Лекция 10.
Интегралы движения и матрицы рассеяния

Михаил Лашкевич

Рассмотрим асимптотическую волновую функцию n бозонных частиц:

$$\psi_{\beta_1 p_1,\ldots,\beta_n p_n}(\alpha_1 x_1,\ldots,\alpha_n x_n) = \sum_{\tau\in S_n} A^{\alpha_{\sigma_1}\ldots\alpha_{\sigma_n}}_{\beta_1\quad\ldots\beta_n}[\tau]e^{i\sum_{i=1}^n p_{\tau_i}x_{\sigma_i}}$$

$$\text{при}\quad x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \cdots < x_{\sigma_n}, \quad |x_i - x_j| \gg R. \qquad (1)$$

Рассмотрим асимптотическую волновую функцию n бозонных частиц:

$$\psi_{\beta_1 p_1,\ldots,\beta_n p_n}(\alpha_1 x_1,\ldots,\alpha_n x_n) = \sum_{\tau\in S_n} A^{\alpha_{\sigma_1}\ldots\alpha_{\sigma_n}}_{\beta_1\ \ \ldots\beta_n}[\tau] e^{i\sum_{i=1}^n p_{\tau_i} x_{\sigma_i}}$$

$$\text{при} \quad x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \cdots < x_{\sigma_n}, \quad |x_i - x_j| \gg R. \tag{1}$$

Мы говорили, что внешние значки β_i можно определить условием

$$A^{\alpha_1\ldots\alpha_n}_{\beta_1\ldots\beta_n}[\mathrm{id}] = \prod_{i=1}^n \delta^{\alpha_i}_{\beta_i}. \tag{2}$$

Это условие означает, сто значки β_i совпадают со значками α_i во входящем канале при условии $p_1 > p_2 > \cdots > p_n$. При этом волновые функции аналитичны по импульсам.

Рассмотрим асимптотическую волновую функцию n бозонных частиц:

$$\psi_{\beta_1 p_1,\dots,\beta_n p_n}(\alpha_1 x_1,\dots,\alpha_n x_n) = \sum_{\tau\in S_n} A^{\alpha_{\sigma_1}\dots\alpha_{\sigma_n}}_{\beta_1\ \ \dots\beta_n}[\tau] e^{i\sum_{i=1}^n p_{\tau_i} x_{\sigma_i}}$$

$$\text{при}\quad x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_n}, \quad |x_i - x_j| \gg R. \qquad (1)$$

Мы говорили, что внешние значки β_i можно определить условием

$$A^{\alpha_1\dots\alpha_n}_{\beta_1\dots\beta_n}[\mathrm{id}] = \prod_{i=1}^n \delta^{\alpha_i}_{\beta_i}. \qquad (2)$$

Это условие означает, сто значки β_i совпадают со значками α_i во входящем канале при условии $p_1 > p_2 > \dots > p_n$. При этом волновые функции аналитичны по импульсам.
При перестановках $\beta_i p_i \leftrightarrow \beta_j p_j$ эти функции меняются по правилу:

$$\psi_{\dots,\beta_i p_i,\beta_{i+1}p_{i+1},\dots}(\alpha_1 x_1,\dots,\alpha_n x_n)$$
$$= \sum_{\beta'_i\beta'_{i+1}} S(p_i,p_{i+1})^{\beta'_i\,\beta'_{i+1}}_{\beta_i\,\beta_{i+1}} \psi_{\dots,\beta'_{i+1}p_{i+1},\beta'_i p_i,\dots}(\alpha_1 x_1,\dots,\alpha_n x_n). \qquad (3)$$

Проверка перестановочного свойства при $n = 2$

Покажем это на пример двухчастичной волновой функции. Если $x_1 < x_2$, имеем

$$\psi_{\beta_1 p_1, \beta_2 p_2}(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2) = \delta^{\alpha_1}_{\beta_1} \delta^{\alpha_2}_{\beta_2} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} + S(p_1, p_2)^{\alpha_2 \alpha_1}_{\beta_1 \beta_2} e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2}$$

Проверка перестановочного свойства при $n = 2$

Покажем это на пример двухчастичной волновой функции. Если $x_1 < x_2$, имеем

$$\psi_{\beta_1 p_1, \beta_2 p_2}(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2) = \delta^{\alpha_1}_{\beta_1} \delta^{\alpha_2}_{\beta_2} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} + S(p_1, p_2)^{\alpha_2 \alpha_1}_{\beta_1 \beta_2} e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2}$$

$$= \sum_{\beta_1' \beta_2'} S(p_1, p_2)^{\beta_1' \beta_2'}_{\beta_1 \beta_2} \left(\delta^{\alpha_1}_{\beta_2'} \delta^{\alpha_2}_{\beta_1'} e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2} + S^{-1}(p_1, p_2)^{\alpha_1 \alpha_2}_{\beta_1' \beta_2'} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} \right)$$

Покажем это на пример двухчастичной волновой функции. Если $x_1 < x_2$, имеем

$$\psi_{\beta_1 p_1, \beta_2 p_2}(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2) = \delta^{\alpha_1}_{\beta_1} \delta^{\alpha_2}_{\beta_2} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} + S(p_1, p_2)^{\alpha_2 \alpha_1}_{\beta_1 \beta_2} e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2}$$
$$= \sum_{\beta'_1 \beta'_2} S(p_1, p_2)^{\beta'_1 \beta'_2}_{\beta_1 \beta_2} \left(\delta^{\alpha_1}_{\beta'_2} \delta^{\alpha_2}_{\beta'_1} e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2} + S^{-1}(p_1, p_2)^{\alpha_1 \alpha_2}_{\beta'_1 \beta'_2} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} \right)$$
$$= \sum_{\beta'_1 \beta'_2} S(p_1, p_2)^{\beta'_1 \beta'_2}_{\beta_1 \beta_2} \left(\delta^{\alpha_1}_{\beta'_2} \delta^{\alpha_2}_{\beta'_1} e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2} + S(p_2, p_1)^{\alpha_2 \alpha_1}_{\beta'_2 \beta'_1} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} \right)$$

Проверка перестановочного свойства при $n = 2$

Покажем это на пример двухчастичной волновой функции. Если $x_1 < x_2$, имеем

$$\psi_{\beta_1 p_1, \beta_2 p_2}(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2) = \delta^{\alpha_1}_{\beta_1} \delta^{\alpha_2}_{\beta_2} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} + S(p_1, p_2)^{\alpha_2 \alpha_1}_{\beta_1 \beta_2} e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2}$$
$$= \sum_{\beta'_1 \beta'_2} S(p_1, p_2)^{\beta'_1 \beta'_2}_{\beta_1 \beta_2} \left(\delta^{\alpha_1}_{\beta'_2} \delta^{\alpha_2}_{\beta'_1} e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2} + S^{-1}(p_1, p_2)^{\alpha_1 \alpha_2}_{\beta'_1 \beta'_2} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} \right)$$
$$= \sum_{\beta'_1 \beta'_2} S(p_1, p_2)^{\beta'_1 \beta'_2}_{\beta_1 \beta_2} \left(\delta^{\alpha_1}_{\beta'_2} \delta^{\alpha_2}_{\beta'_1} e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2} + S(p_2, p_1)^{\alpha_2 \alpha_1}_{\beta'_2 \beta'_1} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} \right)$$
$$= \sum_{\beta'_1 \beta'_2} S(p_1, p_2)^{\beta'_1 \beta'_2}_{\beta_1 \beta_2} \psi_{\beta'_2 p_2, \beta'_1 p_1}(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2).$$

Каждая волновая функция определяет (с точностью до симметричного по импульсам аналитического нормировочного множителя) состояние $|p_1, \ldots, p_n\rangle_{\beta_1 \ldots \beta_n}$.

Каждая волновая функция определяет (с точностью до симметричного по импульсам аналитического нормировочного множителя) состояние $|p_1, \ldots, p_n\rangle_{\beta_1 \ldots \beta_n}$.
Во-первых, в релятивистском случае перейдем к быстротам θ_i: $p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i$.
Тогда

$$|\ldots, \theta_i, \theta_{i+1}, \ldots\rangle_{\ldots\beta_i\beta_{i+1}\ldots} = \sum_{\beta'_i\beta'_{i+1}} S(\theta_i - \theta_{i+1})^{\beta'_i\beta'_{i+1}}_{\beta_i\beta_{i+1}} |\ldots, \theta_{i+1}, \theta_i, \ldots\rangle_{\ldots\beta'_{i+1}\beta'_i\ldots}. \quad (4)$$

Каждая волновая функция определяет (с точностью до симметричного по импульсам аналитического нормировочного множителя) состояние $|p_1, \ldots, p_n\rangle_{\beta_1 \ldots \beta_n}$.
Во-первых, в релятивистском случае перейдем к быстротам θ_i: $p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i$. Тогда

$$|\ldots, \theta_i, \theta_{i+1}, \ldots\rangle_{\ldots \beta_i \beta_{i+1} \ldots} = \sum_{\beta'_i \beta'_{i+1}} S(\theta_i - \theta_{i+1})^{\beta'_i \beta'_{i+1}}_{\beta_i \beta_{i+1}} |\ldots, \theta_{i+1}, \theta_i, \ldots\rangle_{\ldots \beta'_{i+1} \beta'_i \ldots}. \quad (4)$$

Это равенство можно записать короче, используя обозначение

$$|\nu_1 \theta_1, \ldots, \nu_N \theta_n\rangle = \sum_{\beta_1, \ldots, \beta_n} |\theta_1, \ldots, \theta_n\rangle_{\beta_1 \ldots \beta_n} e^{\beta_1}_{(\nu_1)} \otimes \cdots \otimes e^{\beta_n}_{(\nu_n)}, \quad (5)$$

где $e^{\beta}_{(\nu)}$ — базисный вектор в пространстве состояний $V^{(\nu)}$ частицы сорта ν.

