

## Лекция 12

### Термодинамический анзац Бете: результаты

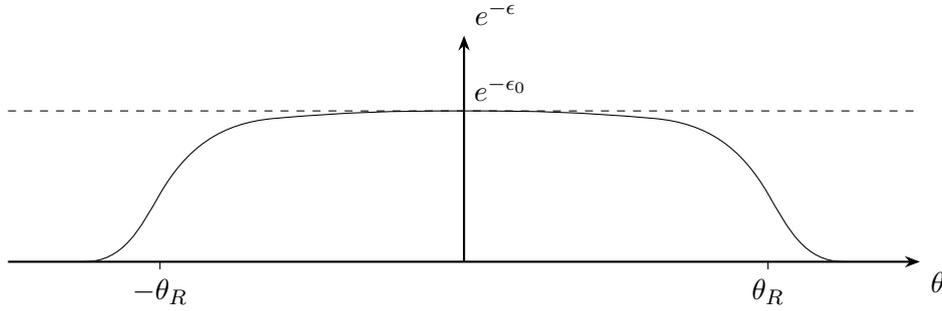
Вернемся к случаю одной частицы и рассмотрим предел высоких температур. Легко заметить, что уравнение (11.25) имеет постоянное решение  $\epsilon(\theta) = \epsilon_0$  при  $R = 0$ :

$$\frac{\epsilon_0}{\log(1 - \sigma e^{-\epsilon_0})} = \sigma \nu, \quad \nu = \int \frac{d\theta}{2\pi} \phi'(\theta) = \frac{\phi(+\infty) - \phi(-\infty)}{2\pi}. \quad (12.1)$$

Рассмотрим теперь малые, но конечные значения  $R$ . В этом случае имеется значение  $\theta_R \gg 1$  при котором правая часть (11.25) равна единице:

$$\theta_R \simeq \log \frac{2}{mR}. \quad (12.2)$$

Если  $e^{|\theta|} \ll e^{\theta_R}$ , правой частью можно пренебречь и  $\epsilon(\theta) = \epsilon_0$ . Если же, наоборот,  $e^{|\theta|} \gg e^{\theta_R}$ , правая часть велика, так что  $\epsilon(\theta) \simeq mR \operatorname{ch} \theta$  и  $e^{-\epsilon(\theta)} \rightarrow 0$ . Нетривиальным оно становится вблизи двух точек  $\theta_R$  и  $-\theta_R$ , где имеет форму «кинка» для  $e^{-\epsilon}$ :



Но при больших  $\theta_R$  решения вблизи этих двух точек не зависят друг от друга и от  $R$ . Так как  $\epsilon(-\theta) = \epsilon(\theta)$ , рассмотрим решение вблизи  $\theta_R$ . Полагая  $\tilde{\epsilon}(\theta) = \epsilon(\theta_R + \theta)$ , мы получаем для  $\tilde{\epsilon}(\theta)$  приближенное уравнение

$$\tilde{\epsilon}(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}) = e^\theta. \quad (12.3)$$

В формуле (11.27) для скейлинговой функции  $f(r)$  ( $r = mR$ ) в силу четности функции  $\epsilon(\theta)$  можно  $\operatorname{ch} \theta$  заменить на  $e^\theta$ . Тогда вклад левого кинка будет подавлен, и в пределе  $r \rightarrow 0$  скейлинговая функция выражается через правое кинковое решение:

$$f(r) = \sigma r \int \frac{d\theta}{2\pi} e^\theta \log(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)}) = \sigma r e^{\theta_R} \int \frac{d\theta}{2\pi} e^\theta \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)}) = 2\sigma \int \frac{d\theta}{2\pi} e^\theta \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)}). \quad (12.4)$$

В приближении (12.3) ответ не зависит от  $r$ , поэтому формула (12.4) даст  $f(0)$ . Вычислим эту величину.

