l-1} \mathrm{L}(-y_n) = 2 - \frac{6}{l+2} \tag{19}$$

Эту систему можно переписать в виде

$$y_n^{-2} = (1 + y_{n-1}^{-1})(1 + y_{n+1}^{-1}) \quad (1 \le n \le N-1), \quad y_0^{-1} = 0, \quad y_N = y_{N-1}. \tag{17}$$

Системы неэквивалентны, но единственное положительное решение этой системы совпадает с единственным положительным решением предыдущей системы.

Теорема (об Y-системе)

Система

$$y_n^{-2} = (1 + y_{n-1}^{-1})(1 + y_{n+1}^{-1}) \quad (1 \le n \le l-1), \quad y_0^{-1} = y_l^{-1} = 0, \tag{18}$$

имеет единственное положительное решение, и

$$-\frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{l-1} \mathrm{L}(-y_n) = 2 - \frac{6}{l+2} \tag{19}$$

Полагая $l = 2N - 1$, находим

$$c_{\mathrm{eff}}^N = -\frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{N-1} \mathrm{L}(-y_n) = 1 - \frac{3}{2N+1}, \tag{20}$$

Эту систему можно переписать в виде

$$y_n^{-2} = (1 + y_{n-1}^{-1})(1 + y_{n+1}^{-1}) \quad (1 \le n \le N-1), \quad y_0^{-1} = 0, \quad y_N = y_{N-1}. \qquad (17)$$

Системы неэквивалентны, но единственное положительное решение этой системы совпадает с единственным положительным решением предыдущей системы.

Теорема (об Y-системе)

Система

$$y_n^{-2} = (1 + y_{n-1}^{-1})(1 + y_{n+1}^{-1}) \quad (1 \le n \le l-1), \quad y_0^{-1} = y_l^{-1} = 0, \qquad (18)$$

имеет единственное положительное решение, и

$$-\frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{l-1} \mathrm{L}(-y_n) = 2 - \frac{6}{l+2} \qquad (19)$$

Полагая $l = 2N-1$, находим

$$c_{\mathrm{eff}}^N = -\frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{N-1} \mathrm{L}(-y_n) = 1 - \frac{3}{2N+1}, \qquad (20)$$

что совпадает с эффективными центральными зарядами минимальных моделей $M(2, 2N+1)$ с

$$c = 1 - \frac{3(2N-1)^2}{2N+1}, \qquad \Delta_{\min} = \Delta_{1N} = -\frac{N(N-1)}{2(2N+1)}.$$

Следующие члены в разложении $f(r)$

Пусть $\epsilon(\theta_R + \theta) = \tilde{\epsilon}(\theta) + \delta\epsilon(\theta)$.

Следующие члены в разложении $f(r)$

Пусть $\epsilon(\theta_R+\theta)=\tilde\epsilon(\theta)+\delta\epsilon(\theta)$. Тогда уравнение Янга—Янга имеет вид

$$\tilde\epsilon(\theta)+\delta\epsilon(\theta)-\sigma\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\log(1-\sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta')-\delta\epsilon(\theta')})=e^\theta+\left(\frac{mR}{2}\right)^2e^{-\theta}.$$

Следующие члены в разложении $f(r)$

Пусть $\epsilon(\theta_R+\theta)=\tilde\epsilon(\theta)+\delta\epsilon(\theta)$. Тогда уравнение Янга—Янга имеет вид

$$\tilde\epsilon(\theta)+\delta\epsilon(\theta)-\sigma\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\log(1-\sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta')-\delta\epsilon(\theta')})=e^{\theta}+\left(\frac{mR}{2}\right)^2e^{-\theta}.$$

В окрестности правого «кинка» разложим уравнение по $\delta\epsilon$. Получаем

$$\delta\epsilon(\theta)=\left(\frac{mR}{2}\right)^2\psi_-(\theta),\quad \psi_\pm(\theta)-\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\frac{\psi_\pm(\theta')}{e^{\tilde\epsilon(\theta')}-\sigma}=e^{\pm\theta} \tag{21}$$

Следующие члены в разложении $f(r)$

Пусть $\epsilon(\theta_R+\theta)=\tilde\epsilon(\theta)+\delta\epsilon(\theta)$. Тогда уравнение Янга—Янга имеет вид

$$\tilde\epsilon(\theta)+\delta\epsilon(\theta)-\sigma\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\log(1-\sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta')-\delta\epsilon(\theta')})=e^{\theta}+\left(\frac{mR}{2}\right)^2 e^{-\theta}.$$