Каждая волновая функция определяет (с точностью до симметричного по импульсам аналитического нормировочного множителя) состояние $|p_1, \ldots, p_n\rangle_{\beta_1 \ldots \beta_n}$.
Во-первых, в релятивистском случае перейдем к быстротам θ_i: $p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i$.
Тогда

$$|\ldots, \theta_i, \theta_{i+1}, \ldots\rangle_{\ldots\beta_i\beta_{i+1}\ldots} = \sum_{\beta'_i\beta'_{i+1}} S(\theta_i - \theta_{i+1})^{\beta'_i\,\beta'_{i+1}}_{\beta_i\,\beta_{i+1}} |\ldots, \theta_{i+1}, \theta_i, \ldots\rangle_{\ldots\beta'_{i+1}\beta'_i\ldots}. \tag{4}$$

Это равенство можно записать короче, используя обозначение

$$|\nu_1\theta_1, \ldots, \nu_N\theta_n\rangle = \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_n} |\theta_1, \ldots, \theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n} e^{\beta_1}_{(\nu_1)} \otimes \cdots \otimes e^{\beta_n}_{(\nu_n)}, \tag{5}$$

где $e^{\beta}_{(\nu)}$ — базисный вектор в пространстве состояний $V^{(\nu)}$ частицы сорта ν.
Тогда

$$|\ldots, \nu_i\theta_i, \nu_{i+1}\theta_{i+1}, \ldots\rangle = S^{(\nu_i,\nu_{i+1})}_{i,i+1}(\theta_i - \theta_{i+1})|\ldots, \nu_{i+1}\theta_{i+1}, \nu_i\theta_i, \ldots\rangle. \tag{6}$$

Операторы Фаддеева—Замолодчикова

Введем «операторы рождения» $V_\beta^+(\theta)$ и «уничтожения» $V^\beta(\theta)$:

$$V_\beta^+(\theta)|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n} = |\theta,\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta\beta_1\ldots\beta_n}, \tag{7}$$

Введем «операторы рождения» $V^+_\beta(\theta)$ и «уничтожения» $V^\beta(\theta)$:

$$\begin{aligned} &V^+_\beta(\theta)|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n} = |\theta,\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta\beta_1\ldots\beta_n}, \\ &V^\beta(\theta)|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n} = \sum_{k=1}^n 2\pi\delta(\theta-\theta_k) \\ &\qquad \times \sum_{\substack{\beta'_1,\ldots,\beta'_{k-1} \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_k}} \delta^\beta_{\alpha_1}\delta^{\alpha_k}_{\beta_k} \prod_{i=1}^{k-1} S(\theta_i-\theta)^{\beta'_i\,\alpha_i}_{\beta_i\,\alpha_{i+1}} |\theta_1,\ldots,\hat\theta_k,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta'_1\ldots\hat\beta_k\ldots\beta_n}. \end{aligned} \tag{7}$$

Введем «операторы рождения» $V^+_\beta(\theta)$ и «уничтожения» $V^\beta(\theta)$:

$$\begin{aligned}
V^+_\beta(\theta)|\theta_1,\dots,\theta_n\rangle_{\beta_1\dots\beta_n} &= |\theta,\theta_1,\dots,\theta_n\rangle_{\beta\beta_1\dots\beta_n}, \\
V^\beta(\theta)|\theta_1,\dots,\theta_n\rangle_{\beta_1\dots\beta_n} &= \sum_{k=1}^n 2\pi\delta(\theta-\theta_k) \\
&\quad\times \sum_{\substack{\beta'_1,\dots,\beta'_{k-1}\\ \alpha_1,\dots,\alpha_k}} \delta^\beta_{\alpha_1}\delta^{\alpha_k}_{\beta_k}\prod_{i=1}^{k-1} S(\theta_i-\theta)^{\beta'_i\,\alpha_i}_{\beta_i\,\alpha_{i+1}}|\theta_1,\dots,\hat\theta_k,\dots,\theta_n\rangle_{\beta'_1\dots\hat\beta_k\dots\beta_n}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда находим квадратичные соотношения

$$V^{\beta_1}(\theta_1)V^{\beta_2}(\theta_2)-\sum_{\beta'_1\beta'_2} S(\theta_1-\theta_2)^{\beta_1\,\beta_2}_{\beta'_1\,\beta'_2}V^{\beta'_2}(\theta_2)V^{\beta'_1}(\theta_1)=0, \tag{8a}$$

(8b)

(8c)

Введем «операторы рождения» $V^+_\beta(\theta)$ и «уничтожения» $V^\beta(\theta)$:

$$\begin{aligned} V^+_\beta(\theta)|\theta_1,\dots,\theta_n\rangle_{\beta_1\dots\beta_n} &= |\theta,\theta_1,\dots,\theta_n\rangle_{\beta\beta_1\dots\beta_n}, \\ V^\beta(\theta)|\theta_1,\dots,\theta_n\rangle_{\beta_1\dots\beta_n} &= \sum_{k=1}^n 2\pi\delta(\theta-\theta_k) \\ &\times \sum_{\substack{\beta'_1,\dots,\beta'_{k-1}\\ \alpha_1,\dots,\alpha_k}} \delta^\beta_{\alpha_1}\delta^{\alpha_k}_{\beta_k}\prod_{i=1}^{k-1} S(\theta_i-\theta)^{\beta'_i\,\alpha_i}_{\beta_i\,\alpha_{i+1}}|\theta_1,\dots,\hat\theta_k,\dots,\theta_n\rangle_{\beta'_1\dots\hat\beta_k\dots\beta_n}. \end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда находим квадратичные соотношения

$$V^{\beta_1}(\theta_1)V^{\beta_2}(\theta_2) - \sum_{\beta'_1\beta'_2} S(\theta_1-\theta_2)^{\beta_1\,\beta_2}_{\beta'_1\,\beta'_2} V^{\beta'_2}(\theta_2)V^{\beta'_1}(\theta_1) = 0, \tag{8a}$$

$$V^+_{\beta_1}(\theta_1)V^+_{\beta_2}(\theta_2) - \sum_{\beta'_1\beta'_2} S(\theta_1-\theta_2)^{\beta'_1\,\beta'_2}_{\beta_1\,\beta_2} V^+_{\beta'_2}(\theta_2)V^+_{\beta'_1}(\theta_1) = 0, \tag{8b}$$

(8c)

Введем «операторы рождения» $V^+_\beta(\theta)$ и «уничтожения» $V^\beta(\theta)$:

$$\begin{aligned} V^+_\beta(\theta)|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n} &= |\theta,\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta\beta_1\ldots\beta_n}, \\ V^\beta(\theta)|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n} &= \sum_{k=1}^n 2\pi\delta(\theta-\theta_k) \\ &\times \sum_{\substack{\beta'_1,\ldots,\beta'_{k-1} \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_k}} \delta^\beta_{\alpha_1}\delta^{\alpha_k}_{\beta_k} \prod_{i=1}^{k-1} S(\theta_i-\theta)^{\beta'_i\,\alpha_i}_{\beta_i\,\alpha_{i+1}} |\theta_1,\ldots,\hat\theta_k,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta'_1\ldots\hat\beta_k\ldots\beta_n}. \end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда находим квадратичные соотношения

$$V^{\beta_1}(\theta_1)V^{\beta_2}(\theta_2) - \sum_{\beta'_1\beta'_2} S(\theta_1-\theta_2)^{\beta_1\,\beta_2}_{\beta'_1\,\beta'_2} V^{\beta'_2}(\theta_2)V^{\beta'_1}(\theta_1) = 0, \tag{8a}$$

$$V^+_{\beta_1}(\theta_1)V^+_{\beta_2}(\theta_2) - \sum_{\beta'_1\beta'_2} S(\theta_1-\theta_2)^{\beta'_1\,\beta'_2}_{\beta_1\,\beta_2} V^+_{\beta'_2}(\theta_2)V^+_{\beta'_1}(\theta_1) = 0, \tag{8b}$$

$$V^{\beta_1}(\theta_1)V^+_{\beta_2}(\theta_2) - \sum_{\beta'_1\beta'_2} S(\theta_2-\theta_1)^{\beta'_2\,\beta_1}_{\beta_2\,\beta'_1} V^+_{\beta'_2}(\theta_2)V^{\beta'_1}(\theta_1) = 2\pi\delta^{\beta_1}_{\beta_2}\delta(\theta_1-\theta_2). \tag{8c}$$

