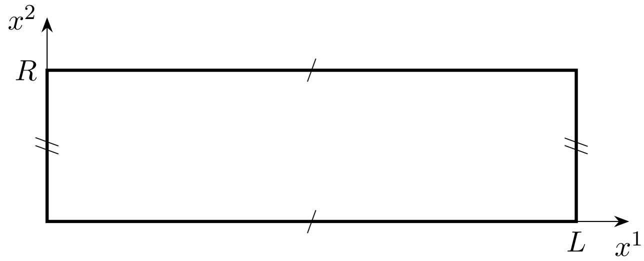
Лекция 11
Термодинамический анзац Бете: основы метода

На прошлой лекции мы пытались найти связь между точными S-матрицами и возмущениями конформных теорий, исходя из интегралов движения, а также эвристических соображений. Сегодня мы обсудим метод, позволяющий точно и явно связать данные о рассеянии с параметрами конформной модели — *термодинамический анзац Бета (TBA)*.[1] Рассмотрим релятивистскую систему в прямоугольной области эвклидова пространства размером $L \times R$, замкнутой в тор $T_{L,R}$ (отождествляемые линии помечены одинаковыми засечками):



Мы можем рассматривать систему двумя способами. Если мы будем считать x^1 пространственной координатой, а x^2 — мнимым временем, величина R^{-1} будет температурой системы, живущей в ящике длины L («L-картина»). Если мы поменяем местами смысл координат, величина L^{-1} будет температурой, а R — размером ящика («R-картина»).

Пусть ξ — корреляционная длина системы. Если мы выберем

$$R \ll \xi \ll L, \tag{11.1}$$

то в L-картине мы будем иметь большую систему при высокой температуре. Пусть N — общее число частиц. Если теперь

$$L \gg \xi N, \tag{11.2}$$

систему можно рассматривать как разреженную и изучать термодинамику частиц исходя из матрицы рассеяния. В R-картине, наоборот, температура стремится к нулю, но зато размеры системы настолько малы, что мы можем пользоваться конформной теорией поля (и первыми поправками к ней) для ее исследования. Сравнивая выражения для статистической суммы, вычисленные обоими способами,

$$Z(L,R) = \operatorname{tr}_{\mathcal{H}_L} e^{-RH_L} = \operatorname{tr}_{\mathcal{H}_R} e^{-LH_R}, \tag{11.3}$$

мы можем связать ультрафиолетовое поведение системы с инфракрасным.

Начнем с R-картины. Поскольку L очень велико, наибольший вклад в статсумму в этой картине дает основное состояние, поэтому

$$\log Z(L,R) = -L\mathcal{E}_0(R) + O(L^0), \tag{11.4}$$

где $\mathcal{E}_0(R)$ — энергия основного состояния гамильтониана H_R.

Рассмотрим возмущенную конформную теорию поля. Гамильтониан

$$H_R = \int_0^R dx^2\, T^1_1(x) = \int_0^R dx^2\, (-T_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}} - T_{\bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{z}}} + 2T_{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}),$$

если мы примем $\mathfrak{z} = x^2 + ix^1$. Для эвклидова[2] тензора энергии-импульса имеем

$$T(x) = 2\pi T_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}, \qquad \bar{T}(x) = 2\pi T_{\bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{z}}}, \qquad \Theta(x) = -2\pi T_{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}.$$

[1] Не следует путать метод термодинамического анзаца Бете с анзацем Бете при конечных температурах. Хотя первый и использует методы последнего, он к нему не сводится.

[2] В эвклидовом пространстве и в пространстве Минковского совпадают компоненты T^μ_ν, а компоненты $T_{\mu\nu}$ могут отличаться. В частности, в координатах $z, \bar{z}$ эти компоненты отличаются знаком.

Тогда

$$
\begin{aligned}
H_R = H_R^{(0)} + H_R^{\mathrm{p}} &= -\frac{\mathbb{T}_0 + \bar{\mathbb{T}}_0}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^R dx^2\,\Theta(x) \\
&= \frac{2\pi}{R}\left(\mathbb{L}_0 + \bar{\mathbb{L}}_0 - \frac{c}{12}\right) + (1-\Delta_{\mathrm{p}})\lambda\int_0^R dx^2\,\Phi_{\mathrm{p}}(x).
\end{aligned}
\tag{11.5}
$$

Полагая $\lambda = 0$ получаем

$$
\mathcal{E}_0^{(0)}(R) = -\frac{\pi c_{\mathrm{eff}}}{6R}, \qquad c_{\mathrm{eff}} = c - 12(\Delta_{\min} + \bar{\Delta}_{\min}). \tag{11.6}
$$