В окрестности правого «кинка» разложим уравнение по $\delta\epsilon$. Получаем

$$\delta\epsilon(\theta)=\left(\frac{mR}{2}\right)^2\psi_-(\theta),\qquad \psi_\pm(\theta)-\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\frac{\psi_\pm(\theta')}{e^{\tilde\epsilon(\theta')}-\sigma}=e^{\pm\theta}\tag{21}$$

Уравнение для $\psi_+(\theta)$ получается дифференцированием уравнения для $\tilde\epsilon(\theta)$ по θ. Следовательно

$$\psi_+(\theta)=\tilde\epsilon'(\theta).\tag{22}$$

Следующие члены в разложении $f(r)$

Пусть $\epsilon(\theta_R+\theta)=\tilde\epsilon(\theta)+\delta\epsilon(\theta)$. Тогда уравнение Янга—Янга имеет вид

$$\tilde\epsilon(\theta)+\delta\epsilon(\theta)-\sigma\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\log(1-\sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta')-\delta\epsilon(\theta')})=e^{\theta}+\left(\frac{mR}{2}\right)^2e^{-\theta}.$$

В окрестности правого «кинка» разложим уравнение по $\delta\epsilon$. Получаем

$$\delta\epsilon(\theta)=\left(\frac{mR}{2}\right)^2\psi_-(\theta),\qquad\psi_\pm(\theta)-\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\frac{\psi_\pm(\theta')}{e^{\tilde\epsilon(\theta')}-\sigma}=e^{\pm\theta}\qquad(21)$$

Уравнение для $\psi_+(\theta)$ получается дифференцированием уравнения для $\tilde\epsilon(\theta)$ по θ. Следовательно

$$\psi_+(\theta)=\tilde\epsilon'(\theta).\qquad(22)$$

Теперь подставим $\tilde\epsilon+\delta\epsilon$ вместо $\tilde\epsilon$ в выражение для $f(r)$:

$$f(r)=2\sigma\int\frac{d\theta}{2\pi}\,e^{\theta}\log(1-\sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta)-\delta\epsilon(\theta)})=f(0)+\frac{r^2}{2}\int\frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{e^{\theta}\psi_-(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma}.$$

Следующие члены в разложении $f(r)$

Пусть $\epsilon(\theta_R+\theta)=\tilde\epsilon(\theta)+\delta\epsilon(\theta)$. Тогда уравнение Янга—Янга имеет вид

$$\tilde\epsilon(\theta)+\delta\epsilon(\theta)-\sigma\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\log(1-\sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta')-\delta\epsilon(\theta')})=e^\theta+\left(\frac{mR}{2}\right)^2e^{-\theta}.$$

В окрестности правого «кинка» разложим уравнение по $\delta\epsilon$. Получаем

$$\delta\epsilon(\theta)=\left(\frac{mR}{2}\right)^2\psi_-(\theta),\quad \psi_\pm(\theta)-\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\frac{\psi_\pm(\theta')}{e^{\tilde\epsilon(\theta')}-\sigma}=e^{\pm\theta}\tag{21}$$

Уравнение для $\psi_+(\theta)$ получается дифференцированием уравнения для $\tilde\epsilon(\theta)$ по θ. Следовательно

$$\psi_+(\theta)=\tilde\epsilon'(\theta).\tag{22}$$

Теперь подставим $\tilde\epsilon+\delta\epsilon$ вместо $\tilde\epsilon$ в выражение для $f(r)$:

$$f(r)=2\sigma\int\frac{d\theta}{2\pi}\,e^\theta\log(1-\sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta)-\delta\epsilon(\theta)})=f(0)+\frac{r^2}{2}\int\frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{e^\theta\psi_-(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma}.$$

Мы видим, что $f'(0)=0$, а

$$f''(0)=\int\frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{e^\theta\psi_-(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma}.$$

Подставляя e^θ через уравнение для ψ_+, находим

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{\psi_+(\theta)\psi_-(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma} - \int \frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{d\theta'}{2\pi}\,\frac{\phi'(\theta-\theta')\psi_+(\theta)\psi_-(\theta')}{(e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma)(e^{\tilde\epsilon(\theta')}-\sigma)}.$$