Введем «операторы рождения» $V^+_\beta(\theta)$ и «уничтожения» $V^\beta(\theta)$:

$$
\begin{aligned}
&V^+_\beta(\theta)|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n} = |\theta,\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta\beta_1\ldots\beta_n},\\
&V^\beta(\theta)|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n} = \sum_{k=1}^{n} 2\pi\delta(\theta-\theta_k)\\
&\qquad\times \sum_{\substack{\beta'_1,\ldots,\beta'_{k-1}\\ \alpha_1,\ldots,\alpha_k}} \delta^\beta_{\alpha_1}\delta^{\alpha_k}_{\beta_k}\prod_{i=1}^{k-1} S(\theta_i-\theta)^{\beta'_i\,\alpha_i}_{\beta_i\,\alpha_{i+1}}|\theta_1,\ldots,\hat\theta_k,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta'_1\ldots\hat\beta_k\ldots\beta_n}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Отсюда находим квадратичные соотношения

$$V^{\beta_1}(\theta_1)V^{\beta_2}(\theta_2) - \sum_{\beta'_1\beta'_2} S(\theta_1-\theta_2)^{\beta_1\,\beta_2}_{\beta'_1\,\beta'_2} V^{\beta'_2}(\theta_2)V^{\beta'_1}(\theta_1) = 0, \tag{8a}$$

$$V^+_{\beta_1}(\theta_1)V^+_{\beta_2}(\theta_2) - \sum_{\beta'_1\beta'_2} S(\theta_1-\theta_2)^{\beta'_1\,\beta'_2}_{\beta_1\,\beta_2} V^+_{\beta'_2}(\theta_2)V^+_{\beta'_1}(\theta_1) = 0, \tag{8b}$$

$$V^{\beta_1}(\theta_1)V^+_{\beta_2}(\theta_2) - \sum_{\beta'_1\beta'_2} S(\theta_2-\theta_1)^{\beta'_2\,\beta_1}_{\beta_2\,\beta'_1} V^+_{\beta'_2}(\theta_2)V^{\beta'_1}(\theta_1) = 2\pi\delta^{\beta_1}_{\beta_2}\delta(\theta_1-\theta_2). \tag{8c}$$

Эта алгебра называется алгеброй Фаддеева—Замолодчикова.

С учетом кроссинг-симметрии мы можем положить

$$V_\alpha^+(\theta) = \sum_\beta C_{\alpha\beta} V^\beta(\theta - i\pi), \tag{9}$$

где $C_{\alpha\beta}$ — матрица CPT-преобразования, представляющая собой симметричную матрицу, причем существует унитарная матрица U, такая что $UCU^t = 1$.
Тогда алгебру Фаддеева—Замолодчикова можно записать в компактном виде

$$\begin{aligned} V^{\beta_1}(\theta_1)V^{\beta_2}(\theta_2) - \sum_{\beta_1'\beta_2'} S(\theta_1-\theta_2)^{\beta_1\beta_2}_{\beta_1'\beta_2'} V^{\beta_2'}(\theta_2)V^{\beta_1'}(\theta_1) \\ = 2\pi C^{\beta_1\beta_2}\delta(\theta_1-\theta_2-i\pi) - 2\pi\sum_{\beta_1'\beta_2'} C^{\beta_1'\beta_2'} S(-i\pi)^{\beta_2\beta_1}_{\beta_2'\beta_1'}\delta(\theta_1-\theta_2+i\pi), \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь мы считаем, что переменные θ_i живут на двух (направленных, по соглашению, направо) прямых:

$$\theta_i \in \mathcal{C}_{\rightrightarrows} \equiv \mathbb{R} \cup (\mathbb{R} - i\pi). \tag{11}$$

Пусть теперь $\hat{I}_s$ — локальный интеграл движения спина s, причем интегралы движения в выбранном базисе диагонализуются:

$$\hat{I}_s|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n} = \sum_{i=1}^{n} I_{s,\beta_i} e^{s\theta_i}|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n}. \tag{12}$$

Пусть теперь $\hat{I}_s$ — локальный интеграл движения спина s, причем интегралы движения в выбранном базисе диагонализуются:

$$\hat{I}_s|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n} = \sum_{i=1}^{n} I_{s,\beta_i} e^{s\theta_i}|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n}. \tag{12}$$

Отсюда получаем коммутационные соотношения

$$[\hat{I}_s, V_\beta^+(\theta)] = I_{s,\beta} e^{s\theta} V_\beta^+(\theta), \qquad [\hat{I}_s, V^\beta(\theta)] = -I_{s,\beta} e^{s\theta} V^\beta(\theta). \tag{13}$$

Локальные интегралы движения и кроссинг-симметрия

Пусть теперь $\hat{I}_s$ — локальный интеграл движения спина s, причем интегралы движения в выбранном базисе диагонализуются:

$$\hat{I}_s|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n} = \sum_{i=1}^{n} I_{s,\beta_i} e^{s\theta_i}|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n}. \qquad (12)$$

Отсюда получаем коммутационные соотношения

$$[\hat{I}_s, V_\beta^+(\theta)] = I_{s,\beta} e^{s\theta} V_\beta^+(\theta), \qquad [\hat{I}_s, V^\beta(\theta)] = -I_{s,\beta} e^{s\theta} V^\beta(\theta). \qquad (13)$$

Согласие с условием кроссинг-симметрии

$$V_\alpha^+(\theta) = \sum_\beta C_{\alpha\beta} V^\beta(\theta - i\pi) \qquad (9)$$

Пусть теперь $\hat{I}_s$ — локальный интеграл движения спина s, причем интегралы движения в выбранном базисе диагонализуются:

$$\hat{I}_s|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n} = \sum_{i=1}^{n} I_{s,\beta_i} e^{s\theta_i}|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n}. \tag{12}$$

Отсюда получаем коммутационные соотношения

$$[\hat{I}_s, V_\beta^+(\theta)] = I_{s,\beta} e^{s\theta} V_\beta^+(\theta), \qquad [\hat{I}_s, V^\beta(\theta)] = -I_{s,\beta} e^{s\theta} V^\beta(\theta). \tag{13}$$

Согласие с условием кроссинг-симметрии

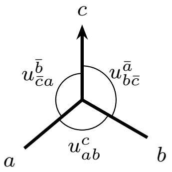
$$V_\alpha^+(\theta) = \sum_\beta C_{\alpha\beta} V^\beta(\theta - i\pi) \tag{9}$$

накладывает на собственные значения ограничение

$$I_{s,\alpha}\delta^\alpha_{\alpha'} = (-1)^{s-1} \sum_\beta C^{\alpha\beta} I_{s,\beta} C_{\beta\alpha'}. \tag{14}$$

Связанные состояния

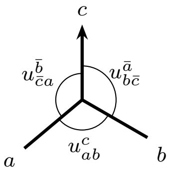
Другое ограничение связано с наличием связанных состояний. Положим, что c является связанным состоянием a и b:



$$
\begin{aligned}
& u^c_{ab} + u^{\bar{b}}_{\bar{c}a} + u^{\bar{a}}_{b\bar{c}} = 2\pi, \\
& 0 < u^c_{ab}, u^{\bar{b}}_{\bar{c}a}, u^{\bar{a}}_{b\bar{c}} < \pi,
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\bar{u}^c_{ab} &= \pi - u^c_{ab}, \\
\bar{u}^{\bar{b}}_{\bar{c}a} &= \pi - u^{\bar{b}}_{\bar{c}a}, \\
\bar{u}^{\bar{a}}_{b\bar{c}} &= \pi - u^{\bar{a}}_{b\bar{c}}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Связанные состояния

Другое ограничение связано с наличием связанных состояний. Положим, что c является связанным состоянием a и b:



$$
\begin{aligned}
&u^c_{ab} + u^{\bar b}_{\bar c a} + u^{\bar a}_{b \bar c} = 2\pi, \\
&0 < u^c_{ab}, u^{\bar b}_{\bar c a}, u^{\bar a}_{b \bar c} < \pi,
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\bar u^c_{ab} &= \pi - u^c_{ab}, \\
\bar u^{\bar b}_{\bar c a} &= \pi - u^{\bar b}_{\bar c a}, \\
\bar u^{\bar a}_{b \bar c} &= \pi - u^{\bar a}_{b \bar c}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

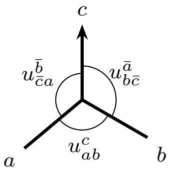
Тогда для операторов $V^\beta(\theta)$ мы можем постулировать

$$
V^c(\theta) = \sum_{a,b} \Gamma^c_{ab} V^b(\theta - i\bar u^{\bar a}_{b \bar c}) V^a(\theta + i\bar u^{\bar b}_{\bar c a}), \tag{16}
$$

что согласуется со свойствами S-матриц.