Размерности $\Delta_{\min}, \bar{\Delta}_{\min}$ являются конформными размерностями в двух киральностях примарного оператора $\Phi_{\min}$ с наименьшей масштабной размерностью ($d = \Delta + \bar{\Delta}$), согласующегося с условием периодичности по R. В теориях с невырожденным вакуумом инвариантных относительно пространственной инверсии эти размерности совпадают: $\Delta_{\min} = \bar{\Delta}_{\min}$. В унитарных теориях с тривиальными условиями периодичности они равны нулю и $c_{\mathrm{eff}} = c$. Величину c_{eff} называют *эффективным центральным зарядом*. Именно эффективный центральный заряд мы будем находить в L-картине. Вычислению термодинамических средних в L-картине соответствуют мацубаровские граничные условия по x^2 (периодические для бозонных полей и антипериодические для фермионных полей). С такими условиями заведомо согласован единичный оператор, так что имеем

$$
\Delta_{\min} + \bar{\Delta}_{\min} \le 0, \qquad c_{\mathrm{eff}} \ge c.
$$

Теперь разберемся, как записывается энергия основного состояния в возмущенной теории. Имеем

$$
\mathcal{E}_0(R) = \langle\mathrm{vac}|H_R|\mathrm{vac}\rangle - \varepsilon_\infty R = \frac{\langle H_R\, e^{-S_{\mathrm{p}}}\rangle_0}{\langle e^{-S_{\mathrm{p}}}\rangle_0} - \varepsilon_\infty R, \qquad S_{\mathrm{p}} = \lambda\int d^2x\,\Phi_{\mathrm{p}}
$$

Слагаемое, содержащее $\varepsilon_\infty = \langle T_1^1\rangle_{R=\infty}$, связано с тем, что в теории поля при вычислении среднего от гамильтониана мы вычитаем вакуумную энергию на бесконечной прямой так, чтобы $\mathcal{E}_0(R) \to 0$ при $R \to \infty$.[3] По теории возмущений величину ε_∞ вычислить нельзя, но мы увидим, как она извлекается из L-картины. Среднее с индексом 0 понимается как среднее по состоянию с наименьшей конформной размерностью в конформной теории поля:

$$
\langle X\rangle_0 = \langle\Phi_{\min}|X|\Phi_{\min}\rangle. \tag{11.7}
$$

Для вычисления $\mathcal{E}_0(R)$ в возмущенной теории удобнее начать прямо с (11.4):

$$
\mathcal{E}_0(R) = -\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\log\left\langle e^{-L\mathcal{E}_0^{(0)}(R) - S_{\mathrm{p}}}\right\rangle_0 - \epsilon_\infty R = \mathcal{E}_0^{(0)}(R) - \epsilon_\infty R - \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\log\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\langle S_{\mathrm{p}}^n\rangle_0.
$$

Вычисление логарифма эквивалентно замене средних $\langle S_{\mathrm{p}}^n\rangle_0$ на соответствующие связные части $\langle S_{\mathrm{p}}^n\rangle_{0,c}$ и выпадению первого слагаемого ($\langle 1\rangle_{0,c} = 0$). Деление на L сокращает интеграл по x^1 в одном из множителей. Отсюда получаем

$$
\mathcal{E}_0(R) = \mathcal{E}_0^{(0)}(R) - \varepsilon_\infty R + \lambda R\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\langle\Phi_{\mathrm{p}}(x)S_{\mathrm{p}}^{n-1}\rangle_{0,c}.
$$

Средние в правой части не зависят от точки x в силу трансляционной инвариантности. Перемасштабируем, заменив $x \to Rx$, $x_i \to Rx_i$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_0(R) &= -\frac{\pi c_{\mathrm{eff}}}{6R} - \varepsilon_\infty R + \lambda\sum_{n=1}^\infty \frac{(-\lambda)^{n-1}}{n!} R^{2n(1-\Delta_{\mathrm{p}})-1}\mathbb{M}_n(L/R) \\
\mathbb{M}_n(l) &= \int_{T_{l,1}} d^2x_1\cdots d^2x_{n-1}\,\langle\Phi_{\mathrm{p}}(x)\Phi_{\mathrm{p}}(x_1)\cdots\Phi_{\mathrm{p}}(x_{n-1})\rangle_{0,c}
\end{aligned}
\tag{11.8}
$$

[3] Если связать теорию с гравитацией, величина $8\pi G\epsilon_\infty$ будет иметь смысл космологической постоянной.

Интегралы $\mathbb{M}_n$ приведены к безразмерному виду масштабированием с $T_{L,R}$ на $T_{L/R,1}$. В пределе $l = L/R \to \infty$ интегралы превращаются в интегралы по цилиндру. Конформным преобразованием их можно привести к интегралам по плоскости:

$$\mathbb{M}_n(\infty) = (2\pi)^{2-2n(1-\Delta_{\mathrm{p}})} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x_1 \cdots d^2x_{n-1} \, \langle \Phi_{\mathrm{p}}(1,1)\Phi_{\mathrm{p}}(x_1)\cdots\Phi_{\mathrm{p}}(x_{n-1})\rangle_{0,c} \prod_{i=1}^{n-1} |z_i|^{2\Delta_{\mathrm{p}}-2} \tag{11.9}$$