Вычисление $f''(0)$

Подставляя e^{θ} через уравнение для ψ_+, находим

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\psi_+(\theta)\psi_-(\theta)}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma} - \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} \frac{\phi'(\theta - \theta')\psi_+(\theta)\psi_-(\theta')}{(e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma)(e^{\tilde{\epsilon}(\theta')} - \sigma)}.$$

Применяя уравнение для ψ_-, получаем

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{-\theta}\psi_+(\theta)}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma}$$

Вычисление $f''(0)$

Подставляя e^{θ} через уравнение для ψ_+, находим

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\psi_+(\theta)\psi_-(\theta)}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma} - \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} \frac{\phi'(\theta - \theta')\psi_+(\theta)\psi_-(\theta')}{(e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma)(e^{\tilde{\epsilon}(\theta')} - \sigma)}.$$

Применяя уравнение для ψ_-, получаем

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{-\theta}\psi_+(\theta)}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma} = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{-\theta}\tilde{\epsilon}'(\theta)}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma}$$

Вычисление $f''(0)$

Подставляя e^{θ} через уравнение для ψ_+, находим

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi}\, \frac{\psi_+(\theta)\psi_-(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)} - \sigma} - \int \frac{d\theta}{2\pi}\, \frac{d\theta'}{2\pi}\, \frac{\phi'(\theta-\theta')\psi_+(\theta)\psi_-(\theta')}{(e^{\tilde\epsilon(\theta)} - \sigma)(e^{\tilde\epsilon(\theta')} - \sigma)}.$$

Применяя уравнение для ψ_-, получаем

$$\boxed{\tilde l(\theta) = -\sigma \log(1 - \sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta)})}$$

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi}\, \frac{e^{-\theta}\psi_+(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)} - \sigma} = \int \frac{d\theta}{2\pi}\, \frac{e^{-\theta}\tilde\epsilon'(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)} - \sigma} = -\int \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{-\theta}\tilde l'(\theta). \qquad (23)$$

Итак, интеграл определяется формой «кинка» на левом крае.

Подставляя e^θ через уравнение для ψ_+, находим

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\psi_+(\theta)\psi_-(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)} - \sigma} - \int \frac{d\theta}{2\pi}\frac{d\theta'}{2\pi} \frac{\phi'(\theta - \theta')\psi_+(\theta)\psi_-(\theta')}{(e^{\tilde\epsilon(\theta)} - \sigma)(e^{\tilde\epsilon(\theta')} - \sigma)}.$$

$\boxed{\tilde l(\theta) = -\sigma \log(1 - \sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta)})}$

Применяя уравнение для ψ_-, получаем

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{-\theta}\psi_+(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)} - \sigma} = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{-\theta}\tilde\epsilon'(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)} - \sigma} = -\int \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{-\theta}\tilde l'(\theta). \qquad (23)$$

Итак, интеграл определяется формой «кинка» на левом крае. Его можно вычислить, если фаза имеет асимптотику

$$\phi(\theta) = \pi\nu + Ae^{-\theta} + o(e^{-\theta}), \qquad \theta \to \infty. \qquad (24)$$

Вычисление $f''(0)$

Подставляя e^θ через уравнение для ψ_+, находим

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\psi_+(\theta)\psi_-(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)} - \sigma} - \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} \frac{\phi'(\theta - \theta')\psi_+(\theta)\psi_-(\theta')}{(e^{\tilde\epsilon(\theta)} - \sigma)(e^{\tilde\epsilon(\theta')} - \sigma)}.$$

Применяя уравнение для ψ_-, получаем

$$\boxed{\tilde l(\theta) = -\sigma \log(1 - \sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta)})}$$

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{-\theta}\psi_+(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)} - \sigma} = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{-\theta}\tilde\epsilon'(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)} - \sigma} = -\int \frac{d\theta}{2\pi} e^{-\theta}\tilde l'(\theta). \tag{23}$$

Итак, интеграл определяется формой «кинка» на левом крае. Его можно вычислить, если фаза имеет асимптотику

$$\phi(\theta) = \pi\nu + Ae^{-\theta} + o(e^{-\theta}), \qquad \theta \to \infty. \tag{24}$$

Тогда

$$Af''(0) = -Ae^{-\theta} \int \frac{d\theta'}{2\pi} e^{\theta - \theta'} \tilde l'(\theta')$$

