Лекция 10

Интегралы движения и матрицы рассеяния

Вернемся к формулам из лекции 5 для асимптотической волновой функции n частиц

$$\psi_{\beta_1 p_1,\dots,\beta_n p_n}(\alpha_1 x_1,\dots,\alpha_n x_n)=\sum_{\tau\in S_n}A^{\alpha_{\sigma_1}\dots\alpha_{\sigma_n}}_{\beta_1\ \ \dots\beta_n}[\tau]e^{i\sum_{i=1}^n p_{\tau_i}x_{\sigma_i}}$$

$$\text{при}\quad x_{\sigma_1}<x_{\sigma_2}<\dots<x_{\sigma_n},\quad |x_i-x_j|\gg R. \tag{10.1}$$

Мы говорили, что внешние значки β_i можно определить условием

$$A^{\alpha_1\dots\alpha_n}_{\beta_1\dots\beta_n}[\mathrm{id}]=\prod_{i=1}^n\delta^{\alpha_i}_{\beta_i}. \tag{10.2}$$

Эти условия выбраны так, чтобы значки β_i совпадали со значками внутренних состояний α_i частиц во входящем канале при условии $p_1>p_2>\dots>p_n$. В остальных случаях матричные элементы по этим векторам будут аналитическими продолжениями «правильных» матричных элементов. Эта аналитичность нам сегодня пригодится.

Эти формулы верны не только для $O(N)$-модели, но для любой системы бозонных частиц. Обратим внимание на то, как меняются волновые функции при перестановке индексов $\beta_i p_i\leftrightarrow\beta_j p_j$:

$$\psi_{\dots,\beta_i p_i,\beta_{i+1}p_{i+1},\dots}(\alpha_1 x_1,\dots,\alpha_n x_n)=\sum_{\beta'_i\beta'_{i+1}}S(p_i,p_{i+1})^{\beta'_i\beta'_{i+1}}_{\beta_i\beta_{i+1}}\psi_{\dots,\beta'_{i+1}p_{i+1},\beta'_i p_i,\dots}(\alpha_1 x_1,\dots,\alpha_n x_n). \tag{10.3}$$

Поскольку вывод этой формулы составляет задачу 5 лекции 5, я не привожу здесь вывод полностью. Для ясности приведу вывод для волновой функции двух частиц. Если $x_1<x_2$, имеем

$$\begin{aligned}\psi_{\beta_1 p_1,\beta_2 p_2}(\alpha_1 x_1,\alpha_2 x_2)&=\delta^{\alpha_1}_{\beta_1}\delta^{\alpha_2}_{\beta_2}e^{ip_1x_1+ip_2x_2}+S(p_1,p_2)^{\alpha_2\alpha_1}_{\beta_1\beta_2}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}\\&=\sum_{\beta'_1\beta'_2}S(p_1,p_2)^{\beta'_1\beta'_2}_{\beta_1\beta_2}\left(\delta^{\alpha_1}_{\beta'_2}\delta^{\alpha_2}_{\beta'_1}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}+S^{-1}(p_1,p_2)^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta'_1\beta'_2}e^{ip_1x_1+ip_2x_2}\right)\\&=\sum_{\beta'_1\beta'_2}S(p_1,p_2)^{\beta'_1\beta'_2}_{\beta_1\beta_2}\left(\delta^{\alpha_1}_{\beta'_2}\delta^{\alpha_2}_{\beta'_1}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}+S(p_2,p_1)^{\alpha_2\alpha_1}_{\beta'_2\beta'_1}e^{ip_1x_1+ip_2x_2}\right)\\&=\sum_{\beta'_1\beta'_2}S(p_1,p_2)^{\beta'_1\beta'_2}_{\beta_1\beta_2}\psi_{\beta'_2p_2,\beta'_1p_1}(\alpha_1x_1,\alpha_2x_2).\end{aligned}$$

Будем считать, что волновая функция $\psi_{\beta_1p_1,\dots,\beta_np_n}$ задает состояние $|p_1,\dots,p_n\rangle_{\beta_1\dots\beta_n}$ с точностью до вещественного симметричного по импульсам нормировочного множителя. Поскольку нас интересуют релятивистские теории, перейдем от импульсов к быстротам: $p_i=m_i\operatorname{ch}\theta_i$. Тогда

$$|\dots,\theta_i,\theta_{i+1},\dots\rangle_{\dots\beta_i\beta_{i+1}\dots}=\sum_{\beta'_i\beta'_{i+1}}S(\theta_i-\theta_{i+1})^{\beta'_i\beta'_{i+1}}_{\beta_i\beta_{i+1}}|\dots,\theta_{i+1},\theta_i,\dots\rangle_{\dots\beta'_{i+1}\beta'_i\dots}. \tag{10.4}$$