Если $\Delta_{\min}$ или $\bar{\Delta}_{\min}$ равно нулю (в частности, это всегда так, когда теория унитарна), имеем $\langle\Phi_{\mathrm{p}}\rangle_{0,c} = 0$. Это значит, что $\mathbb{M}_0 = 0$ и разложение начинается с $n = 2$. В противном случае разложение начинается с $n = 1$. Отсюда заключаем

$$\mathcal{E}_0(R) = -\frac{\pi c_{\mathrm{eff}}}{6R} - \varepsilon_\infty R + O(R^\alpha), \qquad \alpha = \begin{cases} 1 - 2\Delta_{\mathrm{p}}, & \text{если } \Delta_{\min}, \bar{\Delta}_{\min} < 0; \\ 3 - 4\Delta_{\mathrm{p}}, & \text{если } \Delta_{\min} = 0 \text{ или } \bar{\Delta}_{\min} = 0. \end{cases} \tag{11.10}$$

Теперь обратимся к L-картине. Чтобы понять основной принцип, разберем сначала случай одной нейтральной частицы массы m с матрицей рассеяния $S(\theta) = \pm e^{i\phi(\theta)}$, $\phi(-\theta) = -\phi(\theta)$. Как мы уже говорили, будем предполагать, что термодинамика частиц при достаточно больших значениях L полностью определяется асимптотической волновой функцией. Напишем уравнения Бете, которые следуют из периодичности этой волновой функции:

$$e^{imL \operatorname{sh}\theta_i} \prod_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{N} S(\theta_i - \theta_j) = (-1)^{\mathrm{F}}, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{11.11}$$

Где $\mathrm{F} = 0$ в случае бозонов и $\mathrm{F} = 1$ в случае фермионов. Прологарифмируем эти уравнения:

$$mL \operatorname{sh}\theta_i + \sum_{j=1}^{N} \phi(\theta_i - \theta_j) = 2\pi n_i, \tag{11.12}$$

причем $n_i \in \mathbb{Z} + \frac{N-1+\mathrm{F}}{2}$ в случае $S(0) = -1$ и $n_i \in \mathbb{Z} + \frac{\mathrm{F}}{2}$ в случае $S(0) = 1$. Для каждого решения уравнений Бете $\{\theta_i\}$ зададим функцию $\theta(n)$ уравнением

$$mL \operatorname{sh}\theta(n) + \sum_{j=1}^{N} \phi(\theta(n) - \theta_j) = 2\pi n. \tag{11.13}$$

Очевидно $\theta(n_i) = \theta_i$, а при всех значениях $n \notin \{n_i\}$ значения $\theta(n)$ будут интерпретироваться как «незаполненные состояния». По умолчанию мы будем предполагать, что значения n_i расположены по возрастанию: $n_{i+1} \geq n_i$, причем равные значения отвечают кратным корням уравнений Бете, если таковые имеются. Мы будем также предполагать, что решения уравнений Бете удовлетворяют условию $\theta_{i+1} \geq \theta_i$ $(\forall i)$ и, более того, $\theta(n+1) \geq \theta(n)$ $(\forall n)$. Это верно в случае растущей функции $\phi(\theta)$, но и в случае убывающей функции может быть верно при разумных условиях.

При больших L разности $\theta(n+1) - \theta(n)$ малы, и можно ввести спектральную плотность состояний $\rho(\theta)$ и спектральную плотность частиц $\rho^\bullet(\theta)$:

$$\rho(\theta) = \left\langle \frac{2\pi}{L(\theta(n+1) - \theta(n))} \right\rangle_{\theta(n)\simeq\theta}, \qquad \rho^\bullet(\theta) = \left\langle \frac{2\pi k}{L(\theta_{i+k} - \theta_i)} \right\rangle_{\theta_i\simeq\theta}, \tag{11.14}$$

где k не меньше кратности вырождения корня θ_i. Очевидно, интеграл от $\rho^\bullet$ равен плотности частиц:

$$\int \frac{d\theta}{2\pi} \, \rho^\bullet(\theta) = \frac{N}{L}, \tag{11.15}$$

а интеграл с весом $m \operatorname{ch}\theta$ дает энергию состояния:

$$E[\rho^\bullet] = mL \int \frac{d\theta}{2\pi} \, \rho^\bullet(\theta) \operatorname{ch}\theta. \tag{11.16}$$

Все интегралы по θ мы будем понимать по всей прямой $\mathbb{R}$, если не оговорено иное.