Вычисление $f''(0)$

Подставляя e^θ через уравнение для ψ_+, находим

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\psi_+(\theta)\psi_-(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)} - \sigma} - \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} \frac{\phi'(\theta - \theta')\psi_+(\theta)\psi_-(\theta')}{(e^{\tilde\epsilon(\theta)} - \sigma)(e^{\tilde\epsilon(\theta')} - \sigma)}.$$

Применяя уравнение для ψ_-, получаем

$$\boxed{\tilde l(\theta) = -\sigma \log(1 - \sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta)})}$$

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{-\theta}\psi_+(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)} - \sigma} = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{-\theta}\tilde\epsilon'(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)} - \sigma} = -\int \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{-\theta}\tilde l'(\theta). \qquad (23)$$

Итак, интеграл определяется формой «кинка» на левом крае. Его можно вычислить, если фаза имеет асимптотику

$$\phi(\theta) = \pi\nu + Ae^{-\theta} + o(e^{-\theta}), \qquad \theta \to \infty. \qquad (24)$$

Тогда

$$Af''(0) = -Ae^{-\theta} \int \frac{d\theta'}{2\pi}\, e^{\theta-\theta'}\tilde l'(\theta') = e^{-\theta} \int \frac{d\theta'}{2\pi} \left(\phi(\theta - \theta') + \pi\nu\right)\tilde l'(\theta')\Big|_{\theta\to-\infty}$$

Подставляя e^θ через уравнение для ψ_+, находим

$$f''(0)=\int\frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{\psi_+(\theta)\psi_-(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma}-\int\frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{d\theta'}{2\pi}\,\frac{\phi'(\theta-\theta')\psi_+(\theta)\psi_-(\theta')}{(e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma)(e^{\tilde\epsilon(\theta')}-\sigma)}.$$

Применяя уравнение для ψ_-, получаем

$$\boxed{\tilde l(\theta)=-\sigma\log(1-\sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta)})}$$

$$f''(0)=\int\frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{e^{-\theta}\psi_+(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma}=\int\frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{e^{-\theta}\tilde\epsilon'(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma}=-\int\frac{d\theta}{2\pi}\,e^{-\theta}\tilde l'(\theta). \qquad (23)$$

Итак, интеграл определяется формой «кинка» на левом крае. Его можно вычислить, если фаза имеет асимптотику

$$\phi(\theta)=\pi\nu+Ae^{-\theta}+o(e^{-\theta}),\qquad \theta\to\infty. \qquad (24)$$

Тогда

$$Af''(0)=-Ae^{-\theta}\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,e^{\theta-\theta'}\tilde l'(\theta')=e^{-\theta}\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,(\phi(\theta-\theta')+\pi\nu)\tilde l'(\theta')\Big|_{\theta\to-\infty}$$
$$=e^{-\theta}\left(\epsilon_0+\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\tilde l(\theta')\right)\Bigg|_{\theta\to-\infty}.$$

Вычисление $f''(0)$

Подставляя e^θ через уравнение для ψ_+, находим

$$f''(0)=\int\frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{\psi_+(\theta)\psi_-(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma}-\int\frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{d\theta'}{2\pi}\,\frac{\phi'(\theta-\theta')\psi_+(\theta)\psi_-(\theta')}{(e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma)(e^{\tilde\epsilon(\theta')}-\sigma)}.$$

$$\boxed{\tilde l(\theta)=-\sigma\log(1-\sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta)})}$$

Применяя уравнение для ψ_-, получаем

$$f''(0)=\int\frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{e^{-\theta}\psi_+(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma}=\int\frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{e^{-\theta}\tilde\epsilon'(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma}=-\int\frac{d\theta}{2\pi}\,e^{-\theta}\tilde l'(\theta). \tag{23}$$

Итак, интеграл определяется формой «кинка» на левом крае. Его можно вычислить, если фаза имеет асимптотику

$$\phi(\theta)=\pi\nu+Ae^{-\theta}+o(e^{-\theta}),\qquad \theta\to\infty. \tag{24}$$

Тогда

$$\begin{aligned}Af''(0)&=-Ae^{-\theta}\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,e^{\theta-\theta'}\tilde l'(\theta')=e^{-\theta}\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,(\phi(\theta-\theta')+\pi\nu)\tilde l'(\theta')\Big|_{\theta\to-\infty}\\&=e^{-\theta}\left(\overset{\tilde\epsilon(\theta)}{\cancel{\epsilon_0}}+\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\tilde l(\theta')\right)\Bigg|_{\theta\to-\infty}.\end{aligned}$$

В силу сходимости интеграла в уравнении для $\tilde\epsilon(\theta)$ имеем $\tilde\epsilon(\theta)-\epsilon_0=o(e^\theta)$ при $\theta\to-\infty$.