Продифференцируем уравнение (12.3) по  $\theta$ :

$$e^\theta = \tilde{\epsilon}'(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi''(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}).$$

Подставляя это в правую часть (12.4), мы получаем два слагаемых

$$f_1(0) = -2 \int \frac{d\theta}{2\pi} \tilde{\epsilon}'(\theta) \tilde{l}(\theta) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{\epsilon_0}^{\infty} d\epsilon \log(1 - \sigma e^{-\epsilon}), \quad \text{где } \tilde{l}(\theta) = -\sigma \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)}),$$

и

$$f_2(0) = -2 \int \frac{d\theta}{2\pi} \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi''(\theta - \theta') \tilde{l}(\theta) \tilde{l}(\theta').$$

Слагаемое  $f_1(0)$  не зависит от вида функции  $\tilde{\epsilon}(\theta)$  и сводится к интегралу от элементарных функций. Слагаемое  $f_2(0)$  в силу нечетности и быстрого убывания  $\phi''(\theta)$  обратилось бы в нуль, если бы интегралы коммутировали. Но эти интегралы не коммутируют, потому что  $\tilde{l}(\theta)$  стремится к конечному значению

$$l_0 = -\sigma \log(1 - \sigma e^{-\epsilon_0}) = -\nu^{-1} \epsilon_0$$

при  $\theta \rightarrow -\infty$ . Сначала перепишем интеграл в виде

$$f_2(0) = -2 \int \frac{d\theta}{2\pi} \tilde{l}(\theta) \frac{d}{d\theta} \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \tilde{l}(\theta')$$

Интеграл по  $\theta'$  можно взять по частям, поскольку  $\phi'(\theta)$  быстро убывает при  $\theta \rightarrow \pm\infty$ . Получаем

$$f_2(0) = -2 \int \frac{d\theta}{2\pi} \tilde{l}(\theta) \frac{d}{d\theta} \int \frac{d\theta'}{2\pi} (\phi(\theta - \theta') + \pi\nu) \tilde{l}'(\theta')$$

Постоянное слагаемое  $\pi\nu$  (пропадающее при дифференцировании по  $\theta$ ) добавлено к  $\phi$  для того, чтобы интеграл стремился к нулю при  $\theta \rightarrow -\infty$ . При этом интеграл по  $\theta'$  сходится, поскольку  $\tilde{l}'(\theta)$  стремится к нулю достаточно быстро при  $\theta \rightarrow \pm\infty$ . После этого можно взять по частям интеграл по  $\theta$ :

$$f_2(0) = \pi\nu \int \frac{d\theta d\theta'}{2\pi^2} \tilde{l}'(\theta) \tilde{l}'(\theta') + \int \frac{d\theta d\theta'}{2\pi^2} \tilde{l}'(\theta) \phi(\theta - \theta') \tilde{l}'(\theta').$$

В каждом из этих слагаемых интегралы коммутируют в силу быстрого убывания  $\tilde{l}'(\theta)$ . Второе слагаемое равно нулю в силу нечетности функции  $\phi$ , а интеграл в первом слагаемом элементарно берется:

$$f_2(0) = \frac{\nu \tilde{l}_0^2}{2\pi} = -\frac{\epsilon_0 \tilde{l}_0}{2\pi}.$$

Окончательно получаем

$$f(0) = \frac{\sigma}{\pi} \left( \frac{\epsilon_0}{2} \log(1 - \sigma e^{-\epsilon_0}) + \int_{\epsilon_0}^{\infty} d\epsilon \log(1 - \sigma e^{-\epsilon}) \right). \quad (12.5)$$

Эту функцию принято записывать через так называемый *дилогарифм Роджерса*:

$$\begin{aligned} L(z) &= -\frac{1}{2} \int_0^z du \left( \frac{\log(1-u)}{u} + \frac{\log u}{1-u} \right) = \frac{\log z \log(1-z)}{2} - \int_0^z \frac{du}{u} \log(1-u) \quad (0 \leq z \leq 1), \\ L(-z) &= -L\left(\frac{z}{z+1}\right), \quad L(1/z) = 2L(1) - L(z). \end{aligned} \quad (12.6)$$

Дилогарифм Роджерса не является продолжением комплексно-аналитической функции на вещественную ось, но является монотонной непрерывной функцией, вещественно-аналитической всюду, кроме точек 0 и 1.