Возьмем разность двух уравнений (11.13) при двух последовательных значениях n и поделим на $L(\theta(n+1)-\theta(n))$. Заменив сумму на интеграл, получим

$$\rho(\theta) = m\operatorname{ch}\theta + \int \frac{d\theta'}{2\pi}\,\phi'(\theta-\theta')\rho^\bullet(\theta'). \tag{11.17}$$

Это уравнение позволяет для каждой заданной функции $\rho^\bullet(\theta)$ найти соответствующую плотность состояний $\rho(\theta)$. Но при конечных температурах необходимо просуммировать все возможные наборы $\{n_i\}$ с гиббсовскими весами. Трудность состоит в нетривиальной мере функционального интегрирования по $\rho^\bullet$ в непрерывном пределе. Поэтому вместо прямого суммирования будем искать минимум свободной энергии. Положим

$$F[\rho,\rho^\bullet] = E[\rho^\bullet] - R^{-1}S[\rho,\rho^\bullet], \tag{11.18}$$

Чтобы найти энтропию, воспользуемся обычным трюком из теории растворов. У нас есть две ситуации:

- «Фермионный» случай. Если частицы являются фермионами с $S(0)=1$ или бозонами с $S(0)=-1$, каждое значение n_i может быть заполнено только один раз.

- «Бозонный» случай. Если частицы являются бозонами с $S(0)=1$ или фермионами с $S(0)=-1$, каждое значение n_i может заполняться неограниченным числом частиц.

Разобьем вещественную прямую на небольшие интервалы $\Delta_k=[\eta_k,\eta_{k+1}]$. Полную энтропию S будем понимать как сумму вкладов ΔS_k от значений $\theta\in\Delta_k$. Энтропия ΔS_k понимается как число «микроскопических» состояний, которыми реализуется «макроскопическое» состояние, которое задается числом частиц $N_k^\bullet$ на числе состояний N_k в этом интервале.

В «фермионном» случае количество таких состояний есть число сочетаний из N_k по $N_k^\bullet$ (раскладываем $N_k^\bullet$ частиц по N_k ящикам, куда помещается одна частица), так что

$$\Delta S_k = \log\frac{N_k!}{N_k^\bullet!(N_k-N_k^\bullet)!} \simeq N_k\log N_k - N_k^\bullet\log N_k^\bullet - (N_k-N_k^\bullet)\log(N_k-N_k^\bullet).$$

В «бозонном» случае количество таких состояний есть число сочетаний из $N_k+N_k^\bullet-1$ по $N_k^\bullet$. Действительно, возьмем $N_k+N_k^\bullet-1$ ящиков, расставленных в ряд, и положим в них $N_k^\bullet$ частиц по одной в ящик. Останется N_k-1 пустых мест. Возьмем i-тое слева пустое место. Сосчитаем число l_i частиц лежащих слева от него в ряд до следующего пустого места. Будем считать это числом заполнения i-го состояния. Числом заполнения N_k-го состояния будем считать количество частиц, лежащих между самым правым пустым местом и правым краем. Это дает взаимно-однозначное соответствие между микроскопическими конфигурациями и раскладкой частиц по ящикам. Итак, имеем

$$\Delta S_k = \log\frac{(N_k+N_k^\bullet-1)!}{N_k^\bullet!(N_k-1)!} \simeq (N_k+N_k^\bullet)\log(N_k+N_k^\bullet) - N_k^\bullet\log N_k^\bullet - N_k\log N_k.$$

Устремляя размеры интервалов к нулю и заменяя N_k на $L\rho(\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}$ и $N_k^\bullet$ на $L\rho^\bullet(\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}$, получаем

$$S[\rho,\rho^\bullet] = L\int\frac{d\theta}{2\pi}\left(\rho\log\rho - \rho^\bullet\log\rho^\bullet - (\rho-\rho^\bullet)\log(\rho-\rho^\bullet)\right) \tag{11.19}$$

в «фермионном» случае и

$$S[\rho,\rho^\bullet] = L\int\frac{d\theta}{2\pi}\left((\rho+\rho^\bullet)\log(\rho+\rho^\bullet) - \rho^\bullet\log\rho^\bullet - \rho\log\rho\right) \tag{11.20}$$

Давайте введем знаковый множитель

$$\sigma = (-1)^{\mathrm{F}}S(0) = \begin{cases} 1 & \text{в «бозонном» случае;} \\ -1 & \text{в «фермионном» случае.} \end{cases} \tag{11.21}$$

Тогда энтропию можно записать в виде

$$S[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} \left((\sigma\rho + \rho^\bullet) \log(\rho + \sigma\rho^\bullet) - \sigma\rho \log \rho - \rho^\bullet \log \rho^\bullet \right). \tag{11.22}$$

Теперь нужно найти минимум функционала $F[\rho, \rho^\bullet]$ с учетом условия (11.17):

$$0 = \frac{2\pi R}{L} \frac{\delta F[\rho[\rho^\bullet], \rho^\bullet]}{\delta \rho^\bullet(\theta)} = mR \operatorname{ch} \theta - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta' - \theta) \log \frac{\rho(\theta') + \sigma\rho^\bullet(\theta')}{\rho(\theta')} - \log \frac{\rho(\theta) + \sigma\rho^\bullet(\theta)}{\rho^\bullet(\theta)}.$$

Мы учли, что

$$\frac{\delta \rho(\theta')}{\delta \rho^\bullet(\theta)} = \frac{1}{2\pi} \phi'(\theta' - \theta).$$

