

Лекция 4

$O(N)$ -модель: $1/N$ -разложение

Снова рассмотрим общую $O(N)$ -модель в пространстве Минковского:

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (4.1)$$

В этой лекции мы обсудим предел больших N и специфическую теорию возмущений, с ним связанную [8] (см. также [9, 10]).

Удобно ввести вспомогательное поле $\omega(x)$ и написать действие в виде

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1)), \quad (4.2)$$

где вектор \mathbf{n} теперь пробегает любые значения в \mathbb{R}^N . Рассмотрим функциональный интеграл

$$Z[J] = \int D\omega D\mathbf{n} e^{iS[\mathbf{n}, \omega] + ig^{-1/2} \int d^2x \mathbf{J}\mathbf{n}}. \quad (4.3)$$

Интеграл по \mathbf{n} — гауссов. Возьмем его. Заметим, что

$$iS[\mathbf{n}, \omega] + ig^{-1/2} \int d^2x \mathbf{J}\mathbf{n} = -\frac{1}{2} \left(\frac{n_i}{g^{1/2}}, K(\omega) \delta_{ij} \frac{n_j}{g^{1/2}} \right) + \left(iJ_i, \frac{n_i}{g^{1/2}} \right) + i \int d^2x \frac{\omega}{2g},$$

где

$$K(\omega) = i(\partial_\mu^2 + \omega).$$

Отсюда получаем

$$Z[J] = \int D\omega (\det(\partial_\mu^2 + \omega))^{-N/2} \exp \left(i \int d^2x \frac{\omega}{2g} - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x' | \omega) J_i(x') \right),$$

где $G(x, x' | \omega)$ — решение уравнения

$$i(\partial_\mu^2 + \omega(x))G(x, x' | \omega) = \delta(x - x'). \quad (4.4)$$

По-другому производящий функционал можно переписать в виде

$$Z[J] = \int D\omega \exp \left(iS_{\text{eff}}[\omega] - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x' | \omega) J_i(x') \right), \quad (4.5)$$

$$S_{\text{eff}}[\omega] = i \frac{N}{2} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega) + \int d^2x \frac{\omega}{2g}. \quad (4.6)$$

Найдем точку перевала этого интеграла при $N \rightarrow \infty$. Предположим, что точке перевала отвечает постоянное решение:

$$\omega(x) = \text{const} = \omega_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega_0) &= V \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 - k^2 - i0) \\ &= iV \int_E \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 + k^2) \\ \frac{iV}{2\pi} \int_0^\Lambda dk k \log(\omega_0 + k^2) &= \frac{iV}{4\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Lambda^2} du \log u = \frac{iV}{4\pi} \left[u \log \frac{u}{e} \right]_{\omega_0}^{\omega_0 + \Lambda^2} \\ &= \frac{iV}{4\pi} \left((\omega_0 + \Lambda^2) \log \frac{\omega_0 + \Lambda^2}{e} - \omega_0 \log \frac{\omega_0}{e} \right) = \frac{iV}{4\pi} \left(\omega_0 \log \frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \Lambda^2 \log \frac{\omega_0 + \Lambda^2}{e} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

где Λ — параметр ультрафиолетового обрезания. Под знаком логарифма мы пренебрегли ω_0 в выражении $\Lambda^2 + \omega_0$ в первом слагаемом. Находим

$$0 = \frac{dS[\omega_0]}{d\omega_0} = V \left(-\frac{N}{8\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \frac{1}{2g} \right).$$

Отсюда получаем

$$\omega_0 = m^2 = \Lambda^2 \exp \left(-\frac{4\pi}{Ng} \right). \quad (4.8)$$

Мы видим, что в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ следует устремить к нулю g таким образом, чтобы величина $\omega_0 = m^2$ оставалась конечной. Для бета-функции при больших N находим

$$\frac{dg}{d \log \Lambda} = \beta(g) = -\frac{N}{2\pi} g^2. \quad (4.9)$$

Важно, что в теории возникает параметр m размерности массы. Мы сейчас увидим, что это действительно масса. В теории имеет место *динамическая генерация массы*. Ни на каких масштабах корреляционные функции не будут спадать степенным образом, и наличие размерного параметра будет заметно в корреляционных функциях на любых масштабах.

Давайте теперь разовьем теорию возмущений по параметру $1/N$. Представим $\omega(x)$ в виде

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x). \quad (4.10)$$

и разложим эффективное действие по степеням $N^{-1/2} \rho(x)$:

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\omega] &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log \left(1 + (2/N)^{1/2} \rho (\partial_\mu^2 + m^2)^{-1} \right) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log (1 + i(2/N)^{1/2} \rho G_0) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + \left(\frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho - \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \text{tr} \rho G_0 \right) - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \text{tr} (\rho G_0)^n. \end{aligned}$$

Здесь $G_0 = -i(\partial_\mu^2 + m^2)^{-1}$ — оператор с ядром $G_0(x, x') = G(x, x' | m^2)$.