Вычисление $f''(0)$

Подставляя e^θ через уравнение для ψ_+, находим

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{\psi_+(\theta)\psi_-(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma} - \int \frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{d\theta'}{2\pi}\,\frac{\phi'(\theta-\theta')\psi_+(\theta)\psi_-(\theta')}{(e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma)(e^{\tilde\epsilon(\theta')}-\sigma)}.$$

$\boxed{\tilde l(\theta) = -\sigma\log(1-\sigma e^{-\tilde\epsilon(\theta)})}$

Применяя уравнение для ψ_-, получаем

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{e^{-\theta}\psi_+(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma} = \int \frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{e^{-\theta}\tilde\epsilon'(\theta)}{e^{\tilde\epsilon(\theta)}-\sigma} = -\int \frac{d\theta}{2\pi}\,e^{-\theta}\tilde l'(\theta). \qquad (23)$$

Итак, интеграл определяется формой «кинка» на левом крае. Его можно вычислить, если фаза имеет асимптотику

$$\phi(\theta) = \pi\nu + Ae^{-\theta} + o(e^{-\theta}), \qquad \theta\to\infty. \qquad (24)$$

Тогда

$$\begin{aligned} Af''(0) &= -Ae^{-\theta}\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,e^{\theta-\theta'}\tilde l'(\theta') = e^{-\theta}\int\frac{d\theta'}{2\pi}\,(\phi(\theta-\theta')+\pi\nu)\tilde l'(\theta')\Big|_{\theta\to-\infty} \\ &= e^{-\theta}\left(\overset{\tilde\epsilon(\theta)}{\cancel{\epsilon_0}} + \int\frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\tilde l(\theta')\right)\Bigg|_{\theta\to-\infty}. \end{aligned}$$

В силу сходимости интеграла в уравнении для $\tilde\epsilon(\theta)$ имеем $\tilde\epsilon(\theta)-\epsilon_0 = o(e^\theta)$ при $\theta\to-\infty$. Поэтому

$$Af''(0) = e^{-\theta}e^{\theta} = 1.$$

Вычисление ε_∞

$$f''(0) = A^{-1} = \lim_{\theta\to\infty} \left((\phi(\theta) - \pi\nu) e^{\theta} \right)^{-1}. \tag{25}$$

Вычисление ε_∞

$$f''(0) = A^{-1} = \lim_{\theta\to\infty} \Big((\phi(\theta) - \pi\nu) e^{\theta} \Big)^{-1}. \tag{25}$$

Отсюда мы можем получить плотность энергии в бесконечном объеме:

$$\varepsilon_\infty = -\frac{f''(0) m^2}{2}. \tag{26}$$

Вычисление ε_∞

$$f''(0) = A^{-1} = \lim_{\theta\to\infty}\Big((\phi(\theta) - \pi\nu)e^\theta\Big)^{-1}. \tag{25}$$

Отсюда мы можем получить плотность энергии в бесконечном объеме:

$$\varepsilon_\infty = -\frac{f''(0)m^2}{2}. \tag{26}$$

Для S-матрицы первого бризера в модели синус-Гордона $A = 4\sin\pi p$.

Вычисление ε_∞

$$f''(0) = A^{-1} = \lim_{\theta\to\infty}\Big((\phi(\theta) - \pi\nu)e^{\theta}\Big)^{-1}. \tag{25}$$

Отсюда мы можем получить плотность энергии в бесконечном объеме:

$$\varepsilon_\infty = -\frac{f''(0)m^2}{2}. \tag{26}$$

Для S-матрицы первого бризера в модели синус-Гордона $A = 4\sin\pi p$. Отсюда для модели sh-Гордона $(-1 < p < 0)$ имеем

$$\varepsilon_\infty = \frac{m^2}{8\sin\pi(-p)}, \tag{27}$$

Вычисление ε_∞

$$f''(0) = A^{-1} = \lim_{\theta\to\infty} \Big((\phi(\theta) - \pi\nu) e^{\theta} \Big)^{-1}. \tag{25}$$

