

Лекция 8.
Решение модели Тирринга методом анзаца Бете: спектр
частиц и матрица рассеяния

Рассмотрим теперь море фермионов с дырками: n_k не покрывают отрезок на \mathbb{Z} . Тогда

$$m_0 L \operatorname{sh} \xi_k = -2\pi n_k + \sum_{l=1}^N \Phi(\xi_k - \xi_l). \quad (1)$$

Рассмотрим теперь море фермионов с дырками: n_k не покрывают отрезок на \mathbb{Z} . Тогда

$$m_0 L \operatorname{sh} \xi_k = -2\pi n_k + \sum_{l=1}^N \Phi(\xi_k - \xi_l). \quad (1)$$

Определим $\xi(n)$ уравнением

$$m_0 L \operatorname{sh} \xi(n) = -2\pi n + \sum_{l=1}^N \Phi(\xi(n) - \xi_l) \quad (2)$$

Очевидно, $\xi(n_k) = \xi_k$. В случае $n = n_k$ мы будем говорить, что одночастичное состояние заполнено. Для всех остальных n будем считать состояние пустым.

Рассмотрим теперь море фермионов с дырками: n_k не покрывают отрезок на \mathbb{Z} . Тогда

$$m_0 L \operatorname{sh} \xi_k = -2\pi n_k + \sum_{l=1}^N \Phi(\xi_k - \xi_l). \quad (1)$$

Определим $\xi(n)$ уравнением

$$m_0 L \operatorname{sh} \xi(n) = -2\pi n + \sum_{l=1}^N \Phi(\xi(n) - \xi_l) \quad (2)$$

Очевидно, $\xi(n_k) = \xi_k$. В случае $n = n_k$ мы будем говорить, что одночастичное состояние заполнено. Для всех остальных n будем считать состояние пустым. Определим две плотности.

- Плотность состояний $\rho(\xi(n)) = \frac{2\pi}{L|\xi(n+1) - \xi(n)|} \simeq \frac{2\pi}{L} \left| \frac{dn}{d\xi(n)} \right|$.

Рассмотрим теперь море фермионов с дырками: n_k не покрывают отрезок на \mathbb{Z} . Тогда

$$m_0 L \operatorname{sh} \xi_k = -2\pi n_k + \sum_{l=1}^N \Phi(\xi_k - \xi_l). \quad (1)$$

Определим $\xi(n)$ уравнением

$$m_0 L \operatorname{sh} \xi(n) = -2\pi n + \sum_{l=1}^N \Phi(\xi(n) - \xi_l) \quad (2)$$

Очевидно, $\xi(n_k) = \xi_k$. В случае $n = n_k$ мы будем говорить, что одночастичное состояние заполнено. Для всех остальных n будем считать состояние пустым.

Определим две плотности.

- Плотность состояний $\rho(\xi(n)) = \frac{2\pi}{L|\xi(n+1) - \xi(n)|} \simeq \frac{2\pi}{L} \left| \frac{dn}{d\xi(n)} \right|$.
- Плотность частиц $\rho^\bullet(\xi) = \left\langle \frac{2\pi}{L|\xi_{k+1} - \xi_k|} \right\rangle_{\xi_k \simeq \xi} = \left\langle \frac{2\pi}{L} \left| \frac{dk}{d\xi_k} \right| \right\rangle_{\xi_k \simeq \xi}$.

Рассмотрим теперь море фермионов с **дырками**: n_k не покрывают отрезок на \mathbb{Z} . Тогда

$$m_0 L \operatorname{sh} \xi_k = -2\pi n_k + \sum_{l=1}^N \Phi(\xi_k - \xi_l). \quad (1)$$

Определим $\xi(n)$ уравнением

$$m_0 L \operatorname{sh} \xi(n) = -2\pi n + \sum_{l=1}^N \Phi(\xi(n) - \xi_l) \quad (2)$$

Очевидно, $\xi(n_k) = \xi_k$. В случае $n = n_k$ мы будем говорить, что одночастичное состояние заполнено. Для всех остальных n будем считать состояние пустым.

Определим две плотности.

- Плотность состояний $\rho(\xi(n)) = \frac{2\pi}{L|\xi(n+1) - \xi(n)|} \simeq \frac{2\pi}{L} \left| \frac{dn}{d\xi(n)} \right|$.
- Плотность частиц $\rho^\bullet(\xi) = \left\langle \frac{2\pi}{L|\xi_{k+1} - \xi_k|} \right\rangle_{\xi_k \simeq \xi} = \left\langle \frac{2\pi}{L} \left| \frac{dk}{d\xi_k} \right| \right\rangle_{\xi_k \simeq \xi}$.

Их разность $\rho(\xi) - \rho^\bullet(\xi) = \rho^\circ(\xi)$ будем называть **плотностью дырок**.

Аналогично интегральному уравнению для плотности состояний в основном состоянии выводится интегральное уравнение при наличии дырок:

$$m_0 \operatorname{ch} \xi = \rho(\xi) + \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi} \Phi'(\xi - \xi') (\rho(\xi') - \rho^{\circ}(\xi')). \quad (3)$$

Аналогично интегральному уравнению для плотности состояний в основном состоянии выводится интегральное уравнение при наличии дырок:

$$m_0 \operatorname{ch} \xi = \rho(\xi) + \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi} \Phi'(\xi - \xi') (\rho(\xi') - \rho^{\circ}(\xi')). \quad (3)$$

Пусть $\rho_{\text{vac}}(\xi)$ — плотность состояний для основного состояния (вакуума), то есть решение уравнения

$$m_0 \operatorname{ch} \xi = \rho_{\text{vac}}(\xi) + \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi} \Phi'(\xi - \xi') \rho_{\text{vac}}(\xi'). \quad (4)$$