Имеем

$$c_{\text{eff}} = -\frac{6}{\pi} f(0) = \frac{6\sigma}{\pi^2} L(\sigma e^{-\epsilon_0}). \quad (12.7)$$

Надо сказать, что дилогарифм Роджерса встречается во множестве задач, связанных с термодинамическим анзацем Бете, и потому хорошо изучен. Найдено множество его специальных значений. Нам будут важны следующие равенства:

$$L(0) = 0, \quad L(1) = \frac{\pi^2}{6} = L(z) + L(1-z), \quad L\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{15}. \quad (12.8)$$

Рассмотрим несколько примеров. Начнем с тривиальных. Для свободной частицы  $S(\theta) = 1$ ,  $\nu = 0$  и  $\epsilon_0 = 0$ . Поэтому имеем

$$c^{FB} = c_{\text{eff}}^{FB} = \frac{6}{\pi^2} L(1) = 1$$

в бозонном случае и

$$c^{FF} = c_{\text{eff}}^{FF} = -\frac{6}{\pi^2} L(-1) = \frac{6}{\pi^2} L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

в фермионном случае (модель Изинга в нулевом магнитном поле).

Теперь перейдем к нетривиальным случаям. Рассмотрим матрицу рассеяния бризера в модели синус-Гордона:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\text{th} \frac{1}{2}(\theta + i\pi p)}{\text{th} \frac{1}{2}(\theta - i\pi p)}. \quad (12.9)$$

Начнем со случая  $-1 < p < 0$ , который соответствует модели sh-Гордона. Это «фермионная»  $S$ -матрица для бозонов:  $S(0) = -1$ . В этой модели имеется всего одна частица, так что можно прямо применять полученные формулы. В этом случае  $\nu = 1$  и уравнение (12.1) не имеет решения. С помощью предельного перехода

$$\epsilon_0 + \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \equiv \log(e^{\epsilon_0} + 1) = \delta \rightarrow +0$$

мы находим  $e^{\epsilon_0} = +0$ . Отсюда имеем

$$c_{\text{eff}}^{ShG} = -\frac{6}{\pi^2} L(-\infty) = \frac{6}{\pi^2} L(1) = 1.$$

Итак, модель sh-Гордона на малых масштабах ведет себя как модель свободного безмассового бозона.

Теперь рассмотрим матрицу (12.9) при  $0 < p < 1$ . В отличие от предыдущего случая, здесь  $\nu = -1$  и уравнение (12.1) имеет решение

$$e^{-\epsilon_0} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Отсюда получаем эффективный центральный заряд

$$c_{\text{eff}}^{LY} = \frac{2}{5}. \quad (12.10)$$

Очевидно, эта величина имеет смысл только тогда, когда спектр состоит из одной этой частицы. Спектр модели синус-Гордона содержит также солитоны и высшие бризеры (на последнее указывает полюс в  $S_{11}(\theta)$ ). Если учесть все эти частицы, окажется, что эффективный центральный заряд модели синус-Гордона равен единице. То есть, опять же, модель синус-Гордона на малых масштабах ведет себя как свободный безмассовый бозон. Ответ (12.10) верен для случая  $p = 2/3$ , когда мы отождествляем связанное состояние с самой частицей 1. Этот ответ согласуется с гипотезой о том, что такая теория является возмущением теории Ли–Янга с центральным зарядом  $c = -22/5$  и  $\Delta_{\min} = -1/5$ .

Оценим число  $N$  частиц в системе. Согласно формуле (11.30), имеем

$$\frac{N}{L} \simeq -2 \frac{\partial}{\partial R} \log \frac{2}{mR} \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \sim R^{-1}.$$

Таким образом, среднее расстояние между частицами по порядку величины равно  $R \ll \xi$  и предположение (11.2) термодинамического анзаца Бете не выполнено. Возникает вопрос: почему все же термодинамический анзац Бете работает? Ответ на этот вопрос дан в работе Классена и Мельцера [18]. Они обратили внимание на то, что, как показали Дашен, Ма и Бернштейн в 1969 году [19], вириальные коэффициенты газа полностью определяются  $S$ -матрицей составляющих его частиц. Точные  $S$ -матрицы дают точные вириальные коэффициенты и, коль скоро газ не испытывает фазового перехода при повышении температуры, его статистическая сумма является аналитическим продолжением статистической суммы из области  $R \gg \xi$ . Это значит, что условие применимости термодинамического анзаца Бете является отсутствие фазового перехода для системы частиц, и это условие выполняется в одном пространственном измерении.