Давайте для последнего логарифма в условии минимума введем специальное обозначение:

$$\epsilon(\theta) = \log \frac{\rho(\theta) + \sigma\rho^\bullet(\theta)}{\rho^\bullet(\theta)}. \tag{11.23}$$

По-другому это можно записать так

$$\frac{\rho^\bullet(\theta)}{\rho(\theta)} = \frac{1}{e^{\epsilon(\theta)} - \sigma}. \tag{11.24}$$

В левой части стоит функция заполнения, и она выражается через $\epsilon(\theta)$ так же, как в случае свободных частиц она выражается через $\beta E(\theta)$. Величину $\epsilon(\theta)$ называют *псевдоэнергией.* В терминах псевдоэнергии полученные уравнения записываются в виде нелинейного интегрального уравнения, называемого уравнением *уравнения Янга—Янга* [17]:

$$\epsilon(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \log \left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta')} \right) = mR \operatorname{ch} \theta. \tag{11.25}$$

Покажем, что все остальные величины можно выразить через решение $\epsilon(\theta, mR)$ этого уравнения.

Прежде всего, с помощью (11.25) и (11.17) можно исключить ρ и $\rho^\bullet$ в выражении для свободной энергии, которая, как мы знаем из (11.4), пропорциональна энергии основного состояния в R-картине $\mathcal{E}_0(R)$:

$$\mathcal{E}_0(R) = \frac{RF}{L} = \sigma m \int \frac{d\theta}{2\pi} \operatorname{ch} \theta \log \left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)} \right). \tag{11.26}$$

Удобно ввести скейлинговую функцию $f(r)$ соотношением

$$f(mR) = R\mathcal{E}_0(R) = \sigma mR \int \frac{d\theta}{2\pi} \operatorname{ch} \theta \log \left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)} \right). \tag{11.27}$$

Эта функция не зависит от размерных параметров. В силу (11.6) через нее легко выражается эффективный центральный заряд:

$$c_{\text{eff}} = -\frac{6}{\pi} f(0). \tag{11.28}$$

Дифференцируя уравнение (11.25) по R и сравнивая результат с (11.17), получаем

$$\rho(\theta) = \frac{\partial \epsilon(\theta, mR)}{\partial R}. \tag{11.29}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{N}{L} = \sigma \frac{\partial}{\partial R} \int \frac{d\theta}{2\pi} \log \left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta, mR)} \right). \tag{11.30}$$

Итак, у нас есть система нелинейных уравнений. В следующий раз мы изучим, как решать эти уравнения.

Довольно несложно обобщить результат на случай нескольких частиц с диагональной матрицей рассеяния. Пусть имеется набор частиц $a = 1, \ldots, r$ с массами m_a и матрицами рассеяния $S_{ab}(\theta) =$

$Z_a^{\delta_{ab}} e^{i\phi_{ab}(\theta)}$, $Z_a = \pm 1$, $\phi_{ab}(\theta) = -\phi_{ba}(-\theta)$. Мы будем принимать $\sigma_a = (-1)^{\mathrm{F}_a} Z_a$, то есть $\sigma_a = 1$ для «бозонных» частиц и $\sigma_a = -1$ для «фермионных» частиц. Тогда уравнения Бете имеют вид:

$$m_a L \operatorname{sh} \theta_i^{(a)} + \sum_{b=1}^{r} \sum_{j=1}^{N_b} \phi_{ab}(\theta_i^{(a)} - \theta_j^{(b)}) = 2\pi n_i^{(a)}. \tag{11.31}$$

Совершенно аналогично вводим плотности состояний $\rho_a(\theta)$ и частиц $\rho_a^\bullet(\theta)$, причем

$$N_a = L \int \frac{d\theta}{2\pi}\, \rho_a^\bullet(\theta), \qquad E[\rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} \sum_{a=1}^{r} \rho_a^\bullet(\theta) m_a \operatorname{ch} \theta. \tag{11.32}$$

В термодинамическом пределе имеем

$$\rho_a(\theta) = m_a \operatorname{ch} \theta + \sum_{b=1}^{r} \int \frac{d\theta'}{2\pi}\, \phi'_{ab}(\theta - \theta') \rho_b^\bullet(\theta'). \tag{11.33}$$

В остальном выводе достаточно просто заменить

$$\rho \to \rho_a, \quad \rho^\bullet \to \rho_a^\bullet, \quad \epsilon \to \epsilon_a, \quad \sigma \to \sigma_a, \quad \phi(\theta - \theta') \to \phi_{ab}(\theta - \theta'), \quad \int \frac{d\theta}{2\pi} \to \sum_a \int \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Здесь есть одна тонкость. Предположим, что среди частиц есть пары частица—античастица $(a, \bar{a})$. Тогда имеются сохраняющиеся заряды Q_a, собственные значения которых равны $N_a - N_{\bar{a}}$, и мы должны искать минимум с учетом сохранения этих зарядов. Чтобы учесть это, легче использовать большой канонический ансамбль и приписать каждому сорту частиц химический потенциал μ_a. Надо искать минимум большого термодинамического потенциала

$$\Omega[\rho, \rho^\bullet] = E[\rho^\bullet] - R^{-1} S[\rho, \rho^\bullet] - \sum_{a=1}^{r} \mu_a N_a. \tag{11.34}$$