Положим

$$\delta\rho(\xi) = \rho(\xi) - \rho_{\text{vac}}(\xi).$$

Аналогично интегральному уравнению для плотности состояний в основном состоянии выводится интегральное уравнение при наличии дырок:

$$m_0 \operatorname{ch} \xi = \rho(\xi) + \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi} \Phi'(\xi - \xi') (\rho(\xi') - \rho^{\circ}(\xi')). \quad (3)$$

Пусть $\rho_{\text{vac}}(\xi)$ — плотность состояний для основного состояния (вакуума), то есть решение уравнения

$$m_0 \operatorname{ch} \xi = \rho_{\text{vac}}(\xi) + \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi} \Phi'(\xi - \xi') \rho_{\text{vac}}(\xi'). \quad (4)$$

Положим

$$\delta\rho(\xi) = \rho(\xi) - \rho_{\text{vac}}(\xi).$$

Найдем разность уравнений (3) и (4):

$$\delta\rho(\xi) + \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi} \Phi'(\xi - \xi') \delta\rho(\xi') = \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi} \Phi'(\xi - \xi') \rho^{\circ}(\xi'). \quad (5)$$

Решим это уравнение в пределе $\Theta \rightarrow \infty$.

При $\Theta \rightarrow \infty$ мы можем применить преобразование Фурье

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} X(\xi) e^{i\xi\omega}, \quad X = \Phi', \delta\rho, \rho^{\circ}, \dots$$

При $\Theta \rightarrow \infty$ мы можем применить преобразование Фурье

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} X(\xi) e^{i\xi\omega}, \quad X = \Phi', \delta\rho, \rho^\circ, \dots$$

Уравнение (5) становится алгебраическим

$$\delta\tilde{\rho}(\omega) + \tilde{\Phi}'(\omega)\delta\tilde{\rho}(\omega) = \tilde{\Phi}'(\omega)\tilde{\rho}^\circ(\omega).$$

При $\Theta \rightarrow \infty$ мы можем применить преобразование Фурье

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} X(\xi) e^{i\xi\omega}, \quad X = \Phi', \delta\rho, \rho^\circ, \dots$$

Уравнение (5) становится алгебраическим

$$\delta\tilde{\rho}(\omega) + \tilde{\Phi}'(\omega)\delta\tilde{\rho}(\omega) = \tilde{\Phi}'(\omega)\tilde{\rho}^\circ(\omega).$$

Получаем

$$\tilde{\Phi}'(\omega) = -\frac{\text{sh } \pi g\omega}{\text{sh } \pi\omega}, \quad \delta\tilde{\rho}(\omega) = -\frac{\text{sh } \pi g\omega}{2 \text{sh } \frac{\pi(1-g)\omega}{2} \text{ch } \frac{\pi(1+g)\omega}{2}} \tilde{\rho}^\circ(\omega). \quad (6)$$

Дробный заряд дырки

Эффект обрезания: **дробный заряд**. Формальный заряд дырки равен -1 , но когда мы вносим в систему дырку, частицы втягиваются в область $-\Theta \leq \xi \leq \Theta$ или выталкиваются из-под нее. У нас есть две величины

$$\Delta N = -L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} \rho^{\circ}(\xi) = -L\tilde{\rho}^{\circ}(0), \quad \Delta Q = L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} (\delta\rho(\xi) - \rho^{\circ}(\xi)). \quad (7)$$

Дробный заряд дырки

Эффект обрезания: **дробный заряд**. Формальный заряд дырки равен -1 , но когда мы вносим в систему дырку, частицы втягиваются в область $-\Theta \leq \xi \leq \Theta$ или выталкиваются из-под нее. У нас есть две величины

$$\Delta N = -L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} \rho^{\circ}(\xi) = -L\tilde{\rho}^{\circ}(0), \quad \Delta Q = L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} (\delta\rho(\xi) - \rho^{\circ}(\xi)). \quad (7)$$

Получаем

$$\Delta Q = - \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega\xi} \frac{\text{sh } \pi\omega}{2 \text{sh } \frac{\pi(1-g)\omega}{2} \text{ch } \frac{\pi(1+g)\omega}{2}} \tilde{\rho}^{\circ}(\omega) \simeq \frac{\Delta N}{1-g}. \quad (8)$$

Дробный заряд дырки

Эффект обрезания: **дробный заряд**. Формальный заряд дырки равен -1 , но когда мы вносим в систему дырку, частицы втягиваются в область $-\Theta \leq \xi \leq \Theta$ или выталкиваются из-под нее. У нас есть две величины

$$\Delta N = -L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} \rho^{\circ}(\xi) = -L\tilde{\rho}^{\circ}(0), \quad \Delta Q = L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} (\delta\rho(\xi) - \rho^{\circ}(\xi)). \quad (7)$$

Получаем

$$\Delta Q = - \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega\xi} \frac{\text{sh } \pi\omega}{2 \text{sh } \frac{\pi(1-g)\omega}{2} \text{ch } \frac{\pi(1+g)\omega}{2}} \tilde{\rho}^{\circ}(\omega) \simeq \frac{\Delta N}{1-g}. \quad (8)$$

Отсюда находим дробный заряд дырки

$$z^{\circ} = -\frac{\Delta Q}{\Delta N} = -\frac{1}{1-g}. \quad (9)$$

Дробный заряд дырки

Эффект обрезания: **дробный заряд**. Формальный заряд дырки равен -1 , но когда мы вносим в систему дырку, частицы втягиваются в область $-\Theta \leq \xi \leq \Theta$ или выталкиваются из-под нее. У нас есть две величины

$$\Delta N = -L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} \rho^{\circ}(\xi) = -L\tilde{\rho}^{\circ}(0), \quad \Delta Q = L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} (\delta\rho(\xi) - \rho^{\circ}(\xi)). \quad (7)$$