Рассмотрим теперь случай нескольких частиц с диагональной матрицей рассеяния. Уравнение (11.25) в пределе  $R \rightarrow 0$  имеет вид

$$\epsilon_{0a} = \sum_b \nu_{(ab)} \sigma_b \log(1 - \sigma_b e^{-\epsilon_{0b}}), \quad \nu_{(ab)} = \frac{1}{2}(\nu_{ab} + \nu_{ba}), \quad \nu_{ab} = \frac{\phi_{ab}(+\infty)}{\pi}. \quad (12.11)$$

Сумма берется по всем частицам в спектре. Формула для значения в нуле скейлинговой функции  $f(m_{\min} R) = R \mathcal{E}_0(R)$  и, следовательно, эффективного центрального заряда имеет почти тот же вид:

$$c_{\text{eff}} = -\frac{6}{\pi} f(0) = \frac{6}{\pi^2} \sum_a \sigma_a L(\sigma_a e^{-\epsilon_{0a}}). \quad (12.12)$$

Рассмотрим теорию рассеяния бризеров в модели синус-Гордона. Как мы помним, эта теория становится замкнутой в точках  $p = 2/(2N - 1)$  после отождествления  $n$ -го и  $(2N - 1 - n)$ -го бризеров. Система имеет фермионный характер ( $\sigma_n = -1$ ), а константы  $\nu_{nn'}$  даются формулами

$$\nu_{nn'} = \delta_{nn'} - 2 \min(n, n'). \quad (12.13)$$

Систему уравнений (12.11) удобно записать в переменных  $y_n = e^{-\epsilon_0 n}$ :

$$y_n(1 + y_n)^{2n-1} \prod_{m=1}^{n-1} (1 + y_m)^{2m} \prod_{m=n+1}^{N-1} (1 + y_m)^{2n} = 1, \quad n = 1, \dots, N-1. \quad (12.14)$$

От произведений по  $m$  можно избавиться, переписав эту систему в виде

$$y_n^{-2} = (1 + y_{n-1}^{-1})(1 + y_{n+1}^{-1}) \quad (1 \leq n \leq N-1), \quad y_0^{-1} = 0, \quad y_N = y_{N-1}. \quad (12.15)$$

Полученная  $Y$ -система не эквивалентна системе (12.14), но, во-первых, любое решение системы (12.14) удовлетворяет системе (12.15), а во-вторых, единственное положительное ( $\forall n : y_n > 0$ ) решение  $Y$ -системы совпадает с единственным положительным решением системы (12.14).

Для дилогарифма Роджерса есть много теорем о его значениях на решениях  $Y$ -систем.<sup>1</sup> В частности, система

$$y_n^{-2} = (1 + y_{n-1}^{-1})(1 + y_{n+1}^{-1}) \quad (1 \leq n \leq l-1), \quad y_0^{-1} = y_l^{-1} = 0, \quad (12.16)$$

имеет единственное положительное решение, и на нем

$$-\frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{l-1} L(-y_n) = 2 - \frac{6}{l+2} \quad (12.17)$$

Если мы заметим, что при  $l = 2N - 1$  решение системы (12.16) является симметричным ( $y_{l-n} = y_n$ ), то для  $0 \leq n \leq N$  оно решает систему (12.15), а величина

$$c_{\text{eff}}^N = -\frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{N-1} L(-y_n) = 1 - \frac{3}{2N+1} \quad (12.18)$$

совпадает с эффективным центральным зарядом «ленточных» моделей  $M(2, 2N+1)$ .

Возьмемся к задаче об одной частице и изучим следующие члены в разложении  $f(r)$ . В первом приближении надо учесть влияние второй экспоненты на кинк  $\tilde{\epsilon}(\theta)$ . Добавим вклад второй экспоненты в правую часть (12.3):

$$\tilde{\epsilon}(\theta) + \delta\epsilon(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta') - \delta\epsilon(\theta')}) = e^\theta + \left(\frac{mR}{2}\right)^2 e^{-\theta}.$$

В силу малости  $(mR)^2$  мы можем считать этот вклад малым при  $e^\theta \gg e^{-\theta_R}$ . Раскладывая по  $\delta\epsilon$ , получаем

$$\delta\epsilon(\theta) = \left(\frac{mR}{2}\right)^2 \psi_-(\theta), \quad (12.19)$$

где  $\psi_-(\theta)$  является решением линейной задачи. Нам понадобится еще одна функция  $\psi_+(\theta)$ , поэтому определим эти функции вместе:

$$\psi_\pm(\theta) - \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \frac{\psi_\pm(\theta')}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta')} - \sigma} = e^{\pm\theta} \quad (12.20)$$

Заметим, что уравнение для  $\psi_+$  получается дифференцированием уравнения (12.3) по  $\theta$ , поэтому

$$\psi_+(\theta) = \tilde{\epsilon}'(\theta). \quad (12.21)$$

<sup>1</sup>Обзор этих теорем можно найти в работе [20].