Отсюда мы можем получить плотность энергии в бесконечном объеме:

$$\varepsilon_\infty = -\frac{f''(0) m^2}{2}. \tag{26}$$

Для S-матрицы первого бризера в модели синус-Гордона $A = 4\sin\pi p$. Отсюда для модели sh-Гордона $(-1 < p < 0)$ имеем

$$\varepsilon_\infty = \frac{m^2}{8\sin\pi(-p)}, \tag{27}$$

а для модели Ли—Янга

$$\varepsilon_\infty = -\frac{m^2}{4\sqrt{3}}. \tag{28}$$

$$f''(0) = A^{-1} = \lim_{\theta\to\infty} \left((\phi(\theta) - \pi\nu)e^\theta\right)^{-1}. \tag{25}$$

Отсюда мы можем получить плотность энергии в бесконечном объеме:

$$\varepsilon_\infty = -\frac{f''(0)m^2}{2}. \tag{26}$$

Для S-матрицы первого бризера в модели синус-Гордона $A = 4\sin\pi p$. Отсюда для модели sh-Гордона $(-1 < p < 0)$ имеем

$$\varepsilon_\infty = \frac{m^2}{8\sin\pi(-p)}, \tag{27}$$

а для модели Ли—Янга

$$\varepsilon_\infty = -\frac{m^2}{4\sqrt{3}}. \tag{28}$$

Более тщательный анализ показывает, что выражение $f(r) - f(0) - \frac{1}{2}f''(0)r^2$ действительно раскладывается по целым степеням r^α с некоторым показателем $\alpha > 0$, что позволяет найти конформную размерность возмущающего оператора $\Delta_\mathrm{p} = 1 - \alpha/2$. Вычисление коэффициента при первой поправке позволяет связать константу связи λ с массой частицы m.

Семинар. Вычисление ε_∞ для нескольких сортов частиц

Пусть у нас есть теория поля с двумя частицами с массами m_1 и $m_2 = \kappa m_1 > m_1$. Вторая частица является связанным состоянием двух первых в полюсе S-матрицы $\theta = iu$, так что $\kappa = 2\cos\frac{\pi u}{2}$. Матрицы рассеяния диагональны. Задача состоит в том, чтобы выразить ε_∞ через асимптотики фаз $\phi_{ab}(\theta)$ и массы m_a.

Семинар. Вычисление ε_∞ для нескольких сортов частиц

Пусть у нас есть теория поля с двумя частицами с массами m_1 и $m_2 = \kappa m_1 > m_1$. Вторая частица является связанным состоянием двух первых в полюсе S-матрицы $\theta = iu$, так что $\kappa = 2\cos\frac{\pi u}{2}$. Матрицы рассеяния диагональны. Задача состоит в том, чтобы выразить ε_∞ через асимптотики фаз $\phi_{ab}(\theta)$ и массы m_a.

1. Найдите общее выражение для $f''(0)$ через $\tilde{\epsilon}_a(\theta)$, считая, что $m_a = \kappa_a m$.

Пусть у нас есть теория поля с двумя частицами с массами m_1 и $m_2 = \kappa m_1 > m_1$. Вторая частица является связанным состоянием двух первых в полюсе S-матрицы $\theta = iu$, так что $\kappa = 2\cos\frac{\pi u}{2}$. Матрицы рассеяния диагональны. Задача состоит в том, чтобы выразить ε_∞ через асимптотики фаз $\phi_{ab}(\theta)$ и массы m_a.

1. Найдите общее выражение для $f''(0)$ через $\tilde{\epsilon}_a(\theta)$, считая, что $m_a = \kappa_a m$.

$$f''(0) = \sum_a \kappa_a I_a, \text{ где } I_a = -\int \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{-\theta} \tilde{l}'_a(\theta).$$

Семинар. Вычисление ε_∞ для нескольких сортов частиц

Пусть у нас есть теория поля с двумя частицами с массами m_1 и $m_2 = \kappa m_1 > m_1$. Вторая частица является связанным состоянием двух первых в полюсе S-матрицы $\theta = iu$, так что $\kappa = 2\cos\frac{\pi u}{2}$. Матрицы рассеяния диагональны. Задача состоит в том, чтобы выразить ε_∞ через асимптотики фаз $\phi_{ab}(\theta)$ и массы m_a.