Получаем

$$\Delta Q = - \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega\xi} \frac{\text{sh } \pi\omega}{2 \text{sh } \frac{\pi(1-g)\omega}{2} \text{ch } \frac{\pi(1+g)\omega}{2}} \tilde{\rho}^{\circ}(\omega) \simeq \frac{\Delta N}{1-g}. \quad (8)$$

Отсюда находим дробный заряд дырки

$$z^{\circ} = -\frac{\Delta Q}{\Delta N} = -\frac{1}{1-g}. \quad (9)$$

Значит, величина Q не совпадает с физическим количеством частиц. Следовательно,

$$Q = |z^{\circ}| \int dx \psi_{\text{phys}}^+ \psi_{\text{phys}} + \text{const} \quad \Rightarrow \quad \psi = |z^{\circ}|^{1/2} \psi_{\text{phys}}. \quad (10)$$

Дробный заряд дырки

Эффект обрезания: **дробный заряд**. Формальный заряд дырки равен -1 , но когда мы вносим в систему дырку, частицы втягиваются в область $-\Theta \leq \xi \leq \Theta$ или выталкиваются из-под нее. У нас есть две величины

$$\Delta N = -L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} \rho^{\circ}(\xi) = -L\tilde{\rho}^{\circ}(0), \quad \Delta Q = L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} (\delta\rho(\xi) - \rho^{\circ}(\xi)). \quad (7)$$

Получаем

$$\Delta Q = - \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega\xi} \frac{\text{sh } \pi\omega}{2 \text{sh } \frac{\pi(1-g)\omega}{2} \text{ch } \frac{\pi(1+g)\omega}{2}} \tilde{\rho}^{\circ}(\omega) \simeq \frac{\Delta N}{1-g}. \quad (8)$$

Отсюда находим дробный заряд дырки

$$z^{\circ} = -\frac{\Delta Q}{\Delta N} = -\frac{1}{1-g}. \quad (9)$$

Значит, величина Q не совпадает с физическим количеством частиц. Следовательно,

$$Q = |z^{\circ}| \int dx \psi_{\text{phys}}^+ \psi_{\text{phys}} + \text{const} \Rightarrow \psi = |z^{\circ}|^{1/2} \psi_{\text{phys}}. \quad (10)$$

Это приводит к перенормировке константы связи g :

$$g_{\text{phys}} = g|z^{\circ}| = \frac{g}{1-g} \Leftrightarrow \frac{1}{g_{\text{phys}}} = \frac{1}{g} - 1. \quad (11)$$

Дробный заряд дырки

Эффект обрезания: **дробный заряд**. Формальный заряд дырки равен -1 , но когда мы вносим в систему дырку, частицы втягиваются в область $-\Theta \leq \xi \leq \Theta$ или выталкиваются из-под нее. У нас есть две величины

$$\Delta N = -L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} \rho^{\circ}(\xi) = -L\tilde{\rho}^{\circ}(0), \quad \Delta Q = L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} (\delta\rho(\xi) - \rho^{\circ}(\xi)). \quad (7)$$

Получаем

$$\Delta Q = - \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega\xi} \frac{\text{sh } \pi\omega}{2 \text{sh } \frac{\pi(1-g)\omega}{2} \text{ch } \frac{\pi(1+g)\omega}{2}} \tilde{\rho}^{\circ}(\omega) \simeq \frac{\Delta N}{1-g}. \quad (8)$$

Отсюда находим дробный заряд дырки

$$z^{\circ} = -\frac{\Delta Q}{\Delta N} = -\frac{1}{1-g}. \quad (9)$$

Значит, величина Q не совпадает с физическим количеством частиц. Следовательно,

$$Q = |z^{\circ}| \int dx \psi_{\text{phys}}^+ \psi_{\text{phys}} + \text{const} \Rightarrow \psi = |z^{\circ}|^{1/2} \psi_{\text{phys}}. \quad (10)$$

Это приводит к перенормировке константы связи g :

$$g_{\text{phys}} = g|z^{\circ}| = \frac{g}{1-g} \Leftrightarrow \frac{1}{g_{\text{phys}}} = \frac{1}{g} - 1. \quad (11)$$

$$-1 < g < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < g_{\text{phys}} < \infty$$

в согласии с бозон-фермионным соответствием.

Вычислим энергию и импульс состояния, содержащего дырки:

$$E[\rho^\circ] - E[0] = m_0 L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} (\rho^\circ(\xi) - \delta\rho(\xi)) \operatorname{ch} \xi,$$

$$P[\rho^\circ] = m_0 L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} (\rho^\circ(\xi) - \delta\rho(\xi)) \operatorname{sh} \xi.$$

Вычислим энергию и импульс состояния, содержащего дырки:

$$E[\rho^\circ] - E[0] = m_0 L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} (\rho^\circ(\xi) - \delta\rho(\xi)) \operatorname{ch} \xi,$$

$$P[\rho^\circ] = m_0 L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} (\rho^\circ(\xi) - \delta\rho(\xi)) \operatorname{sh} \xi.$$

Пусть $g < 0$. В этом случае интегралы сходятся при $\Theta \rightarrow \infty$, но при $\Theta = \infty$ мы имеем $E[\rho^\circ] - E[0] = P[\rho^\circ] = 0$. Значит, m_0 должно **перенормироваться в бесконечность**.

Вычислим энергию и импульс состояния, содержащего дырки:

$$E[\rho^\circ] - E[0] = m_0 L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} (\rho^\circ(\xi) - \delta\rho(\xi)) \operatorname{ch} \xi,$$

$$P[\rho^\circ] = m_0 L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} (\rho^\circ(\xi) - \delta\rho(\xi)) \operatorname{sh} \xi.$$

Пусть $g < 0$. В этом случае интегралы сходятся при $\Theta \rightarrow \infty$, но при $\Theta = \infty$ мы имеем $E[\rho^\circ] - E[0] = P[\rho^\circ] = 0$. Значит, m_0 должно **перенормироваться в бесконечность**.