Уравнение для  $\psi_-$  не удается решить аналитически. Но нужную поправку для  $f(r)$  оказывается возможным выразить через  $\psi_+$ . Подставим решение  $\tilde{\epsilon} + \delta\epsilon$  вместо  $\tilde{\epsilon}$  в правую часть (12.4) и получим<sup>2</sup>

$$f(r) = f(0) + \frac{r^2}{2} \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^\theta \psi_-(\theta)}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma}.$$

Теперь в правой части выразим  $e^\theta$  через  $\psi_+$ :

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\psi_+(\theta)\psi_-(\theta)}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma} - \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} \frac{\phi'(\theta - \theta')\psi_+(\theta)\psi_-(\theta')}{(e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma)(e^{\tilde{\epsilon}(\theta')} - \sigma)}.$$

Интегралы во втором слагаемом коммутируют. Переобозначив в нем  $\theta \leftrightarrow \theta'$ , мы видим, что множители, содержащие  $\psi_-$  собираются в  $e^{-\theta}$ . Используя затем (12.21), получим

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{-\theta}\psi_+(\theta)}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma} = - \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{-\theta}\tilde{l}'(\theta). \quad (12.22)$$

Мы видим, что интеграл определяется формой кинка на его левом крае, где  $e^{-\theta}$  больше. Его нетрудно вычислить, если фаза  $S$ -матрицы спадает как

$$\phi(\theta) = -\phi(-\theta) = \pi\nu + Ae^{-\theta} + o(e^{-\theta}), \quad \theta \rightarrow \infty. \quad (12.23)$$

В этом случае при  $\theta \rightarrow -\infty$  имеем

$$e^{-\theta} \int \frac{d\theta'}{2\pi} (\phi(\theta - \theta') + \pi\nu)\tilde{l}'(\theta') = -A \int \frac{d\theta'}{2\pi} e^{-\theta'}\tilde{l}'(\theta') = Af''(0).$$

С другой стороны разность  $\tilde{\epsilon}(\theta) - \epsilon_0 = o(e^\theta)$  при  $\theta \rightarrow -\infty$ . Это немедленно следует из требования сходимости интеграла в левой части уравнения (12.3). Поэтому, взяв интеграл в левой части по частям, получим для нее

$$e^{-\theta} \left( \epsilon_0 + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta')\tilde{l}'(\theta') \right) \Big|_{\theta \rightarrow -\infty} = e^{-\theta} \left( \tilde{\epsilon}(\theta) + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta')\tilde{l}'(\theta') \right) \Big|_{\theta \rightarrow -\infty} = 1.$$

Следовательно,

$$f''(0) = A^{-1} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \left( (\phi(\theta) - \pi\nu)e^\theta \right)^{-1}. \quad (12.24)$$

Отсюда мы можем получить плотность энергии в бесконечном объеме:

$$\varepsilon_\infty = -\frac{f''(0)m^2}{2}. \quad (12.25)$$

Для  $S$ -матрицы (12.9) имеем  $A = 4 \sin \pi p$ . Следовательно, для модели sh-Гордона ( $-1 < p < 0$ )

$$\varepsilon_\infty = \frac{m^2}{8 \sin \pi(-p)}, \quad (12.26)$$

а для модели Ли—Янга

$$\varepsilon_\infty = -\frac{m^2}{4\sqrt{3}}. \quad (12.27)$$

Более тщательный анализ показывает, что выражение  $f(r) - f(0) - \frac{1}{2}f''(0)r^2$  действительно раскладывается по целым степеням  $r^\alpha$  с некоторым показателем  $\alpha > 0$ , что позволяет найти конформную размерность возмущающего оператора  $\Delta_p = 1 - \alpha/4$  для унитарной модели или  $1 - \alpha/2$  для неунитарной. Вычисление коэффициента при первой поправке позволяет связать константу связи  $\lambda$  с массой частицы  $m$ .

<sup>2</sup>Если мы посмотрим на формулу (11.8), мы увидим, что поправки, связанные с возмущением, могут быть больше  $r^2$  при малых  $r$ , если  $1 - \Delta_p$  достаточно мало. Однако они (кроме очень специальных случаев) имеют другую аналитическую зависимость от  $R$ , поэтому здесь мы будем эти поправки игнорировать.