Связанные состояния

Другое ограничение связано с наличием связанных состояний. Положим, что c является связанным состоянием a и b:



$$u^c_{ab} + u^{\bar{b}}_{\bar{c}a} + u^{\bar{a}}_{b\bar{c}} = 2\pi, \qquad \bar{u}^c_{ab} = \pi - u^c_{ab},$$
$$0 < u^c_{ab}, u^{\bar{b}}_{\bar{c}a}, u^{\bar{a}}_{b\bar{c}} < \pi, \qquad \bar{u}^{\bar{b}}_{\bar{c}a} = \pi - u^{\bar{b}}_{\bar{c}a}, \qquad \bar{u}^{\bar{a}}_{b\bar{c}} = \pi - u^{\bar{a}}_{b\bar{c}}. \tag{15}$$

Тогда для операторов $V^\beta(\theta)$ мы можем постулировать

$$V^c(\theta) = \sum_{a,b} \Gamma^c_{ab} V^b(\theta - i\bar{u}^{\bar{a}}_{b\bar{c}}) V^a(\theta + i\bar{u}^{\bar{b}}_{\bar{c}a}), \tag{16}$$

что согласуется со свойствами S-матриц.
Отсюда получаем второе ограничение:

$$I_{s,c} = I_{s,a} e^{is\bar{u}^{\bar{b}}_{\bar{c}a}} + I_{s,b} e^{-is\bar{u}^{\bar{a}}_{b\bar{c}}}. \tag{17}$$

Изучим ограничения (14) и (17).

Нейтральные частицы и пары частица-античастица

Теорема

Если в лоренц-инвариантной модели имеется нейтральная частица или пара частица—античастица с недиагональной матрицей рассеяния, на которых интегралы движения диагонализуются, интегралы движения четных спинов имеют нулевые собственные значения на этих частицах. Как следствие, если в модели есть только частицы этих двух сортов, она не имеет интегралов движения четных спинов.

Нейтральные частицы и пары частица-античастица

Теорема

Если в лоренц-инвариантной модели имеется нейтральная частица или пара частица—античастица с недиагональной матрицей рассеяния, на которых интегралы движения диагонализуются, интегралы движения четных спинов имеют нулевые собственные значения на этих частицах. Как следствие, если в модели есть только частицы этих двух сортов, она не имеет интегралов движения четных спинов.

Действительно, наличие нейтральной частицы 1 означает, что в подходящем базисе имеется блок 1×1 с матрицей $C = 1$ на нем. Следовательно, $I_{s,1} = (-1)^{s+1} I_{s,1}$. Следовательно, $I_{2n,1} = 0$.

Теорема

Если в лоренц-инвариантной модели имеется нейтральная частица или пара частица—античастица с недиагональной матрицей рассеяния, на которых интегралы движения диагонализуются, интегралы движения четных спинов имеют нулевые собственные значения на этих частицах. Как следствие, если в модели есть только частицы этих двух сортов, она не имеет интегралов движения четных спинов.

Действительно, наличие нейтральной частицы 1 означает, что в подходящем базисе имеется блок 1×1 с матрицей $C = 1$ на нем. Следовательно, $I_{s,1} = (-1)^{s+1} I_{s,1}$. Следовательно, $I_{2n,1} = 0$.
Пусть теперь в системе есть частица 1 и античастица $\bar{1}$ с $C = \sigma^1$, такие что матричный элемент $1 + \bar{1} \to \bar{1} + 1$ не равен нулю. Тогда

$$I_{s,1} = (-1)^{s-1} I_{s,\bar{1}}.$$

Теорема

Если в лоренц-инвариантной модели имеется нейтральная частица или пара частица—античастица с недиагональной матрицей рассеяния, на которых интегралы движения диагонализуются, интегралы движения четных спинов имеют нулевые собственные значения на этих частицах. Как следствие, если в модели есть только частицы этих двух сортов, она не имеет интегралов движения четных спинов.

Действительно, наличие нейтральной частицы 1 означает, что в подходящем базисе имеется блок 1×1 с матрицей $C = 1$ на нем. Следовательно, $I_{s,1} = (-1)^{s+1} I_{s,1}$. Следовательно, $I_{2n,1} = 0$.
Пусть теперь в системе есть частица 1 и античастица $\bar{1}$ с $C = \sigma^1$, такие что матричный элемент $1 + \bar{1} \to \bar{1} + 1$ не равен нулю. Тогда

$$I_{s,1} = (-1)^{s-1} I_{s,\bar{1}}.$$

Рассмотрим рассеяние $|\theta_1, \theta_2\rangle_{1\bar{1}} \to |\theta_1, \theta_2\rangle_{\bar{1}1}$.

Теорема

Если в лоренц-инвариантной модели имеется нейтральная частица или пара частица—античастица с недиагональной матрицей рассеяния, на которых интегралы движения диагонализуются, интегралы движения четных спинов имеют нулевые собственные значения на этих частицах. Как следствие, если в модели есть только частицы этих двух сортов, она не имеет интегралов движения четных спинов.

Действительно, наличие нейтральной частицы 1 означает, что в подходящем базисе имеется блок 1×1 с матрицей $C = 1$ на нем. Следовательно, $I_{s,1} = (-1)^{s+1} I_{s,1}$. Следовательно, $I_{2n,1} = 0$.
Пусть теперь в системе есть частица 1 и античастица $\bar{1}$ с $C = \sigma^1$, такие что матричный элемент $1 + \bar{1} \to \bar{1} + 1$ не равен нулю. Тогда

$$I_{s,1} = (-1)^{s-1} I_{s,\bar{1}}.$$

Рассмотрим рассеяние $|\theta_1, \theta_2\rangle_{1\bar{1}} \to |\theta_1, \theta_2\rangle_{\bar{1}1}$. Тогда до и после рассеяния собственные значения интегралов движения должны быть одинаковы:

$$I_{s,1} e^{s\theta_1} + I_{s,\bar{1}} e^{s\theta_2} = I_{s,\bar{1}} e^{s\theta_1} + I_{s,1} e^{s\theta_2}.$$

Это значит, что $I_{s,1} = I_{s,\bar{1}} = (-1)^{s-1} I_{s,1}$. Отсюда заключаем, что $I_{2n,1} = I_{2n,\bar{1}} = 0$.

Теорема

Если в лоренц-инвариантной модели имеется нейтральная частица или пара частица—античастица с недиагональной матрицей рассеяния, на которых интегралы движения диагонализуются, интегралы движения четных спинов имеют нулевые собственные значения на этих частицах. Как следствие, если в модели есть только частицы этих двух сортов, она не имеет интегралов движения четных спинов.

Действительно, наличие нейтральной частицы 1 означает, что в подходящем базисе имеется блок 1×1 с матрицей $C = 1$ на нем. Следовательно, $I_{s,1} = (-1)^{s+1} I_{s,1}$. Следовательно, $I_{2n,1} = 0$.
Пусть теперь в системе есть частица 1 и античастица $\bar{1}$ с $C = \sigma^1$, такие что матричный элемент $1 + \bar{1} \to \bar{1} + 1$ не равен нулю. Тогда

$$I_{s,1} = (-1)^{s-1} I_{s,\bar{1}}.$$

Рассмотрим рассеяние $|\theta_1, \theta_2\rangle_{1\bar{1}} \to |\theta_1, \theta_2\rangle_{\bar{1}1}$. Тогда до и после рассеяния собственные значения интегралов движения должны быть одинаковы:

$$I_{s,1} e^{s\theta_1} + I_{s,\bar{1}} e^{s\theta_2} = I_{s,\bar{1}} e^{s\theta_1} + I_{s,1} e^{s\theta_2}.$$

Это значит, что $I_{s,1} = I_{s,\bar{1}} = (-1)^{s-1} I_{s,1}$. Отсюда заключаем, что $I_{2n,1} = I_{2n,\bar{1}} = 0$.
Именно поэтому в модели синус-Гордона нет интегралов движения четных спинов.

Рассмотрим матрицу рассеяния первого бризера в модели синус-Гордона в специальной точке $\beta^2 = 4/5$:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th} \frac{1}{2}(\theta + \frac{2\pi i}{3})}{\operatorname{th} \frac{1}{2}(\theta - \frac{2\pi i}{3})}. \tag{18}$$

Пример: редукция модели синус-Гордона с $\beta^2 = 4/5$

Рассмотрим матрицу рассеяния первого бризера в модели синус-Гордона в специальной точке $\beta^2 = 4/5$:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th} \frac{1}{2}(\theta + \frac{2\pi i}{3})}{\operatorname{th} \frac{1}{2}(\theta - \frac{2\pi i}{3})}. \tag{18}$$

Изучим редукцию этой модели, в которой частица 1 является элементарной.