Пусть $g > 0$. Интегралы расходятся при $\Theta \rightarrow \infty$. Значит, m_0 должно **перенормироваться в ноль**.

Вычислим энергию и импульс состояния, содержащего дырки:

$$E[\rho^\circ] - E[0] = m_0 L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} (\rho^\circ(\xi) - \delta\rho(\xi)) \operatorname{ch} \xi,$$

$$P[\rho^\circ] = m_0 L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} (\rho^\circ(\xi) - \delta\rho(\xi)) \operatorname{sh} \xi.$$

Пусть $g < 0$. В этом случае интегралы сходятся при $\Theta \rightarrow \infty$, но при $\Theta = \infty$ мы имеем $E[\rho^\circ] - E[0] = P[\rho^\circ] = 0$. Значит, m_0 должно **перенормироваться в бесконечность**.

Пусть $g > 0$. Интегралы расходятся при $\Theta \rightarrow \infty$. Значит, m_0 должно **перенормироваться в ноль**.

Полагая Θ большим, но конечным, можно получить

$$E[\rho^\circ] - E[0] = L \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} \epsilon(\xi) \rho^\circ(\xi), \quad P[\rho^\circ] = L \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} p(\xi) \rho^\circ(\xi) \quad (12)$$

где

$$\epsilon(\lambda) = m \operatorname{ch} \frac{\lambda}{1+g}, \quad p(\lambda) = m \operatorname{sh} \frac{\lambda}{1+g}, \quad m = \frac{M}{\pi g} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{1-g}{1+g} \right) \quad (13)$$

и

$$m_0 = M \exp \left(-\frac{g}{1+g} \Theta \right) \sim M \left(\frac{m_0}{\Lambda} \right)^{g/(1+g)}. \quad (14)$$

Итак, частицы имеют релятивистский спектр с массой

$$m \sim m_0 \exp\left(\frac{g}{1+g}\Theta\right)$$

и быстротой

$$\theta = \frac{\xi}{1+g}.$$

Итак, частицы имеют релятивистский спектр с массой

$$m \sim m_0 \exp\left(\frac{g}{1+g}\Theta\right)$$

и быстротой

$$\theta = \frac{\xi}{1+g}.$$

Сравнивая с оценкой

$$m_0 \sim m^{2-\beta^2},$$

где β — константа связи модели синус-Гордона, мы получим=

$$g = 1 - \beta^2.$$

Итак, частицы имеют релятивистский спектр с массой

$$m \sim m_0 \exp\left(\frac{g}{1+g}\Theta\right)$$

и быстротой

$$\theta = \frac{\xi}{1+g}.$$

Сравнивая с оценкой

$$m_0 \sim m^{2-\beta^2},$$

где β — константа связи модели синус-Гордона, мы получим=

$$g = 1 - \beta^2.$$

Для физической константы связи g_{phys} имеем

$$g_{\text{phys}} = \beta^{-2} - 1,$$

в согласии с бозонизацией.

Итак, частицы имеют релятивистский спектр с массой

$$m \sim m_0 \exp\left(\frac{g}{1+g}\Theta\right)$$

и быстротой

$$\theta = \frac{\xi}{1+g}.$$

Сравнивая с оценкой

$$m_0 \sim m^{2-\beta^2},$$

где β — константа связи модели синус-Гордона, мы получим=

$$g = 1 - \beta^2.$$

Для физической константы связи g_{phys} имеем

$$g_{\text{phys}} = \beta^{-2} - 1,$$

в согласии с бозонизацией.

Теперь вычислим матричный элемент S -матрицы для рассеяния двух дырок. Для этого нам придется рассмотреть модельную систему.

Рассмотрим систему «бесспиновых» фермионов с S -матрицей $S(\theta) = e^{i\Psi(\theta)}$, $\Psi(-\theta) = -\Psi(\theta)$. Если частицы находятся далеко друг от друга, мы можем применить анзац Бете и получить уравнения Бете:

$$e^{imL \operatorname{sh} \theta_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N S(\theta_k - \theta_l) = 1, \quad (15)$$

где θ_k — физические быстроты частиц, а m — их физическая масса.

Рассмотрим систему «бесспиновых» фермионов с S -матрицей $S(\theta) = e^{i\Psi(\theta)}$, $\Psi(-\theta) = -\Psi(\theta)$. Если частицы находятся далеко друг от друга, мы можем применить анзац Бете и получить уравнения Бете:

$$e^{imL \operatorname{sh} \theta_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N S(\theta_k - \theta_l) = 1, \quad (15)$$

где θ_k — физические быстроты частиц, а m — их физическая масса. Логарифмируя уравнения, получаем

$$mL \operatorname{sh} \theta_k + \sum_{l=1}^N \Psi(\theta_k - \theta_l) = 2\pi n_k. \quad (16)$$

Рассмотрим систему «бесспиновых» фермионов с S -матрицей $S(\theta) = e^{i\Psi(\theta)}$, $\Psi(-\theta) = -\Psi(\theta)$. Если частицы находятся далеко друг от друга, мы можем применить анзац Бете и получить уравнения Бете:

$$e^{imL \operatorname{sh} \theta_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N S(\theta_k - \theta_l) = 1, \quad (15)$$

где θ_k — физические быстроты частиц, а m — их физическая масса. Логарифмируя уравнения, получаем

$$mL \operatorname{sh} \theta_k + \sum_{l=1}^N \Psi(\theta_k - \theta_l) = 2\pi n_k. \quad (16)$$

Определим $\theta(n)$ равенством

$$mL \operatorname{sh} \theta(n) = \sum_{k=1}^N \Psi(\theta(n) - \theta_k) = 2\pi n. \quad (17)$$