При этом надо полагать $\mu_a = 0$ для нейтральных частиц и $\mu_{\bar{a}} = -\mu_a$ для пар частица—античастица. Уравнение Янга—Янга принимает вид

$$\epsilon_a(\theta) - \sum_{b=1}^{r} \sigma_b \int \frac{d\theta'}{2\pi}\, \phi'_{ab}(\theta - \theta') \log\left(1 - \sigma_b e^{-\epsilon_b(\theta')}\right) = R(m_a \operatorname{ch} \theta - \mu_a). \tag{11.35}$$

Далее, большой потенциал имеет тот же вид, что и свободная энергия в случае с нулевыми химпотенциалами:

$$\frac{R\Omega}{L} = \sum_{a=1}^{r} \int \frac{d\theta}{2\pi}\, \sigma_a m_a \operatorname{ch} \theta \, \log\left(1 - \sigma_a e^{-\epsilon_a(\theta)}\right). \tag{11.36}$$

Из-за присутствия в правой части (11.35) химических потенциалов плотность состояний вычисляется по несколько другой формуле:

$$\rho_a(\theta) = \frac{m}{R} \frac{\partial \epsilon_a(\theta)}{\partial m}, \qquad \frac{N_a}{L} = \frac{\sigma_a m}{R} \frac{\partial}{\partial m} \int \frac{d\theta}{2\pi} \log\left(1 - \sigma_a e^{-\epsilon_a(\theta, R)}\right). \tag{11.37}$$

где m — общий множитель всех масс. Это значит, что мы записываем массы в виде $m_a = \kappa_a m$, где κ_a — безразмерные константы. Энергия $\mathcal{E}_0(R)$ выражается через свободную энергию

$$\mathcal{E}_0(R) = \frac{RF}{L}, \qquad F = \Omega + \sum_{a=1}^{r} \mu_a N_a. \tag{11.38}$$

В симметричном случае $N_a = N_{\bar{a}}$ $(\forall a)$ все химические потенциалы равны нулю, $\mu_a = 0$, и ответы не отличаются от случая нейтральных частиц. Однако в некоторых задачах интересен и несимметричный случай.

Задачи

1. Покажите, что в модели свободного безмассового майорановского фермиона с граничными условиями Невё—Шварца ($\psi(x^1, x^2+R) = -\psi(x^1, x^2)$) эффективный центральный заряд равен $c_{\text{eff}}^{NS} = \frac{1}{2}$, а в модели с граничными условиями Рамона ($\psi(x^1, x^2+R) = \psi(x^1, x^2)$) он равен $c_{\text{eff}}^{R} = -1$.

2. Аналогично найдите эффективный заряд для свободного безмассового нейтрального бозона с периодическими и антипериодическими граничными условиями.

3. Выведите (11.26), (11.29) и (11.30).

4. Найдите свободную энергию и число частиц в системе из одной частицы в пределе низких температур $mR \gg 1$ до членов порядка e^{-2mR}. Получите явные формулы в элементарных функциях в порядке e^{-mR}.

5*. Безмассовые теории можно описать как системы частиц со спектром $p^0 = p^1 = \frac{m}{2}e^{\theta}$ (правые частицы) или $p^0 = -p^1 = \frac{m}{2}e^{-\theta}$ (левые частицы). Рассмотрим теорию, которая содержит одну правую частицу r и одну левую частицу l с одинаковым параметром m, причем между ними имеется три скалярные матрицы рассеяния $S_{rr}(\theta)$, $S_{ll}(\theta)$ и $S_{rl}(\theta)$. Какие условия накладывают на эти матрицы условия унитарности и кроссинг-симметрии? При каких условиях такая теория масштабно-инвариантна, а при каких — нет? Напишите уравнения термодинамического анзаца Бете и формулы для свободной энергии и чисел частиц в этой теории.

Семинар 11

Уравнение Янга—Янга для модели Либа—Линихера

Рассмотрим модель Либа—Линихера. В термодинамическом пределе уравнение Бете для него имеет вид

$$1 + \int \frac{dp'}{2\pi}\phi'(p-p')\rho^\bullet(p') = \rho(p), \qquad \phi(p) = -i\log\frac{mc+ip}{mc-ip},$$

причем число частиц и энергия равны

$$N = L\int\frac{dp}{2\pi}\,\rho^\bullet(p), \quad E = L\int\frac{dp}{2\pi}\,\frac{p^2}{2m}\rho^\bullet(p).$$

Мы покажем, что уравнение Янга—Янга имеет вид

$$\epsilon(p) + \int\frac{dp'}{2\pi}\phi'(p-p')\log(1+e^{-\epsilon(p')}) = R\left(\frac{p^2}{2m}-\mu\right).$$