1. Найдите общее выражение для $f''(0)$ через $\tilde{\epsilon}_a(\theta)$, считая, что $m_a = \kappa_a m$.

$$f''(0) = \sum_a \kappa_a I_a, \text{ где } I_a = -\int \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{-\theta}\tilde{l}'_a(\theta).$$

2. Найдите уравнение для I_a через коэффициенты для асимптотик $\phi_{ab}(\theta)$.

Пусть у нас есть теория поля с двумя частицами с массами m_1 и $m_2 = \kappa m_1 > m_1$. Вторая частица является связанным состоянием двух первых в полюсе S-матрицы $\theta = iu$, так что $\kappa = 2\cos\frac{\pi u}{2}$. Матрицы рассеяния диагональны. Задача состоит в том, чтобы выразить ε_∞ через асимптотики фаз $\phi_{ab}(\theta)$ и массы m_a.

1. Найдите общее выражение для $f''(0)$ через $\tilde{\epsilon}_a(\theta)$, считая, что $m_a = \kappa_a m$.

$$f''(0) = \sum_a \kappa_a I_a, \text{ где } I_a = -\int \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{-\theta} \tilde{l}'_a(\theta).$$

2. Найдите уравнение для I_a через коэффициенты для асимптотик $\phi_{ab}(\theta)$.

Положим

$$\phi_{ab}(\theta) = \pi\nu_{ab} + A_{ab}e^{-\theta} + o(e^{-\theta}) \text{ при } \theta \to +\infty.$$

Тогда

$$\sum_b A_{ab} I_b = \kappa_a.$$

Пусть у нас есть теория поля с двумя частицами с массами m_1 и $m_2 = \kappa m_1 > m_1$. Вторая частица является связанным состоянием двух первых в полюсе S-матрицы $\theta = iu$, так что $\kappa = 2\cos\frac{\pi u}{2}$. Матрицы рассеяния диагональны. Задача состоит в том, чтобы выразить ε_∞ через асимптотики фаз $\phi_{ab}(\theta)$ и массы m_a.

1. Найдите общее выражение для $f''(0)$ через $\tilde\epsilon_a(\theta)$, считая, что $m_a = \kappa_a m$.

$$f''(0) = \sum_a \kappa_a I_a, \text{ где } I_a = -\int \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{-\theta} \tilde l'_a(\theta).$$

2. Найдите уравнение для I_a через коэффициенты для асимптотик $\phi_{ab}(\theta)$.

Положим
$$\phi_{ab}(\theta) = \pi\nu_{ab} + A_{ab}e^{-\theta} + o(e^{-\theta}) \text{ при } \theta \to +\infty.$$

Тогда
$$\sum_b A_{ab} I_b = \kappa_a.$$

3. Проанализируйте вид асимптотик $S_{ab}(\theta)$, исходя из условий задачи, и найдите $f''(0)$.

Семинар. Вычисление ε_∞ для нескольких сортов частиц

Пусть у нас есть теория поля с двумя частицами с массами m_1 и $m_2 = \kappa m_1 > m_1$. Вторая частица является связанным состоянием двух первых в полюсе S-матрицы $\theta = iu$, так что $\kappa = 2\cos\frac{\pi u}{2}$. Матрицы рассеяния диагональны. Задача состоит в том, чтобы выразить ε_∞ через асимптотики фаз $\phi_{ab}(\theta)$ и массы m_a.
1. Найдите общее выражение для $f''(0)$ через $\tilde{\epsilon}_a(\theta)$, считая, что $m_a = \kappa_a m$.

$$f''(0) = \sum_a \kappa_a I_a, \text{ где } I_a = -\int \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{-\theta}\tilde{l}'_a(\theta).$$

2. Найдите уравнение для I_a через коэффициенты для асимптотик $\phi_{ab}(\theta)$.

Положим

$$\phi_{ab}(\theta) = \pi\nu_{ab} + A_{ab}e^{-\theta} + o(e^{-\theta}) \text{ при } \theta \to +\infty.$$

Тогда

$$\sum_b A_{ab} I_b = \kappa_a.$$

3. Проанализируйте вид асимптотик $S_{ab}(\theta)$, исходя из условий задачи, и найдите $f''(0)$.

$$A = A_{11}\begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & \kappa^2 \end{pmatrix} \text{ или } A_{ab} = A_{11}\kappa_a\kappa_b \;\Rightarrow\; f''(0) = A_{11}^{-1},\; \epsilon_\infty = -\frac{m_1^2}{2A_{11}}.$$