Рассмотрим систему «бесспиновых» фермионов с S -матрицей $S(\theta) = e^{i\Psi(\theta)}$, $\Psi(-\theta) = -\Psi(\theta)$. Если частицы находятся далеко друг от друга, мы можем применить анзац Бете и получить уравнения Бете:

$$e^{imL \operatorname{sh} \theta_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N S(\theta_k - \theta_l) = 1, \quad (15)$$

где θ_k — физические быстроты частиц, а m — их физическая масса. Логарифмируя уравнения, получаем

$$mL \operatorname{sh} \theta_k + \sum_{l=1}^N \Psi(\theta_k - \theta_l) = 2\pi n_k. \quad (16)$$

Определим $\theta(n)$ равенством

$$mL \operatorname{sh} \theta(n) = \sum_{k=1}^N \Psi(\theta(n) - \theta_k) = 2\pi n. \quad (17)$$

Введем плотности

$$\rho_*(\theta(n)) = \frac{2\pi}{L|\theta(n+1) - \theta(n)|} \simeq \frac{2\pi}{L} \left| \frac{dn}{d\theta(n)} \right|, \quad \rho_*^\bullet(\theta_k) = \frac{2\pi}{L|\theta_{k+1} - \theta_k|} = \frac{2\pi}{L} \left| \frac{dk}{d\theta_k} \right|. \quad (18)$$

Совершенно аналогично получим линейное уравнение

$$m \operatorname{ch} \theta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \Psi'(\theta - \theta') \rho_*^\bullet(\theta') = \rho_*(\theta). \quad (19)$$

Совершенно аналогично получим линейное уравнение

$$m \operatorname{ch} \theta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \Psi'(\theta - \theta') \rho_*^\bullet(\theta') = \rho_*(\theta). \quad (19)$$

Если $\rho_*^\bullet(\theta) = 0$, мы немедленно получаем $\rho_{*\text{vac}}(\theta) = m \operatorname{ch} \theta$. Полагая $\delta\rho_* = \rho_* - \rho_{*\text{vac}}$, имеем

$$\delta\rho_*(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \Psi'(\theta - \theta') \rho_*^\bullet(\theta'). \quad (20)$$

Совершенно аналогично получим линейное уравнение

$$m \operatorname{ch} \theta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \Psi'(\theta - \theta') \rho_*^\bullet(\theta') = \rho_*(\theta). \quad (19)$$

Если $\rho_*^\bullet(\theta) = 0$, мы немедленно получаем $\rho_{*\text{vac}}(\theta) = m \operatorname{ch} \theta$. Полагая $\delta\rho_* = \rho_* - \rho_{*\text{vac}}$, имеем

$$\delta\rho_*(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \Psi'(\theta - \theta') \rho_*^\bullet(\theta'). \quad (20)$$

После преобразования Фурье имеем

$$\delta\tilde{\rho}_*(\omega) = \tilde{\Psi}'(\omega) \rho_*^\bullet(\omega). \quad (21)$$

Совершенно аналогично получим линейное уравнение

$$m \operatorname{ch} \theta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \Psi'(\theta - \theta') \rho_*^\bullet(\theta') = \rho_*(\theta). \quad (19)$$

Если $\rho_*^\bullet(\theta) = 0$, мы немедленно получаем $\rho_{*\text{vac}}(\theta) = m \operatorname{ch} \theta$. Полагая $\delta\rho_* = \rho_* - \rho_{*\text{vac}}$, имеем

$$\delta\rho_*(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \Psi'(\theta - \theta') \rho_*^\bullet(\theta'). \quad (20)$$

После преобразования Фурье имеем

$$\delta\tilde{\rho}_*(\omega) = \tilde{\Psi}'(\omega) \rho_*^\bullet(\omega). \quad (21)$$

Теперь отождествим плотности

$$\rho^\circ(\xi) = \frac{d\theta}{d\xi} \rho_*^\bullet(\theta), \quad \delta\rho(\xi) = \frac{d\theta}{d\xi} \delta\rho_*(\theta), \quad \theta = \frac{\xi}{1+g}. \quad (22)$$

Совершенно аналогично получим линейное уравнение

$$m \operatorname{ch} \theta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \Psi'(\theta - \theta') \rho_*^\bullet(\theta') = \rho_*(\theta). \quad (19)$$

Если $\rho_*^\bullet(\theta) = 0$, мы немедленно получаем $\rho_{*\text{vac}}(\theta) = m \operatorname{ch} \theta$. Полагая $\delta\rho_* = \rho_* - \rho_{*\text{vac}}$, имеем

$$\delta\rho_*(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \Psi'(\theta - \theta') \rho_*^\bullet(\theta'). \quad (20)$$

После преобразования Фурье имеем

$$\delta\tilde{\rho}_*(\omega) = \tilde{\Psi}'(\omega) \rho_*^\bullet(\omega). \quad (21)$$

Теперь отождествим плотности

$$\rho^\circ(\xi) = \frac{d\theta}{d\xi} \rho_*^\bullet(\theta), \quad \delta\rho(\xi) = \frac{d\theta}{d\xi} \delta\rho_*(\theta), \quad \theta = \frac{\xi}{1+g}. \quad (22)$$

В фурье-образах

$$\tilde{\rho}^\circ\left(\frac{\omega}{1+g}\right) = \delta\tilde{\rho}_*^\bullet(\omega), \quad \tilde{\rho}\left(\frac{\omega}{1+g}\right) = \delta\tilde{\rho}_*(\omega). \quad (23)$$

Модель Тирринга: S -матрица

Сравнивая это с (6), получаем

$$\begin{aligned}\Psi(\theta) &= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi\omega}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi(p-1)\omega}{2}}{\operatorname{sh} \pi\omega \operatorname{sh} \frac{\pi p\omega}{2}} e^{-i\theta\omega} \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi\omega}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi(p-1)\omega}{2}}{\operatorname{sh} \pi\omega \operatorname{sh} \frac{\pi p\omega}{2}} \sin \theta\omega, \quad \beta^2 = 1 - g = 2 \frac{p}{p+1}. \quad (24)\end{aligned}$$

Это отождествляет функцию $S(\theta) = e^{i\Psi(\theta)}$ с матричным элементом $S_{\text{MT}}(\theta)$ двух антифермионов в модели Тирринга.