Скобка в последнем выражении равна нулю по предположению, что $\omega = m^2$ является минимумом. Давайте проверим это предположение. Имеем

$$\begin{aligned} \text{tr} \rho &= \int d^2x \rho(x), \\ \text{tr} \rho G_0 &= \int d^2x \rho(x) G_0(x, x) = G_0(0, 0) \int d^2x \rho(x) = G_0(0, 0) \text{tr} \rho \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{i}{k^2 - m^2 + i0} \text{tr} \rho = \frac{1}{4\pi} \log \frac{\Lambda^2}{m^2} \text{tr} \rho = (gN)^{-1} \text{tr} \rho. \end{aligned}$$

Мы видим, что скобка в самом деле обращается в ноль. Исследуя следующий вклад ($n = 2$), можно убедиться, что точка $\omega = m^2$ является локальным минимумом. Пока нет способа доказать строго, что этот минимум является абсолютным.

Окончательно имеем

$$S_{\text{eff}}[\omega] = \text{const} - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \int d^{2n}x \rho(x_1) G_0(x_1, x_2) \dots \rho(x_n) G_0(x_n, x_1). \quad (4.11)$$

Разложение начинается с квадратичного члена вида

$$\frac{i}{2} \int d^2x_1 d^2x_2 \rho(x_1) G_0(x_1, x_2) \rho(x_2) G_0(x_2, x_1).$$

Поэтому пропагатор $D(x_1, x_2)$ поля $\rho(x)$ есть ядро оператора, обратного к оператору с ядром

$$D^{-1}(x_1, x_2) = G_0(x_1, x_2)G_0(x_2, x_1).$$

Теперь ясно, для чего понадобился множитель $(2/N)^{1/2}$ перед ρ . Он позволил избавиться от коэффициента $2/N$ в пропагаторе $D(x_1, x_2)$.

Переходя к импульсному представлению, получим

$$D(k) = \text{-----} \overset{k}{\text{-----}} = L^{-1}(k^2) = - \left(\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i0)((q+k)^2 - m^2 + i0)} \right)^{-1}. \quad (4.12)$$

Мы уже вычисляли эту величину на прошлой лекции:

$$D(k) = 4\pi i m^2 \frac{\text{sh } \theta}{\theta}, \quad k^2 = -4m^2 \text{sh}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (4.13)$$

Кроме того, оператор $G(x, x'|\omega)$, входящий в (4.5), тоже следует разложить по $\rho(x)$:

$$G[\omega] = \frac{1}{G_0^{-1} + i(2/N)^{1/2}\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left(\frac{2}{N}\right)^{n/2} G_0(\rho G_0)^n$$

$$G(x_1, x_2|\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left(\frac{2}{N}\right)^{n/2} \int d^{2n}y G_0(x_1, y_1)\rho(y_1)G_0(y_1, y_2) \dots \rho(y_n)G_0(y_n, x_2).$$

Изобразим $G_0(x_1, x_2)$ сплошной линией:

$$G_0(p)_{ij} = \text{---} \overset{p}{\text{---}} \text{---} j = G_0(p)\delta_{ij} = \frac{i\delta_{ij}}{p^2 - m^2 + i0}. \quad (4.14)$$

Если еще ввести вершину

$$\text{---} \overset{\vdots}{\text{---}} j = -i \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} \delta_{ij}, \quad (4.15)$$

можно сформулировать следующие правила диаграммной техники:

1. Диаграмма состоит из пунктирных линий (4.12), сплошных линий (4.14) и вершин (4.15).
2. Внешними линиями диаграммы могут быть только сплошные линии, отвечающие массивным частицам $\varphi_i = g^{-1/2}n_i$.
3. Замкнутые петли сплошных линий должны содержать не менее трех вершин.

Мы видим, что в такой формулировке диаграммная техника вообще не содержит константы связи g . Порядок диаграммы по $1/N$ равен $\frac{1}{2}V - L$, где V — число вершин, а L — число петель из сплошных линий. Из правила 3 следует, что порядок диаграммы всегда положителен.