Пример: редукция модели синус-Гордона с $\beta^2 = 4/5$

Рассмотрим матрицу рассеяния первого бризера в модели синус-Гордона в специальной точке $\beta^2 = 4/5$:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th} \frac{1}{2}(\theta + \frac{2\pi i}{3})}{\operatorname{th} \frac{1}{2}(\theta - \frac{2\pi i}{3})}. \tag{18}$$

Изучим редукцию этой модели, в которой частица 1 является элементарной. Есть полюс $\theta = \frac{2\pi i}{3}$, но знак вычета по $-i\theta$ отрицательный. Это значит, что, если мы дополним теорию связанным состоянием, теория будет неунитарной, то есть не все состояния будут иметь положительную норму.

Пример: редукция модели синус-Гордона с $\beta^2 = 4/5$

Рассмотрим матрицу рассеяния первого бризера в модели синус-Гордона в специальной точке $\beta^2 = 4/5$:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta + \frac{2\pi i}{3})}{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta - \frac{2\pi i}{3})}. \tag{18}$$

Изучим редукцию этой модели, в которой частица 1 является элементарной. Есть полюс $\theta = \frac{2\pi i}{3}$, но знак вычета по $-i\theta$ отрицательный. Это значит, что, если мы дополним теорию связанным состоянием, теория будет неунитарной, то есть не все состояния будут иметь положительную норму.

Найдем массу этого связанного состояния:

$$M_2 = 2M_1 \cos\frac{\pi}{3} = M_1,$$

Пример: редукция модели синус-Гордона с $\beta^2 = 4/5$

Рассмотрим матрицу рассеяния первого бризера в модели синус-Гордона в специальной точке $\beta^2 = 4/5$:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta + \frac{2\pi i}{3})}{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta - \frac{2\pi i}{3})}. \tag{18}$$

Изучим редукцию этой модели, в которой частица 1 является элементарной. Есть полюс $\theta = \frac{2\pi i}{3}$, но знак вычета по $-i\theta$ отрицательный. Это значит, что, если мы дополним теорию связанным состоянием, теория будет неунитарной, то есть не все состояния будут иметь положительную норму.

Найдем массу этого связанного состояния:

$$M_2 = 2M_1 \cos\frac{\pi}{3} = M_1,$$

и ее матрицу рассеяния с частицей 1:

$$S_{21}(\theta) = S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi}{3}\right) S_{11}\left(\theta - \frac{i\pi}{3}\right) = S_{11}(\theta).$$

Пример: редукция модели синус-Гордона с $\beta^2 = 4/5$

Рассмотрим матрицу рассеяния первого бризера в модели синус-Гордона в специальной точке $\beta^2 = 4/5$:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta + \frac{2\pi i}{3})}{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta - \frac{2\pi i}{3})}. \tag{18}$$

Изучим редукцию этой модели, в которой частица 1 является элементарной. Есть полюс $\theta = \frac{2\pi i}{3}$, но знак вычета по $-i\theta$ отрицательный. Это значит, что, если мы дополним теорию связанным состоянием, теория будет неунитарной, то есть не все состояния будут иметь положительную норму.
Найдем массу этого связанного состояния:

$$M_2 = 2M_1 \cos\frac{\pi}{3} = M_1,$$

и ее матрицу рассеяния с частицей 1:

$$S_{21}(\theta) = S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi}{3}\right) S_{11}\left(\theta - \frac{i\pi}{3}\right) = S_{11}(\theta).$$

Отождествим частицу 2 с частицей 1. Тогда

$$I_{s,1} = 2I_{s,1}\cos\tfrac{\pi s}{3} \quad\Rightarrow\quad \cos\tfrac{\pi s}{3} = \tfrac{1}{2}.$$

Рассмотрим матрицу рассеяния первого бризера в модели синус-Гордона в специальной точке $\beta^2 = 4/5$:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta + \frac{2\pi i}{3})}{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta - \frac{2\pi i}{3})}. \tag{18}$$

Изучим редукцию этой модели, в которой частица 1 является элементарной. Есть полюс $\theta = \frac{2\pi i}{3}$, но знак вычета по $-i\theta$ отрицательный. Это значит, что, если мы дополним теорию связанным состоянием, теория будет неунитарной, то есть не все состояния будут иметь положительную норму.

Найдем массу этого связанного состояния:

$$M_2 = 2M_1 \cos\frac{\pi}{3} = M_1,$$

и ее матрицу рассеяния с частицей 1:

$$S_{21}(\theta) = S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi}{3}\right) S_{11}\left(\theta - \frac{i\pi}{3}\right) = S_{11}(\theta).$$

Отождествим частицу 2 с частицей 1. Тогда

$$I_{s,1} = 2I_{s,1}\cos\tfrac{\pi s}{3} \quad \Rightarrow \quad \cos\tfrac{\pi s}{3} = \tfrac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что ненулевые интегралы движения имеют спины

$$s = \pm 1 \pmod 6.$$

Рассмотрим матрицу рассеяния первого бризера в модели синус-Гордона в специальной точке $\beta^2 = 4/5$:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta + \frac{2\pi i}{3})}{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta - \frac{2\pi i}{3})}. \tag{18}$$

Изучим редукцию этой модели, в которой частица 1 является элементарной. Есть полюс $\theta = \frac{2\pi i}{3}$, но знак вычета по $-i\theta$ отрицательный. Это значит, что, если мы дополним теорию связанным состоянием, теория будет неунитарной, то есть не все состояния будут иметь положительную норму.
Найдем массу этого связанного состояния:

$$M_2 = 2M_1 \cos\frac{\pi}{3} = M_1,$$

и ее матрицу рассеяния с частицей 1:

$$S_{21}(\theta) = S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi}{3}\right) S_{11}\left(\theta - \frac{i\pi}{3}\right) = S_{11}(\theta).$$

Отождествим частицу 2 с частицей 1. Тогда

$$I_{s,1} = 2I_{s,1}\cos\tfrac{\pi s}{3} \quad\Rightarrow\quad \cos\tfrac{\pi s}{3} = \tfrac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что ненулевые интегралы движения имеют спины

$$s = \pm 1 \pmod 6.$$

Это совпадает с интегралами движения Φ_{12}-возмущения минимальных моделей.

Пример: редукция модели синус-Гордона с $\beta^2 = 4/5$

Рассмотрим модель синус-Гордона как возмущение «мнимой» теории Лиувилля:

$$\mathcal{S}_0 = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \right), \qquad \mathcal{S}_1 = \frac{\mu}{2} \int d^2x \, e^{i\beta\phi}. \tag{19}$$

Рассмотрим модель синус-Гордона как возмущение «мнимой» теории Лиувилля:

$$\mathcal{S}_0 = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \right), \qquad \mathcal{S}_1 = \frac{\mu}{2} \int d^2x \, e^{i\beta\phi}. \tag{19}$$

Формально теория с действием $\mathcal{S}_0$ представляет собой конформную теорию с центральным зарядом

$$c = 1 - 12\alpha_0^2, \quad \alpha_0 = \beta^{-1} - \tfrac{1}{2}\beta, \tag{20}$$

Пример: редукция модели синус-Гордона с $\beta^2 = 4/5$

Рассмотрим модель синус-Гордона как возмущение «мнимой» теории Лиувилля:

$$\mathcal{S}_0 = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \right), \qquad \mathcal{S}_1 = \frac{\mu}{2} \int d^2x \, e^{i\beta\phi}. \tag{19}$$

Формально теория с действием $\mathcal{S}_0$ представляет собой конформную теорию с центральным зарядом

$$c = 1 - 12\alpha_0^2, \quad \alpha_0 = \beta^{-1} - \tfrac{1}{2}\beta, \tag{20}$$

и конформными размерностями полей $e^{i\alpha\phi}$

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\alpha_0), \qquad \Delta_{-\beta} = 1.$$

Рассмотрим модель синус-Гордона как возмущение «мнимой» теории Лиувилля:

$$\mathcal{S}_0 = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \right), \qquad \mathcal{S}_1 = \frac{\mu}{2} \int d^2x \, e^{i\beta\phi}. \tag{19}$$

Формально теория с действием $\mathcal{S}_0$ представляет собой конформную теорию с центральным зарядом

$$c = 1 - 12\alpha_0^2, \quad \alpha_0 = \beta^{-1} - \tfrac{1}{2}\beta, \tag{20}$$

и конформными размерностями полей $e^{i\alpha\phi}$

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\alpha_0), \qquad \Delta_{-\beta} = 1.$$

Легко проверить, что

$$\Delta_{\mathrm{p}} = \Delta_\beta = \Delta_{13}.$$

Пример: редукция модели синус-Гордона с $\beta^2 = 4/5$

Рассмотрим модель синус-Гордона как возмущение «мнимой» теории Лиувилля:

$$\mathcal{S}_0 = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \right), \qquad \mathcal{S}_1 = \frac{\mu}{2} \int d^2x \, e^{i\beta\phi}. \tag{19}$$

Формально теория с действием $\mathcal{S}_0$ представляет собой конформную теорию с центральным зарядом

$$c = 1 - 12\alpha_0^2, \quad \alpha_0 = \beta^{-1} - \tfrac{1}{2}\beta, \tag{20}$$

и конформными размерностями полей $e^{i\alpha\phi}$

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\alpha_0), \qquad \Delta_{-\beta} = 1.$$

Легко проверить, что

$$\Delta_{\mathrm{p}} = \Delta_\beta = \Delta_{13}.$$

Можно показать, что некоторые редукции модели синус-Гордона совпадают с Φ_{13}-возмущениями минимальных моделей с центральным зарядом c из 20.