## Задачи

1. Выведите (12.11) и (12.12).
2. Покажите, что для  $S$ -матриц бризеров в модели синус-Гордона при  $0 < p < 1$  набег фазы дается формулой (12.13). Выведите (12.14), (12.15).
3. Покажите, что для моделей, описываемых бризерным сектором модели синус-Гордона в точках  $p = 2/(2N - 1)$  с отождествлением частиц  $n \sim 2N - 1 - n$  величина  $\epsilon_\infty$  дается формулой (12.26) с параметром  $m = m_1$ .
4. Покажите, что при больших значениях  $\theta$  функция  $\epsilon(\theta)$  имеет асимптотику вида

$$\epsilon(\theta) = \frac{mR}{2} e^\theta + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(mR) (mR e^\theta)^{-n},$$

где функции  $s_n(r)$  конечны при  $r \rightarrow 0$ . Выразите  $s_1(r)$  через  $f(r)$ . Покажите, что остальные коэффициенты  $s_n(r)$  можно представить в виде

$$s_n(mR) = -n A_n \sigma(mR)^n \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{n\theta} \log(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)}), \quad \phi(\theta) = \pi\nu + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n\theta},$$

причем  $s_n(0) \neq 0$ , если  $A_n \neq 0$ . Оцените значения  $s_n(0)$  при больших  $n$ . Найдите значения  $n$ , при которых  $A_n \neq 0$ , для модели sh-Гордона и модели Ли–Янга.

**5\***. Рассмотрите модель с матрицей рассеяния фундаментальной частицы

$$S_{11}(\theta) = S_{1\bar{1}}(i\pi - \theta) = \frac{\text{sh} \frac{1}{2} \left( \theta + \frac{2\pi i}{N} \right)}{\text{sh} \frac{1}{2} \left( \theta - \frac{2\pi i}{N} \right)}, \quad (12.28)$$

где  $N \geq 2$  — целое число. Эта  $S$ -матрица имеет полюс, порождающий серию связанных состояний  $n = 2, 3, \dots, N$  (см. задачу 10.5). При отождествлении  $\bar{n} = N - n$ , спектр замыкается ( $\mathbb{Z}_N$ -симметричная модель Изинга). Найдите параметры  $\nu_{nn'}$  для этой теории и покажите, что эффективный центральный заряд совпадает с центральным зарядом теории  $\mathbb{Z}_N$ -парафермионов:

$$c = 2 - \frac{6}{N + 2}. \quad (12.29)$$

Найдите также значения  $\epsilon_\infty$ .

## Семинар 12

### Вычисление вакуумной плотности энергии $\epsilon_\infty$ в системе из нескольких частиц

Рассмотрим модель с двумя частицами с массами  $m_1$  и  $m_2 = \kappa m_1 > m_1$ . Вторая частица является связанным состоянием двух первых в полюсе  $S$ -матрицы  $\theta = iu$ , так что  $\kappa = 2 \cos \frac{\pi u}{2}$ . Матрицы рассеяния диагональны. Задача состоит в том, чтобы выразить  $\epsilon_\infty$  через асимптотики фаз  $\phi_{ab}(\theta)$  и массы  $m_a$ . Получим общее выражение для  $f''(0)$  через  $\tilde{\epsilon}_a(\theta)$ :

$$f''(0) = \sum_a \kappa_a I_a, \quad \text{где } I_a = - \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{-\theta} \tilde{l}'_a(\theta).$$

Здесь предполагается  $\kappa_1 = 1$ .

Положим

$$\phi_{ab}(\theta) = \pi\nu_{ab} + A_{ab} e^{-\theta} + o(e^{-\theta}) \text{ при } \theta \rightarrow +\infty.$$

Тогда величины  $I_a$  являются решениями уравнения

$$\sum_b A_{ba} I_b = \kappa_a.$$

Теперь нужно проанализировать вид асимптотик  $S_{ab}(\theta)$ , исходя из условий задачи, и найти  $f''(0)$ . Получим

$$A = A_{11} \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & \kappa^2 \end{pmatrix} \text{ или } A_{ab} = A_{11} \kappa_a \kappa_b \Rightarrow f''(0) = A_{11}^{-1}, \quad \epsilon_\infty = -\frac{m_1^2}{2A_{11}}.$$