Связь между константой связи g , массой m и параметром обрезания Λ можно уточнять с помощью соотношения

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \varphi_i^2(x) \right\rangle = \frac{1}{g}.$$

Например в порядке $1/N$ можно получить:

$$m^2 = \Lambda^2 \exp\left(-\frac{4\pi}{(N-2)g'}\right), \quad \frac{1}{g'} = \frac{1}{g} + \frac{\Lambda^2}{4\pi m^2 \log(\Lambda^2/m^2)}. \quad (4.16)$$

Добавка к обратной константе связи представляет собой вклад специфической для сигма-модели квадратичной расходимости. Расходимость становится логарифмической, если мы добавляем в действие (4.2) член вида $\int d^2x \omega^2$, «размывающий» дельта-функцию в функциональном интеграле.

Давайте теперь попробуем вычислить S -матрицу $O(N)$ -модели. Условие совместимости с $O(N)$ -симметрией дает

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta) = \delta_{i'j'}\delta_{ij}S_1(\theta) + \delta_{i'i}\delta_{j'j}S_2(\theta) + \delta_{j'i}\delta_{i'j}S_3(\theta). \quad (4.17)$$

В порядке $1/N$ матричные элементы даются следующими диаграммами:

$$4m^2 \operatorname{sh} \theta S_1(\theta) = \begin{array}{c} p_1 \\ \diagdown \\ \\ \diagup \\ p_2 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} p_1 \\ \diagup \\ \\ \diagdown \\ p_2 \end{array},$$

$$4m^2 \operatorname{sh} \theta (S_2(\theta) - 1) = \begin{array}{c} p_1 \text{---} p_1 \\ | \\ p_2 \text{---} p_2 \end{array},$$

$$4m^2 \operatorname{sh} \theta S_3(\theta) = \begin{array}{c} p_1 \text{---} p_2 \\ | \\ p_2 \text{---} p_1 \end{array}.$$

Используя (4.13), получаем

$$\begin{aligned} S_1(\theta) &= -\frac{2\pi i}{N(i\pi - \theta)}, \\ S_2(\theta) &= 1 - \frac{2\pi i}{N \operatorname{sh} \theta}, \\ S_3(\theta) &= -\frac{2\pi i}{N\theta}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Задачи

1. Модель Гросса—Невё для N -компонентного майорановского (т. е. вещественного в представлении с чисто мнимыми γ -матрицами) ферми-поля определяется действием

$$S[\psi] = \int d^2x \left(\frac{i}{2} \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i + \frac{g}{8} (\bar{\psi}_i \psi_i)^2 \right)$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до N ; в представлении с чисто мнимыми гамма-матрицами $\bar{\psi} = \psi^T \gamma^0$).

Покажите, что эта модель эквивалентна модели со вспомогательным бозонным полем

$$S[\psi, \omega] = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - \omega(x)) \psi_i - \frac{\omega^2(x)}{2g} \right).$$

Покажите, что в модели имеет место динамическая генерация массы

$$\omega_0 = m = \Lambda \exp \left(-\frac{2\pi}{Ng} \right).$$

2. Постройте диаграммную технику для $1/N$ -разложения в модели Гросса—Невё. Найдите S -матрицу в древесном приближении.

3. Найдите расходящуюся часть массового оператора в порядке $1/N$ для $O(N)$ -модели. Покажите, что постоянный вклад квадратично расходится по Λ , а вклад, пропорциональный $p^2 - m^2$ имеет дважды логарифмическую расходимость.

4. Рассмотрите модель с ослабленным условием на \mathbf{n}^2 :

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x \left((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \frac{2\mu^2}{g} (\mathbf{n}^2 - 1)^2 \right), \quad (4.19)$$

где μ — постоянная размерности массы. Покажите, что в пределе $\mu \rightarrow \infty$ модель переходит в сигма-модель (4.1). Найдите массу возбудений в модели (4.19) в главном порядке. Покажите, что S -матрица в древесном приближении также совпадает с матрицей рассеяния сигма-модели (4.18).

5*. Выведите формулу (4.16).

Семинар 4

Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля

Возьмем возмущенную конформную теорию с действием (2.40). В исходной конформной теории поля мы имеем операторные разложения для тензора энергии-импульса и примарных операторов. Продолжим их на регулярные члены:

$$T(z')T(z) = \frac{c/2}{(z' - z)^4} + \frac{2T(z)}{(z' - z)^2} + \frac{\partial T(z)}{z' - z} + \times T^2(z) \times + O(z' - z), \quad (4.20)$$

$$T(z')\Phi_\Delta(z, \bar{z}) = \frac{\Delta\Phi_\Delta(z, \bar{z})}{(z' - z)^2} + \frac{\partial\Phi_\Delta(z)}{z' - z} + \mathcal{L}_{-2}\Phi_\Delta(z, \bar{z}) + (z' - z)\mathcal{L}_{-3}\Phi_\Delta(z, \bar{z}) + \dots \quad (4.21)$$

Операторы \mathcal{L}_k представляют собой образующие алгебры Вирасоро, действующий на пространстве локальных операторов:

$$\mathcal{L}_k \mathcal{O}(z, \bar{z}) = \oint \frac{dw}{2\pi i} (w - z)^{n+1} T(w) \mathcal{O}(z, \bar{z}),$$

где интеграл берется по маленькой окружности вокруг точки z . Не будем забывать также, что $\mathcal{L}_{-1} = \partial$ при действии на любой локальный оператор.