Пример: редукция модели синус-Гордона с $\beta^2 = 4/5$

Рассмотрим модель синус-Гордона как возмущение «мнимой» теории Лиувилля:

$$\mathcal{S}_0 = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \right), \qquad \mathcal{S}_1 = \frac{\mu}{2} \int d^2x \, e^{i\beta\phi}. \tag{19}$$

Формально теория с действием $\mathcal{S}_0$ представляет собой конформную теорию с центральным зарядом

$$c = 1 - 12\alpha_0^2, \quad \alpha_0 = \beta^{-1} - \tfrac{1}{2}\beta, \tag{20}$$

и конформными размерностями полей $e^{i\alpha\phi}$

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\alpha_0), \qquad \Delta_{-\beta} = 1.$$

Легко проверить, что

$$\Delta_{\mathrm{p}} = \Delta_\beta = \Delta_{13}.$$

Можно показать, что некоторые редукции модели синус-Гордона совпадают с Φ_{13}-возмущениями минимальных моделей с центральным зарядом c из 20. При $\beta^2 = \frac{4}{5}$ центральный заряд равен $c = -\frac{22}{5}$. Теория совпадает Φ_{13}-возмущением модели Ли—Янга $M(2,5)$. Модель содержит два примарных поля

$$\Phi_{11} = \Phi_{14} = 1 : \ \Delta_{11} = 0, \quad \Phi_{12} = \Phi_{13} : \ \Delta_{13} = -\frac{1}{5}.$$

Пример: редукции модели синус-Гордона с $\beta^2 = 4/(2N+1)$

Обобщим полученный результат. Пусть $\beta^2 = 4/(2N+1)$, $N = 2, 3, \ldots$. Тогда в модели синус-Гордона имеется серия бризеров с массами

$$M_n = 2M_{\text{kink}} \sin \frac{\pi n}{2N-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Пример: редукции модели синус-Гордона с $\beta^2 = 4/(2N+1)$

Обобщим полученный результат. Пусть $\beta^2 = 4/(2N+1)$, $N = 2, 3, \ldots$. Тогда в модели синус-Гордона имеется серия бризеров с массами

$$M_n = 2M_{\text{kink}} \sin \frac{\pi n}{2N-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Если мы отбросим топологические солитоны (кинки), мы можем пожертвовать унитарностью и продлить серию до $2N-2$. При этом

$$M_n = M_{2N-1-n} = M_1 \frac{\sin \frac{\pi n}{2N-1}}{\sin \frac{\pi}{2N-1}} \quad (n = 1, 2, \ldots, 2N-2). \tag{21}$$

Обобщим полученный результат. Пусть $\beta^2 = 4/(2N+1)$, $N = 2, 3, \ldots$. Тогда в модели синус-Гордона имеется серия бризеров с массами

$$M_n = 2M_{\text{kink}} \sin\frac{\pi n}{2N-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Если мы отбросим топологические солитоны (кинки), мы можем пожертвовать унитарностью и продлить серию до $2N-2$. При этом

$$M_n = M_{2N-1-n} = M_1 \frac{\sin\frac{\pi n}{2N-1}}{\sin\frac{\pi}{2N-1}} \quad (n = 1, 2, \ldots, 2N-2). \tag{21}$$

Нетрудно показать, что

$$S_{n,2N-1-n'}(\theta) = S_{nn'}(\theta), \tag{22}$$

Обобщим полученный результат. Пусть $\beta^2 = 4/(2N+1)$, $N = 2, 3, \ldots$. Тогда в модели синус-Гордона имеется серия бризеров с массами

$$M_n = 2M_{\text{kink}} \sin \frac{\pi n}{2N-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Если мы отбросим топологические солитоны (кинки), мы можем пожертвовать унитарностью и продлить серию до $2N-2$. При этом

$$M_n = M_{2N-1-n} = M_1 \frac{\sin \frac{\pi n}{2N-1}}{\sin \frac{\pi}{2N-1}} \quad (n = 1, 2, \ldots, 2N-2). \tag{21}$$

Нетрудно показать, что

$$S_{n,2N-1-n'}(\theta) = S_{nn'}(\theta), \tag{22}$$

Если мы отождествим частицы n и $2N-1-n$, мы можем думать (и это можно проверить), что теория отвечает Φ_{13}-возмущению конформных моделей $M(2, 2N+1)$ с центральными зарядами и конформными размерностями

$$c_N = 1 - 3\frac{(2N-1)^2}{2N+1}, \quad \Delta_{1n} = -\frac{(n-1)(2N-n)}{2(2N+1)} \quad (n = 1, 2, \ldots, 2N). \tag{23}$$

Эти размерности отвечают примарным полям $\Phi_{1n} = \Phi_{1,2N+1-n}$.

Рассмотрим реакцию $1 + (n-1) \to n$. Имеем

$$\bar{u}^1_{n,n-1} = \frac{\pi}{2N-1}, \qquad \bar{u}^{n-1}_{1n} = \frac{\pi(n-1)}{2N-1}. \tag{24}$$

Рассмотрим реакцию $1 + (n-1) \to n$. Имеем

$$\bar{u}^1_{n,n-1} = \frac{\pi}{2N-1}, \qquad \bar{u}^{n-1}_{1n} = \frac{\pi(n-1)}{2N-1}. \tag{24}$$

Следовательно,

$$I_{s,n} = I_{s,n-1} e^{i\pi s/(2N-1)} + I_{s,1} e^{-i\pi s(n-1)/(2N-1)} = I_{s,1} \sum_{k=1}^{n} e^{i\pi s(n+1-2k)/(2N-1)}$$

$$= I_{s,1} \times \begin{cases} \frac{\sin \frac{\pi s n}{2N-1}}{\sin \frac{\pi s}{2N-1}}, & s \neq 0 \pmod{2N-1}; \\ n(-1)^{s(n+1)/(2N-1)}, & s = 0 \pmod{2N-1}. \end{cases}$$

Рассмотрим реакцию $1 + (n-1) \to n$. Имеем

$$\bar{u}^1_{n,n-1} = \frac{\pi}{2N-1}, \qquad \bar{u}^{n-1}_{1n} = \frac{\pi(n-1)}{2N-1}. \tag{24}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_{s,n} &= I_{s,n-1} e^{i\pi s/(2N-1)} + I_{s,1} e^{-i\pi s(n-1)/(2N-1)} = I_{s,1} \sum_{k=1}^{n} e^{i\pi s(n+1-2k)/(2N-1)} \\ &= I_{s,1} \times \begin{cases} \frac{\sin \frac{\pi s n}{2N-1}}{\sin \frac{\pi s}{2N-1}}, & s \neq 0 \pmod{2N-1}; \\ n(-1)^{s(n+1)/(2N-1)}, & s = 0 \pmod{2N-1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Потребовав $I_{s,2N-2} = I_{s,1}$, получаем, что

$$s \neq 0 \pmod{2N-1}, \quad (-1)^{s-1} = 1,$$

то есть спины нечетны и не кратны $2N-1$. Это соответствует спектру Φ_{13}-возмущений $M(2, 2N+1)$-моделей, описанному в прошлой лекции.