При этом большой термодинамический потенциал равен

$$\Omega = -\frac{L}{R}\int\frac{dp}{2\pi}\log(1+e^{-\epsilon(p)}).$$

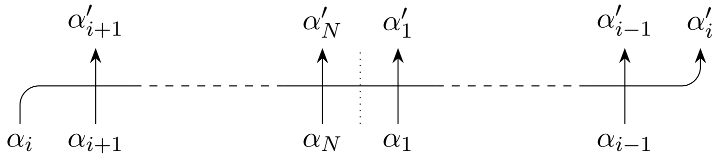
Дополнение к лекции 11

Иерархический анзац Бете

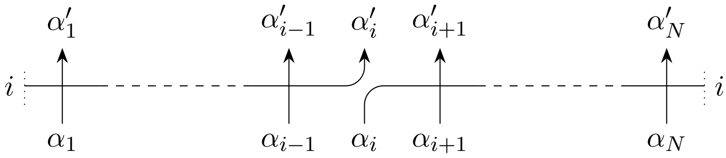
Вопрос такой: а что делать, если матрица рассеяния частиц недиагональна? Рассмотрим модель с S-матрицей $S(\theta)^{\alpha'_1\alpha'_2}_{\alpha_1\alpha_2}$. Для простоты будем считать, что имеется одна частица с несколькими внутренними состояниями, например солитон модели синус-Гордона. Условие периодичности для волновой функции имеет вид

$$e^{imL\,\mathrm{sh}\,\theta_i}S_{i,i-1}(\theta_i-\theta_{i-1})\cdots S_{i1}(\theta_i-\theta_1)S_{i,N}(\theta_i-\theta_N)\cdots S_{i,i+1}(\theta_i-\theta_{i+1})|\theta_1,\ldots,\theta_N\rangle = |\theta_1,\ldots,\theta_N\rangle.$$

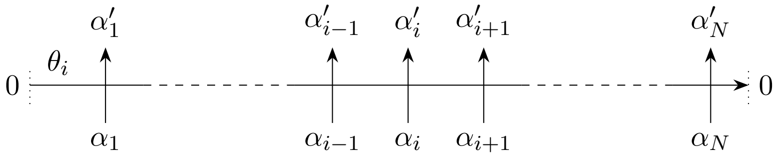
Графически произведение S-матриц в этом выражении можно изобразить так:



Переставляя часть справа от пунктирной линии влево, получим



Теперь вспомним, что в большом количестве задач матрица рассеяния в нуле сводится к матрице перестановки: $S(0) = \pm P$. Тогда средний узел можно заменить (с точностью до знака) на матрицу рассеяния:



$$=$$

$$= \mathrm{tr}_{V_0} S_{0N}(\theta_i - \theta_N) \cdots S_{02}(\theta_i - \theta_2) S_{01}(\theta_i - \theta_1) = T(\theta_i).$$

Мы видим, что произведение матриц рассеяния вкладывается в семейство коммутирующих трансфер-матриц

$$T(\theta) = \mathrm{tr}_{V_0} L_{1\ldots N}(\theta), \qquad L_{1\ldots N}(\theta) = S_{0N}(\theta - \theta_N) \cdots S_{02}(\theta - \theta_2) S_{01}(\theta - \theta_1), \tag{11.39}$$

где V_0 играет роль вспомогательного пространства, $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ — квантового пространства. Нам нужно найти такие векторы

$$|I; \theta_1, \ldots, \theta_N\rangle = \sum_{\{\beta_i\}} A_I^{\beta_1 \ldots \beta_N} |\theta_1, \ldots, \theta_N\rangle_{\beta_1 \ldots \beta_N}, \qquad I = 1, \ldots, (\dim V)^N, \tag{11.40}$$

которые бы диагонализовывали трансфер-матрицы $T(\theta)$:

$$T(\theta)|I; \theta_1, \ldots, \theta_N\rangle = \Lambda_I(\theta; \theta_1, \ldots, \theta_N)|I; \theta_1, \ldots, \theta_N\rangle, \tag{11.41}$$

а затем решить уравнения

$$\mathrm{e}^{imL \operatorname{sh} \theta_i} \Lambda_I(\theta_i; \theta_1, \ldots, \theta_N) = \pm 1. \tag{11.42}$$

Эта система уравнений представляет собой *первичную* систему уравнений Бете.

Диагонализация трансфер-матриц выполняется методом алгебраического анзаца Бете. Рассмотрим самый простой пример — модель синус-Гордона. В этом случае для системы солитонов имеем $S(0) = -P$ (в случае фермионов $S(0) = P$, но мы можем получить ту же -1 накладывая на фермионы граничное условие Невё—Шварца).