Выражение (4.20) определяет новый оператор $\times T^2(z) \times$, который мы будем понимать как регуляризованный квадрат компоненты тензора энергии-импульса. В конформной теории он представляет собой сохраняющийся ток: $\bar{\partial} \times T^2(z) \times = 0$. Более того, соответствующий интеграл движения коммутирует с операторами энергии и импульса. Попробуем найти условие, при котором этот оператор является компонентой сохраняющегося тока в возмущенной теории [7]. Для этого возьмем интеграл

$$\int d^2 x' \bar{\partial} \times T^2(z) \times \Phi_\Delta(z', \bar{z}') = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int d^2 x' \partial_{\bar{z}} \left(T(z + \delta)T(z) - \frac{c/2}{\delta^4} - \frac{2T(z)}{\delta^2} - \frac{\partial T(z)}{\delta} \right) \Phi_\Delta(z', \bar{z}')$$

Будем понимать под $T(z + \delta)$ оператор $T(z + \delta, \bar{z})$. Корректность такого определения можно обосновать переходом к пространству Минковского и обратно. Нам это будет важно, чтобы избавиться от необходимости разложений по $\bar{\delta}$. Пользуясь (2.42), находим

$$\begin{aligned} & \int d^2 x' \bar{\partial} \times T^2(z) \times \Phi_\Delta(z', \bar{z}') \\ &= \pi(1 - \Delta) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\partial\Phi_\Delta(z + \delta, \bar{z})T(z) + T(z + \delta)\partial\Phi_\Delta(z, \bar{z}) - \frac{2\partial\Phi_\Delta(z, \bar{z})}{\delta^2} - \frac{\partial^2\Phi_\Delta(z, \bar{z})}{\delta} \right) \\ &= \pi(1 - \Delta) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\partial(\Phi_\Delta(z + \delta, \bar{z})T(z)) + \partial(T(z + \delta)\Phi_\Delta(z, \bar{z})) \right. \\ & \quad \left. - \Phi_\Delta(z + \delta, \bar{z})\partial T(z) - \partial T(z + \delta)\Phi_\Delta(z, \bar{z}) - \frac{2\partial\Phi_\Delta(z, \bar{z})}{\delta^2} - \frac{\partial^2\Phi_\Delta(z, \bar{z})}{\delta} \right) \end{aligned}$$

Далее, нужно применить (4.21) к оставшимся произведениям и разложить слагаемые по степеням δ . Результат оказывается регулярным и равным

$$\int d^2 x' \bar{\partial} \times T^2(z) \times \Phi_\Delta(z', \bar{z}') = \pi(1 - \Delta) \left(-2\mathcal{L}_{-3} + 2\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2} + \frac{\Delta - 3}{6}\mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi_\Delta(z, \bar{z}). \quad (4.22)$$

Второе и третье слагаемое в правой части имеют вид полной производной по z . Но первое слагаемое не имеет нужного вида. Поэтому для произвольного возмущения оператор $\times T^2(z) \times$ не является компонентой сохраняющегося тока.

В каких случаях первое слагаемое могло бы стать полной производной? Это может быть в случае, когда имеется линейное соотношение между $\mathcal{L}_{-3}\Phi_\Delta$ и $\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2}\Phi_\Delta$, $\mathcal{L}_{-1}^3\Phi_\Delta$, то есть при наличии нуль-вектора на уровне три. Это имеет место при специальных значениях Δ :

$$\left(\mathcal{L}_{-3} + \frac{2}{\Delta + 2}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2} + \frac{1}{(\Delta + 1)(\Delta + 2)}\mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi_\Delta = 0, \quad \Delta = \Delta_{13}, \Delta_{31}.$$

В случае $c < 1$ конформная размерность Δ_{31} больше единицы и возмущение оператором Φ_{31} irrelevantно. Единственным релевантным возмущением остается возмущение оператором $\Phi_{13} = \Phi_{\Delta_{13}}$. Отметим, что для разбиения действия модели синус-Гордона (3.35) оператор возмущения $e^{i\beta\phi}$ как раз имеет размерность $\Delta_{13} = \beta^2 - 1$. Таким образом, эта конструкция дает высший интеграл движения для модели синус-Гордона.