Пример: модель Изинга

Модель Изинга в критической точке в непрерывном пределе описывается конформной теорией $M(3,4)$ с двумя единичными полями

$$\varepsilon = \Phi_{21} = \Phi_{13} : \Delta_\varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \sigma = \Phi_{12} = \Phi_{22} : \Delta_\sigma = \frac{1}{16}.$$

Пример: модель Изинга

Модель Изинга в критической точке в непрерывном пределе описывается конформной теорией $M(3,4)$ с двумя единичными полями

$$\varepsilon = \Phi_{21} = \Phi_{13} : \Delta_\varepsilon = \tfrac{1}{2}, \quad \sigma = \Phi_{12} = \Phi_{22} : \Delta_\sigma = \tfrac{1}{16}.$$

В окрестности критической точки мы имеем теорию

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{M(3,4)} + \tau \int d^2x\, \varepsilon(x) - h \int d^2x\, \sigma(x), \qquad \tau \sim \frac{T - T_c}{T_c}, \qquad h \sim H_{\text{ext}}.$$

Пример: модель Изинга

Модель Изинга в критической точке в непрерывном пределе описывается конформной теорией $M(3,4)$ с двумя единичными полями

$$\varepsilon = \Phi_{21} = \Phi_{13} : \Delta_\varepsilon = \tfrac{1}{2}, \quad \sigma = \Phi_{12} = \Phi_{22} : \Delta_\sigma = \tfrac{1}{16}.$$

В окрестности критической точки мы имеем теорию

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{M(3,4)} + \tau \int d^2x\,\varepsilon(x) - h \int d^2x\,\sigma(x), \qquad \tau \sim \frac{T - T_c}{T_c}, \qquad h \sim H_{\mathrm{ext}}.$$

Такая общая теория не является интегрируемой, поскольку не имеет высших интегралов движения. Но теории с $h = 0$ (температурное возмущение) и $\tau = 0$ (возмущение внешним магнитным полем) интегрируемы.

Модель Изинга в критической точке в непрерывном пределе описывается конформной теорией $M(3,4)$ с двумя единичными полями

$$\varepsilon = \Phi_{21} = \Phi_{13} : \Delta_\varepsilon = \tfrac{1}{2}, \quad \sigma = \Phi_{12} = \Phi_{22} : \Delta_\sigma = \tfrac{1}{16}.$$

В окрестности критической точки мы имеем теорию

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{M(3,4)} + \tau \int d^2x\, \varepsilon(x) - h \int d^2x\, \sigma(x), \qquad \tau \sim \frac{T - T_c}{T_c}, \qquad h \sim H_{\text{ext}}.$$

Такая общая теория не является интегрируемой, поскольку не имеет высших интегралов движения. Но теории с $h = 0$ (температурное возмущение) и $\tau = 0$ (возмущение внешним магнитным полем) интегрируемы.
С другой стороны модель Изинга соответствует классической теории Ландау со свободной энергией

$$F[\sigma] = \int d^2x \left(\frac{g}{2} (\nabla\sigma)^2 - h\sigma + \frac{a\tau\sigma^2}{2} + \frac{b\sigma^4}{4!} + \cdots \right). \tag{25}$$

Свободную энергию (25) можно использовать ка «затравочное действие» для флуктуационной теории.

Пример: модель Изинга

Модель Изинга в критической точке в непрерывном пределе описывается конформной теорией $M(3,4)$ с двумя единичными полями

$$\varepsilon = \Phi_{21} = \Phi_{13} : \Delta_\varepsilon = \tfrac{1}{2}, \quad \sigma = \Phi_{12} = \Phi_{22} : \Delta_\sigma = \tfrac{1}{16}.$$

В окрестности критической точки мы имеем теорию

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{M(3,4)} + \tau \int d^2x\, \varepsilon(x) - h \int d^2x\, \sigma(x), \qquad \tau \sim \frac{T - T_c}{T_c}, \qquad h \sim H_{\text{ext}}.$$

Такая общая теория не является интегрируемой, поскольку не имеет высших интегралов движения. Но теории с $h = 0$ (температурное возмущение) и $\tau = 0$ (возмущение внешним магнитным полем) интегрируемы.

С другой стороны модель Изинга соответствует классической теории Ландау со свободной энергией

$$F[\sigma] = \int d^2x \left(\frac{g}{2} (\nabla\sigma)^2 - h\sigma + \frac{a\tau\sigma^2}{2} + \frac{b\sigma^4}{4!} + \cdots \right). \tag{25}$$

Свободную энергию (25) можно использовать ка «затравочное действие» для флуктуационной теории.

Рассмотрим температурное возмущение ($h = 0$, $\tau \neq 0$). Эта теория описывается свободным майорановским фермионом. В бозонных терминах это теория с матрицей рассеяния $S(\theta) = -1$. Ее интегралы движения I_s имеют все нечетные спины (см. задачу 4 к предыдущей лекции):

$$I_s = i^{s+2} \int dz \; {:}\partial^{(s-1)/2}\psi\, \partial^{(s+1)/2}\psi{:} + \cdots \quad (s > 0).$$

Пример: модель Изинга в магнитном поле

Рассмотрим теперь возмущение магнитным полем ($\tau = 0$, $h \neq 0$). По размерности массы частиц пропорциональны $m_i \sim h^{8/15}$.

Пример: модель Изинга в магнитном поле

Рассмотрим теперь возмущение магнитным полем ($\tau = 0$, $h \neq 0$). По размерности массы частиц пропорциональны $m_i \sim h^{8/15}$.
Оператор возмущения $\sigma = \Phi_{21}$, поэтому

$$s = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \pmod{30}. \tag{26}$$

Пример: модель Изинга в магнитном поле

Рассмотрим теперь возмущение магнитным полем ($\tau = 0$, $h \neq 0$). По размерности массы частиц пропорциональны $m_i \sim h^{8/15}$.
Оператор возмущения $\sigma = \Phi_{21}$, поэтому

$$s = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \pmod{30}. \tag{26}$$

В спектре отсутствуют спины, кратные 3 и 5. Учтем теорему

Теорема (Φ^n-свойство)

Если теория содержит нейтральную частицу обладающую Φ^n-свойством, то есть, если имеется цепочка последовательных $n-2$ слияний:

$$1 + 1 \to 2,\ 1 + 2 \to 3,\ \ldots,\ (n-2) + 1 \to 1,$$

причем каждая следующая частица 1 в цепочки отстоит от предыдущей на один и тот же угол u_{11}^2 в одном и том же направлении, собственные значения интегралов движения спинов кратных n равны нулю на этой частице.

Пример: модель Изинга в магнитном поле

Рассмотрим теперь возмущение магнитным полем ($\tau = 0$, $h \neq 0$). По размерности массы частиц пропорциональны $m_i \sim h^{8/15}$.
Оператор возмущения $\sigma = \Phi_{21}$, поэтому

$$s = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \pmod{30}. \tag{26}$$

В спектре отсутствуют спины, кратные 3 и 5. Учтем теорему

Теорема (Φ^n-свойство)

Если теория содержит нейтральную частицу обладающую Φ^n-свойством, то есть, если имеется цепочка последовательных $n-2$ слияний:

$$1+1 \to 2,\ 1+2 \to 3,\ \ldots,\ (n-2)+1 \to 1,$$

причем каждая следующая частица 1 в цепочки отстоит от предыдущей на один и тот же угол u_{11}^2 в одном и том же направлении, собственные значения интегралов движения спинов кратных n равны нулю на этой частице.

Можно предположить, что теория обладает Φ^3- Φ^5-свойствами.

Рассмотрим теперь возмущение магнитным полем ($\tau = 0$, $h \neq 0$). По размерности массы частиц пропорциональны $m_i \sim h^{8/15}$.
Оператор возмущения $\sigma = \Phi_{21}$, поэтому

$$s = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \pmod{30}. \tag{26}$$

В спектре отсутствуют спины, кратные 3 и 5. Учтем теорему

Теорема (Φ^n-свойство)

Если теория содержит нейтральную частицу обладающую Φ^n-свойством, то есть, если имеется цепочка последовательных $n-2$ слияний:

$$1+1 \to 2,\ 1+2 \to 3,\ \ldots,\ (n-2)+1 \to 1,$$

причем каждая следующая частица 1 в цепочки отстоит от предыдущей на один и тот же угол u_{11}^2 в одном и том же направлении, собственные значения интегралов движения спинов кратных n равны нулю на этой частице.

Можно предположить, что теория обладает Φ^3- Φ^5-свойствами. Что касается Φ^3-свойства, то его легко увидеть. При $\tau = 0$ параметр порядка σ в свободной энергии Ландау имеет минимум в точке $\sigma = \sigma_0 = (6h/b)^{1/3}$. Вблизи минимума свободную энергию можно разложить по $\varphi = \sigma - \sigma_0$:

$$F[\sigma_0 + \varphi] = \text{const} + \int d^2x \left(\frac{g}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{b^{1/3}(6h)^{2/3}\varphi^2}{4} + h\varphi^3 + \frac{b\varphi^4}{4!} + \cdots \right).$$

Пример: модель Изинга в магнитном поле

Φ^3-свойство означает, что $S_1 1(\theta)$ имеет полюс при $\theta = \frac{2\pi i}{3}$ и

$$S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi}{3}\right) S_{11}\left(\theta - \frac{i\pi}{3}\right) = S_{11}(\theta), \qquad (27)$$

Но кроме этого полюса должны быть и другие полюсы.