Сравнивая это с (6), получаем

$$\begin{aligned}\Psi(\theta) &= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi\omega}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi(p-1)\omega}{2}}{\operatorname{sh} \pi\omega \operatorname{sh} \frac{\pi p\omega}{2}} e^{-i\theta\omega} \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi\omega}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi(p-1)\omega}{2}}{\operatorname{sh} \pi\omega \operatorname{sh} \frac{\pi p\omega}{2}} \sin \theta\omega, \quad \beta^2 = 1 - g = 2 \frac{p}{p+1}.\end{aligned}\quad (24)$$

Это отождествляет функцию $S(\theta) = e^{i\Psi(\theta)}$ с матричным элементом $S_{\text{MT}}(\theta)$ двух антифермионов в модели Тирринга.

Другие матричные элементы можно найти, решая уравнение Янга–Бакстера. В базисе $(++, +-, -+, --)$ матрица рассеяния фермионов и антифермионов имеет вид

$$S_{\text{MT}}(\theta) = \left(S_{\text{MT}}(\theta)_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1\alpha_2} \right) = - \begin{pmatrix} a(\theta) & & & & \\ & b(\theta) & c(\theta) & & \\ & c(\theta) & b(\theta) & & \\ & & & & a(\theta) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где $a(\theta) = -e^{i\Psi(\theta)}$, и

$$\frac{b(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\operatorname{sh} \frac{\theta}{p}}{\operatorname{sh} \frac{i\pi - \theta}{p}}, \quad \frac{c(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\operatorname{sh} \frac{i\pi}{p}}{\operatorname{sh} \frac{i\pi - \theta}{p}}. \quad (26)$$

Сравнивая это с (6), получаем

$$\begin{aligned}\Psi(\theta) &= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\text{sh} \frac{\pi\omega}{2} \text{sh} \frac{\pi(p-1)\omega}{2}}{\text{sh} \pi\omega \text{sh} \frac{\pi p\omega}{2}} e^{-i\theta\omega} \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\text{sh} \frac{\pi\omega}{2} \text{sh} \frac{\pi(p-1)\omega}{2}}{\text{sh} \pi\omega \text{sh} \frac{\pi p\omega}{2}} \sin \theta\omega, \quad \beta^2 = 1 - g = 2 \frac{p}{p+1}.\end{aligned}\quad (24)$$

Это отождествляет функцию $S(\theta) = e^{i\Psi(\theta)}$ с матричным элементом $S_{\text{MT}}(\theta)$ двух антифермионов в модели Тирринга.

Другие матричные элементы можно найти, решая уравнение Янга—Бакстера. В базисе $(++, +-, -+, --)$ матрица рассеяния фермионов и антифермионов имеет вид

$$S_{\text{MT}}(\theta) = \left(S_{\text{MT}}(\theta)_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1\alpha_2} \right) = - \begin{pmatrix} a(\theta) & & & & \\ & b(\theta) & c(\theta) & & \\ & c(\theta) & b(\theta) & & \\ & & & & a(\theta) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где $a(\theta) = -e^{i\Psi(\theta)}$, и

$$\frac{b(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\text{sh} \frac{\theta}{p}}{\text{sh} \frac{i\pi - \theta}{p}}, \quad \frac{c(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\text{sh} \frac{i\pi}{p}}{\text{sh} \frac{i\pi - \theta}{p}}. \quad (26)$$

S -матрица кинков в модели синус-Гордона отличается знаком:

$$S(\theta) \equiv S_{\text{SG}}(\theta) = -S_{\text{MT}}(\theta). \quad (27)$$

При $g < 0$ (or $g_{\text{phys}} < 0$, $\beta^2 < 1$, $p < 1$) элементы $b(\theta)$ и $c(\theta)$ имеют полюсы на физическом листе в точках

$$\theta_n = i\pi - i\pi pn, \quad n = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{1}{p} \right\rfloor, \quad (28)$$

При $g < 0$ (от $g_{\text{phys}} < 0$, $\beta^2 < 1$, $p < 1$) элементы $b(\theta)$ и $c(\theta)$ имеют полюсы на физическом листе в точках

$$\theta_n = i\pi - i\pi pn, \quad n = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{1}{p} \right\rfloor, \quad (28)$$

которые соответствуют связанным состояниям с массами

$$M_n = 2m \sin \frac{\pi pn}{2} \quad (29)$$

В модели синус-Гордона эти связанные состояния соответствуют бризерным возбуждениям, и в классическом пределе $\beta^2 \rightarrow 0$ их спектр становится непрерывным в согласии с классической теорией поля.