Оператор $L(\theta)$ представляет собой матрицу 2×2 во вспомогательном пространстве:

$$L(\theta) = \begin{pmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{pmatrix}, \qquad T(\theta) = A(\theta) + D(\theta). \tag{11.43}$$

Оператор $C(\theta)$ увеличивает топологическое число состояния на единицу, а $B(\theta)$ — уменьшает. Введем реперное состояние $|\Omega; \vec{\theta}\rangle$, состоящее только из солитонов с топологическим числом $+1$:

$$C(\theta)|\Omega; \vec{\theta}\rangle = 0. \tag{11.44}$$

Операторы A, D действуют на этом состоянии просто

$$A(\theta)|\Omega; \vec{\theta}\rangle = \prod_{i=1}^N a(\theta - \theta_i)|\Omega; \vec{\theta}\rangle, \qquad D(\theta)|\Omega; \vec{\theta}\rangle = \prod_{i=1}^N b(\theta - \theta_i)|\Omega; \vec{\theta}\rangle.$$

Заметим, что правая часть второго тождества обращается в нуль при $\theta = \theta_i$. Поэтому собственное значение

$$\Lambda_\Omega(\theta; \vec{\theta}) = \prod_{i=1}^N a(\theta - \theta_i) + \prod_{i=1}^N b(\theta - \theta_i)$$

имеет в важных для нас точках вид произведения

$$\Lambda_\Omega(\theta_i;\vec\theta) = \prod_{j=1}^N a(\theta_i - \theta_j). \tag{11.45}$$

Теперь построим состояния Бете

$$|\lambda_1,\dots,\lambda_n;\vec\theta\rangle = B(\tfrac{i\pi}{2}+\lambda_1)\cdots B(\tfrac{i\pi}{2}+\lambda_n)|\Omega;\vec\theta\rangle \tag{11.46}$$

с топологическим числом $N-2n$. Слагаемые $\frac{i\pi}{2}$ добавлены, чтобы собственные значения оператора «импульса» в спиновом пространстве $p(\lambda)$,

$$e^{ip(\lambda)} = \frac{b(\frac{i\pi}{2}+\lambda)}{a(\frac{i\pi}{2}+\lambda)} = -e^{i\Phi_{1/2}(\lambda)}, \qquad \Phi_x(\lambda) = -i\log\frac{\operatorname{sh}\frac{\lambda+i\pi x}{p}}{\operatorname{sh}\frac{\lambda-i\pi x}{p}},$$

были вещественны при вещественных λ_i. Состояния (11.46) являются собственными при выполнении *вторичной* системы уравнений Бете. Пусть $u_k = \frac{i\pi}{2}+\lambda_k$. Тогда

$$\prod_{i=1}^N \frac{b(u_k-\theta_i)}{a(u_k-\theta_i)} = \prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^n \frac{a(u_l-u_k)b(u_k-u_l)}{b(u_l-u_k)a(u_k-u_l)} \tag{11.47}$$

или

$$\prod_{i=1}^N \frac{\operatorname{sh}\frac{\frac{i\pi}{2}+\lambda_k-\theta_i}{p}}{\operatorname{sh}\frac{\frac{i\pi}{2}-\lambda_k+\theta_i}{p}} = \prod_{l=1}^n \frac{\operatorname{sh}\frac{\lambda_k-\lambda_l+i\pi}{p}}{\operatorname{sh}\frac{\lambda_k-\lambda_l-i\pi}{p}}. \tag{11.48}$$

При этом собственные значения

$$\Lambda_{\vec\lambda}(\theta;\vec\theta) = \prod_{i=1}^N a(\theta-\theta_i)\prod_{k=1}^n \frac{a(u_k-\theta)}{b(u_k-\theta)} + \prod_{i=1}^N b(\theta-\theta_i)\prod_{k=1}^n \frac{a(\theta-u_k)}{b(\theta)-u_k} \tag{11.49}$$

в интересующих нас точках тоже сводятся к первому слагаемому:

$$\Lambda_{\vec\lambda}(\theta_i;\vec\theta) = \prod_{j=1}^N a(\theta_i-\theta_j)\prod_{k=1}^n \frac{\operatorname{sh}\frac{\frac{i\pi}{2}-\lambda_k+\theta_i}{p}}{\operatorname{sh}\frac{\frac{i\pi}{2}+\lambda_k-\theta_i}{p}}. \tag{11.50}$$

Факторизованный вид собственных значений позволяет логарифмировать первичные уравнения Бете и получить систему уравнений вида:

$$\begin{gathered}
mL\operatorname{sh}\theta_i - \sum_{j=1}^N \phi(\theta_i-\theta_j) - \sum_{k=1}^n \Phi_{1/2}(\theta_i-\lambda_k) = 2\pi n_i, \qquad i=1,\dots,N,\\
\sum_{i=1}^N \Phi_{1/2}(\lambda_k-\theta_i) - \sum_{l=1}^n \Phi_1(\lambda_k-\lambda_l) = 2\pi\nu_k, \qquad k=1,\dots,n.
\end{gathered} \tag{11.51}$$

Здесь $\phi(\theta) = -i\log a(\theta)$, а числа n_i, ν_k являются целыми или полуцелыми в зависимости от четности чисел N и n. Система, конечно, сложная, но допускает столь же подробное исследование в термодинамическом пределе, как и обычная система уравнений Бете.