Пример: модель Изинга в магнитном поле

Φ^3-свойство означает, что $S_1 1(\theta)$ имеет полюс при $\theta = \frac{2\pi i}{3}$ и

$$S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi}{3}\right) S_{11}\left(\theta - \frac{i\pi}{3}\right) = S_{11}(\theta), \tag{27}$$

Но кроме этого полюса должны быть и другие полюсы.
Φ^5-свойство означает, что должна быть частица 2 со свойствами: $1+1 \to 2$, $2+2 \to 1$. Отсюда

$$I_{s,2} = 2I_{s,1}\cos s\bar{u}_{21}^1, \qquad I_{s,1} = 2I_{s,2}\cos s\bar{u}_{12}^2$$

Пример: модель Изинга в магнитном поле

Φ^3-свойство означает, что $S_11(\theta)$ имеет полюс при $\theta = \frac{2\pi i}{3}$ и

$$S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi}{3}\right) S_{11}\left(\theta - \frac{i\pi}{3}\right) = S_{11}(\theta), \tag{27}$$

Но кроме этого полюса должны быть и другие полюсы.
Φ^5-свойство означает, что должна быть частица 2 со свойствами: $1+1 \to 2$, $2+2 \to 1$. Отсюда

$$I_{s,2} = 2I_{s,1} \cos s\bar{u}_{21}^1, \qquad I_{s,1} = 2I_{s,2} \cos s\bar{u}_{12}^2$$

Значит

$$4 \cos s\bar{u}_{21}^1 \cos s\bar{u}_{12}^2 = 1.$$

Это уравнение имеет решение

$$\bar{u}_{21}^1 = \frac{\pi}{5}, \qquad \bar{u}_{12}^2 = \frac{2\pi}{5}. \tag{28}$$

Пример: модель Изинга в магнитном поле

Φ^3-свойство означает, что $S_1 1(\theta)$ имеет полюс при $\theta = \frac{2\pi i}{3}$ и

$$S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi}{3}\right) S_{11}\left(\theta - \frac{i\pi}{3}\right) = S_{11}(\theta), \tag{27}$$

Но кроме этого полюса должны быть и другие полюсы.
Φ^5-свойство означает, что должна быть частица 2 со свойствами: $1 + 1 \to 2$, $2 + 2 \to 1$. Отсюда

$$I_{s,2} = 2I_{s,1} \cos s\bar{u}_{21}^1, \qquad I_{s,1} = 2I_{s,2} \cos s\bar{u}_{12}^2$$

Значит

$$4 \cos s\bar{u}_{21}^1 \cos s\bar{u}_{12}^2 = 1.$$

Это уравнение имеет решение

$$\bar{u}_{21}^1 = \frac{\pi}{5}, \qquad \bar{u}_{12}^2 = \frac{2\pi}{5}. \tag{28}$$

Отсюда находим

$$\frac{m_2}{m_1} = 2\cos\frac{\pi}{5} \simeq 1.618. \tag{29}$$

Φ^3-свойство означает, что $S_1 1(\theta)$ имеет полюс при $\theta = \frac{2\pi i}{3}$ и

$$S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi}{3}\right) S_{11}\left(\theta - \frac{i\pi}{3}\right) = S_{11}(\theta), \tag{27}$$

Но кроме этого полюса должны быть и другие полюсы.
Φ^5-свойство означает, что должна быть частица 2 со свойствами: $1 + 1 \to 2$, $2 + 2 \to 1$. Отсюда

$$I_{s,2} = 2I_{s,1} \cos s\bar{u}^1_{21}, \qquad I_{s,1} = 2I_{s,2} \cos s\bar{u}^2_{12}$$

Значит

$$4 \cos s\bar{u}^1_{21} \cos s\bar{u}^2_{12} = 1.$$

Это уравнение имеет решение

$$\bar{u}^1_{21} = \frac{\pi}{5}, \qquad \bar{u}^2_{12} = \frac{2\pi}{5}. \tag{28}$$

Отсюда находим

$$\frac{m_2}{m_1} = 2\cos\frac{\pi}{5} \simeq 1.618. \tag{29}$$

Надо найти решение уравнения (27) с полюсами $\theta = \frac{2\pi i}{3}$ и $\theta = \frac{2\pi i}{5}$ с положительными вычетами. Из (27) следует, что также имеются полюсы при $\theta = \frac{\pi i}{15}, \frac{14\pi i}{15}$. С условием того, что m_1 является наименьшей массой, отбрасываем второй.

Φ^3-свойство означает, что $S_11(\theta)$ имеет полюс при $\theta = \frac{2\pi i}{3}$ и

$$S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi}{3}\right) S_{11}\left(\theta - \frac{i\pi}{3}\right) = S_{11}(\theta), \tag{27}$$

Но кроме этого полюса должны быть и другие полюсы.
Φ^5-свойство означает, что должна быть частица 2 со свойствами: $1+1\to 2$, $2+2\to 1$. Отсюда

$$I_{s,2} = 2I_{s,1}\cos s\bar{u}^1_{21}, \qquad I_{s,1} = 2I_{s,2}\cos s\bar{u}^2_{12}$$

Значит

$$4\cos s\bar{u}^1_{21}\cos s\bar{u}^2_{12} = 1.$$

Это уравнение имеет решение

$$\bar{u}^1_{21} = \frac{\pi}{5}, \qquad \bar{u}^2_{12} = \frac{2\pi}{5}. \tag{28}$$

Отсюда находим

$$\frac{m_2}{m_1} = 2\cos\frac{\pi}{5} \simeq 1.618. \tag{29}$$

Надо найти решение уравнения (27) с полюсами $\theta = \frac{2\pi i}{3}$ и $\theta = \frac{2\pi i}{5}$ с положительными вычетами. Из (27) следует, что также имеются полюсы при $\theta = \frac{\pi i}{15}, \frac{14\pi i}{15}$. С условием того, что m_1 является наименьшей массой, отбрасываем второй. Находим решение

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th}\frac{\theta+2\pi i/3}{2}\operatorname{th}\frac{\theta+2\pi i/5}{2}\operatorname{th}\frac{\theta+\pi i/15}{2}}{\operatorname{th}\frac{\theta-2\pi i/3}{2}\operatorname{th}\frac{\theta-2\pi i/5}{2}\operatorname{th}\frac{\theta-\pi i/15}{2}}. \tag{30}$$

Пример: модель Изинга в магнитном поле

Дополнительный полюс дает третью частицу

$$\bar{u}_{31}^{1} = \frac{\pi}{30}, \qquad \frac{m_3}{m_1} = 2\cos\frac{\pi}{30} \simeq 1.989. \tag{31}$$

Дополнительный полюс дает третью частицу

$$\bar{u}^1_{31} = \frac{\pi}{30}, \qquad \frac{m_3}{m_1} = 2\cos\frac{\pi}{30} \simeq 1.989. \tag{31}$$

Далее, амплитуда рассеяния

$$S_{12}(\theta) = S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi}{5}\right) S_{11}\left(\theta - \frac{i\pi}{5}\right) \tag{32}$$

имеет полюсы в точках $\theta = \frac{4\pi i}{5}, \frac{3\pi i}{5}, \frac{7\pi i}{15}, \frac{4\pi i}{15}$. Первые три легко отождествляются с u^a_{12}, $a = 1, 2, 3$. Последний соответствует новой частице 4 массы

$$\frac{m_4}{m_1} = 4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{7\pi}{30} \simeq 2.405. \tag{33}$$

Дополнительный полюс дает третью частицу

$$\bar{u}_{31}^{1} = \frac{\pi}{30}, \qquad \frac{m_3}{m_1} = 2\cos\frac{\pi}{30} \simeq 1.989. \tag{31}$$

Далее, амплитуда рассеяния

$$S_{12}(\theta) = S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi}{5}\right) S_{11}\left(\theta - \frac{i\pi}{5}\right) \tag{32}$$

имеет полюсы в точках $\theta = \frac{4\pi i}{5}, \frac{3\pi i}{5}, \frac{7\pi i}{15}, \frac{4\pi i}{15}$. Первые три легко отождествляются с u_{12}^{a}, $a = 1, 2, 3$. Последний соответствует новой частице 4 массы

$$\frac{m_4}{m_1} = 4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{7\pi}{30} \simeq 2.405. \tag{33}$$

Продолжая процедуру дальше, можно найти еще четыре частицы с массами

$$\begin{aligned} \frac{m_5}{m_1} &= 4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{15} \simeq 2.956, & \frac{m_6}{m_1} &= 4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{30} \simeq 3.218, \\ \frac{m_7}{m_1} &= 8\cos^2\frac{\pi}{5}\cos\frac{7\pi}{30} \simeq 3.891, & \frac{m_8}{m_1} &= 8\cos^2\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{15} \simeq 4.783. \end{aligned} \tag{34}$$

Частицы 5 и 6 появляются как связанные состояния $2+2$, частица 7 появляется в канале $3+3$, а частица 8 — в канале $4+4$.