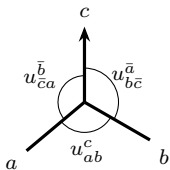
Предположим, что некоторый диагональный элемент S -матрицы имеет полюс в некоторой точке iu_{ab}^c :

$$S(\theta)_{ab}^{ab} = \sum_c \frac{i\Gamma_{ab}^c \Gamma_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}}}{\theta - iu_{ab}^c} + O(1) \quad \text{при } \theta \rightarrow iu_{ab}^c. \quad (30)$$

Предположим, что некоторый диагональный элемент S -матрицы имеет полюс в некоторой точке iu_{ab}^c :

$$S(\theta)_{ab}^{ab} = \sum_c \frac{i\Gamma_{ab}^c \Gamma_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}}}{\theta - iu_{ab}^c} + O(1) \quad \text{при } \theta \rightarrow iu_{ab}^c. \quad (30)$$

Изобразим слияние частиц графически:

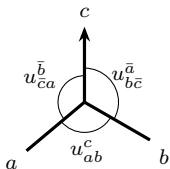


$$\begin{aligned} u_{ab}^c + u_{\bar{c}a}^{\bar{b}} + u_{\bar{b}c}^{\bar{a}} &= 2\pi, \\ 0 < u_{ab}^c, u_{\bar{c}a}^{\bar{b}}, u_{\bar{b}c}^{\bar{a}} < \pi, \end{aligned} \quad \begin{aligned} \bar{u}_{ab}^c &= \pi - u_{ab}^c, \\ \bar{u}_{\bar{c}a}^{\bar{b}} &= \pi - u_{\bar{c}a}^{\bar{b}}, \\ \bar{u}_{\bar{b}c}^{\bar{a}} &= \pi - u_{\bar{b}c}^{\bar{a}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Предположим, что некоторый диагональный элемент S -матрицы имеет полюс в некоторой точке iu_{ab}^c :

$$S(\theta)_{ab}^{ab} = \sum_c \frac{i\Gamma_{ab}^c \Gamma_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}}}{\theta - iu_{ab}^c} + O(1) \quad \text{при } \theta \rightarrow iu_{ab}^c. \quad (30)$$

Изобразим слияние частиц графически:



$$\begin{aligned} u_{ab}^c + u_{ca}^b + u_{bc}^a &= 2\pi, & \bar{u}_{ab}^c &= \pi - u_{ab}^c, \\ 0 < u_{ab}^c, u_{ca}^b, u_{bc}^a < \pi, & \bar{u}_{ca}^b &= \pi - u_{ca}^b, \\ & \bar{u}_{bc}^a &= \pi - u_{bc}^a. \end{aligned} \quad (31)$$

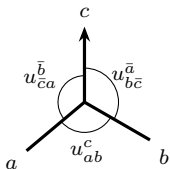
Здесь числа u_{ab}^c и u_{ba}^c определяются кинематическим условием

$$m_c = m_a e^{\pm i\bar{u}_{ca}^b} + m_b e^{\mp iu_{bc}^a}, \quad |m_a - m_b| < m_c < m_a + m_b. \quad (32)$$

Предположим, что некоторый диагональный элемент S -матрицы имеет полюс в некоторой точке iu_{ab}^c :

$$S(\theta)_{ab}^{ab} = \sum_c \frac{i\Gamma_{ab}^c \Gamma_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}}}{\theta - iu_{ab}^c} + O(1) \quad \text{при } \theta \rightarrow iu_{ab}^c. \quad (30)$$

Изобразим слияние частиц графически:



$$\begin{aligned} u_{ab}^c + u_{ca}^{\bar{b}} + u_{bc}^{\bar{a}} &= 2\pi, & \bar{u}_{ab}^c &= \pi - u_{ab}^c, \\ 0 < u_{ab}^c, u_{ca}^{\bar{b}}, u_{bc}^{\bar{a}} < \pi, & \bar{u}_{ca}^{\bar{b}} &= \pi - u_{ca}^{\bar{b}}, \\ & \bar{u}_{bc}^{\bar{a}} &= \pi - u_{bc}^{\bar{a}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь числа u_{ab}^c и u_{ba}^c определяются кинематическим условием

$$m_c = m_a e^{\pm i\bar{u}_{ca}^{\bar{b}}} + m_b e^{\mp iu_{bc}^{\bar{a}}}, \quad |m_a - m_b| < m_c < m_a + m_b. \quad (32)$$

Более явно

$$\cos u_{ab}^c = \frac{m_c^2 - m_a^2 - m_b^2}{2m_a m_b}, \quad \frac{\sin u_{ca}^{\bar{b}}}{\sin u_{bc}^{\bar{a}}} = \frac{m_b}{m_a}. \quad (33)$$

Очевидно, все формулы симметричны по отношению к перестановкам индексов a, b, c .

Связанные состояния: уравнение на S -матрицы

Изобразим условие на вычет S -матрицы графически

$$-i \operatorname{res}_{\theta=u_{ab}^c} S(\theta)_{ab}^{ab} = \text{Diagram} \quad (34)$$

The diagram on the right side of the equation (34) consists of a central vertical line labeled 'c' with an upward-pointing arrow. From the top of this line, two lines branch out: one labeled 'b' pointing up and to the left, and one labeled 'a' pointing up and to the right. From the bottom of the central line, two lines branch out: one labeled 'a' pointing down and to the left, and one labeled 'b' pointing down and to the right. The top vertex where the 'c' line meets the 'a' and 'b' lines is labeled $\Gamma_{\bar{a}\bar{b}}^c$. The bottom vertex where the 'c' line meets the 'a' and 'b' lines is labeled Γ_{ab}^c .

Связанные состояния: уравнение на S -матрицы

Изобразим условие на вычет S -матрицы графически

$$-i \operatorname{res}_{\theta=u_{ab}^c} S(\theta)_{ab}^{ab} = \text{Diagram} \quad (34)$$

Теперь возьмем нижнюю половину диаграммы и пересечем ее с линией некоторой четвертой частицы d :

$$\text{Diagram} = \text{Diagram} \quad (35)$$

Связанные состояния: уравнение на S -матрицы

Изобразим условие на вычет S -матрицы графически

$$-i \operatorname{res}_{\theta=u_{ab}^c} S(\theta)_{ab}^{ab} = \text{diagram} \quad (34)$$

Теперь возьмем нижнюю половину диаграммы и пересечем ее с линией некоторой четвертой частицы d :

$$\text{diagram} = \text{diagram} \quad (35)$$

Явно имеем уравнение на S -матрицу рассеяния частиц c и d :

$$\sum_{a', b', d''} \Gamma_{a'b'}^{c'} S(\theta + i\bar{u}_{b\bar{c}}^a)_{a' d''}^{a' d''} S(\theta - i\bar{u}_{ca}^b)_{b' d}^{b' d''} = \sum_c \Gamma_{ab}^c S(\theta)_{c d}^{c' d'} \quad (36)$$

Связанные состояния: уравнение на S -матрицы

Изобразим условие на вычет S -матрицы графически

$$-i \operatorname{res}_{\theta=u_{ab}^c} S(\theta)_{ab}^{ab} = \text{Diagram} \quad (34)$$

Теперь возьмем нижнюю половину диаграммы и пересечем ее с линией некоторой четвертой частицы d :

$$\text{Diagram} = \text{Diagram} \quad (35)$$

Явно имеем уравнение на S -матрицу рассеяния частиц c и d :

$$\sum_{a', b', d''} \Gamma_{a'b'}^{c'} S(\theta + i\bar{u}_{bc}^a)_{a' d''}^{a' d''} S(\theta - i\bar{u}_{ca}^b)_{b' d}^{b' d} = \sum_c \Gamma_{ab}^c S(\theta)_{cd}^{c' d'} \quad (36)$$

Можно подобрать базис так, чтобы в правой части уравнения было только одно слагаемое. Тогда уравнение дает прямой вид S -матрицы.

Уравнение имеет особенно простой вид, когда в него входят только диагональные матричные элементы S -матрицы:

$$S_{cd}(\theta) \equiv S(\theta)_{cd}^{cd} = S(\theta + i\bar{u}_{b\bar{c}}^{\bar{a}})_{ad}^{ad} S(\theta - i\bar{u}_{\bar{c}a}^{\bar{b}})_{bd}^{bd}. \quad (37)$$

Уравнение имеет особенно простой вид, когда в него входят только диагональные матричные элементы S -матрицы:

$$S_{cd}(\theta) \equiv S(\theta)_{cd}^{cd} = S(\theta + i\bar{u}_{b\bar{c}}^{\bar{a}})_{ad}^{ad} S(\theta - i\bar{u}_{\bar{c}a}^{\bar{b}})_{bd}^{bd}. \quad (37)$$

Применим это уравнение к случаю, когда $d = \pm$ — кинк или антикинк, а $c = n$ — бризер. Получаем

$$S_{\pm n}(\theta) = \prod_{k=1}^n S_{+1}\left(\theta + \frac{i\pi p(n+1-2k)}{2}\right), \quad S_{+1}(\theta) = \frac{\text{th}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{i\pi(1-p)}{4}\right)}{\text{th}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{i\pi(1-p)}{4}\right)}. \quad (38)$$

Уравнение имеет особенно простой вид, когда в него входят только диагональные матричные элементы S -матрицы:

$$S_{cd}(\theta) \equiv S(\theta)_{cd}^{cd} = S(\theta + i\bar{u}_{b\bar{c}}^{\bar{a}})_{ad}^{ad} S(\theta - i\bar{u}_{\bar{c}a}^{\bar{b}})_{bd}^{bd}. \quad (37)$$

Применим это уравнение к случаю, когда $d = \pm$ — кинк или антикинк, а $c = n$ — бризер. Получаем

$$S_{\pm n}(\theta) = \prod_{k=1}^n S_{\pm 1} \left(\theta + \frac{i\pi p(n+1-2k)}{2} \right), \quad S_{\pm 1}(\theta) = \frac{\text{th} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{i\pi(1-p)}{4} \right)}{\text{th} \left(\frac{\theta}{2} - \frac{i\pi(1-p)}{4} \right)}. \quad (38)$$

Применяя теперь к рассеянию двух бризеров, получаем

$$S_{nn'}(\theta) = \prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^{n'} S_{11} \left(\theta + \frac{i\pi p(n-n'-2k+2l)}{2} \right), \quad S_{11}(\theta) = \frac{\text{th} \frac{\theta+i\pi p}{2}}{\text{th} \frac{\theta-i\pi p}{2}}. \quad (39)$$

Уравнение имеет особенно простой вид, когда в него входят только диагональные матричные элементы S -матрицы:

$$S_{cd}(\theta) \equiv S(\theta)_{cd}^{cd} = S(\theta + i\bar{u}_{b\bar{c}}^{\bar{a}})_{ad}^{ad} S(\theta - i\bar{u}_{c\bar{a}}^{\bar{b}})_{bd}^{bd}. \quad (37)$$

Применим это уравнение к случаю, когда $d = \pm$ — кинк или антикинк, а $c = n$ — бризер. Получаем

$$S_{\pm n}(\theta) = \prod_{k=1}^n S_{\pm 1} \left(\theta + \frac{i\pi p(n+1-2k)}{2} \right), \quad S_{\pm 1}(\theta) = \frac{\text{th} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{i\pi(1-p)}{4} \right)}{\text{th} \left(\frac{\theta}{2} - \frac{i\pi(1-p)}{4} \right)}. \quad (38)$$

Применяя теперь к рассеянию двух бризеров, получаем

$$S_{nn'}(\theta) = \prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^{n'} S_{11} \left(\theta + \frac{i\pi p(n-n'-2k+2l)}{2} \right), \quad S_{11}(\theta) = \frac{\text{th} \frac{\theta+i\pi p}{2}}{\text{th} \frac{\theta-i\pi p}{2}}. \quad (39)$$

Структура ответов связана с тем, что у двух бризеров n и n' имеются связанные состояния n'' , такие что

$$|n - n'| \leq n'' \leq n + n', \quad n + n' - n'' \in 2\mathbb{Z}.$$