Это равенство можно записать короче. Напомню, что мы считаем все частицы одной массы одной частицей. Пусть $V^{(\nu)}$ — пространство состояний частицы сорта ν, а векторы $e^\beta_{(\nu)}$ являются проекциями состояний β на пространство V_ν. Используя обозначение

$$|\nu_1\theta_1,\dots,\nu_N\theta_n\rangle=\sum_{\beta_1,\dots,\beta_n}|\theta_1,\dots,\theta_n\rangle_{\beta_1\dots\beta_n}e^{\beta_1}_{(\nu_1)}\otimes\dots\otimes e^{\beta_n}_{(\nu_n)}, \tag{10.5}$$

получаем

$$|\dots,\nu_i\theta_i,\nu_{i+1}\theta_{i+1},\dots\rangle=S^{(\nu_i,\nu_{i+1})}_{i,i+1}(\theta_i-\theta_{i+1})|\dots,\nu_{i+1}\theta_{i+1},\nu_i\theta_i,\dots\rangle. \tag{10.6}$$

Введем «операторы рождения» $V^+_\beta(\theta)$ и «уничтожения» $V^\beta(\theta)$:[1]

$$
\begin{aligned}
V^+_\beta(\theta)|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n} &= |\theta,\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta\beta_1\ldots\beta_n},\\
V^\beta(\theta)|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n} &= \sum_{k=1}^n 2\pi\delta(\theta-\theta_k)\\
&\qquad\times\sum_{\substack{\beta'_1,\ldots,\beta'_{k-1}\\ \alpha_1,\ldots,\alpha_k}}\delta^\beta_{\alpha_1}\delta^{\alpha_k}_{\beta_k}\prod_{i=1}^{k-1}S(\theta_i-\theta_k)^{\beta'_i\alpha_i}_{\beta_i\alpha_{i+1}}|\theta_1,\ldots,\hat\theta_k,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta'_1\ldots\beta'_{k-1}\hat\beta_k\beta_{k+1}\ldots\beta_n}.
\end{aligned}
\tag{10.7}
$$

Отсюда находим квадратичные соотношения

$$V^{\beta_1}(\theta_1)V^{\beta_2}(\theta_2)-\sum_{\beta'_1\beta'_2}S(\theta_1-\theta_2)^{\beta_1\beta_2}_{\beta'_1\beta'_2}V^{\beta'_2}(\theta_2)V^{\beta'_1}(\theta_1)=0, \tag{10.8a}$$

$$V^+_{\beta_1}(\theta_1)V^+_{\beta_2}(\theta_2)-\sum_{\beta'_1\beta'_2}S(\theta_1-\theta_2)^{\beta'_1\beta'_2}_{\beta_1\beta_2}V^+_{\beta'_2}(\theta_2)V^+_{\beta'_1}(\theta_1)=0, \tag{10.8b}$$

$$V^{\beta_1}(\theta_1)V^+_{\beta_2}(\theta_2)-\sum_{\beta'_1\beta'_2}S(\theta_2-\theta_1)^{\beta'_2\beta_1}_{\beta_2\beta'_1}V^+_{\beta'_2}(\theta_2)V^{\beta'_1}(\theta_1)=2\pi\delta^{\beta_1}_{\beta_2}\delta(\theta_1-\theta_2). \tag{10.8c}$$

Алгебра с такими соотношениями называется *алгеброй Фаддеева—Замолодчикова.* Обратим внимание, что, с учетом условия кроссинг-симметрии (5.29), эти уравнения могут быть записаны в одну строчку

$$
\begin{aligned}
V^{\beta_1}(\theta_1)V^{\beta_2}(\theta_2)-\sum_{\beta'_1\beta'_2}S(\theta_1-\theta_2)^{\beta_1\beta_2}_{\beta'_1\beta'_2}V^{\beta'_2}(\theta_2)V^{\beta'_1}(\theta_1)&=2\pi C^{\beta_1\beta_2}\delta(\theta_1-\theta_2-i\pi)\\
&-2\pi\sum_{\beta'_1\beta'_2}C^{\beta'_1\beta'_2}S(-i\pi)^{\beta_1\beta_2}_{\beta'_1\beta'_2}\delta(\theta_1-\theta_2+i\pi),
\end{aligned}
\tag{10.9}
$$

если положить

$$V^+_\alpha(\theta)=\sum_\beta C_{\alpha\beta}V^\beta(\theta-i\pi). \tag{10.10}$$

Здесь $C_{\alpha\beta}$ — матрица CPT-преобразования, представляющая собой симметричную матрицу, для которой существует унитарная матрица U, такая что $UCU^t=1$. В уравнении (10.9) мы считаем, что переменные θ_i могут пробегать значения на двух (направленных, по соглашению, слева направо) прямых:

$$\theta_i\in\mathscr{C}_{\rightrightarrows}\equiv\mathbb{R}\cup(\mathbb{R}-i\pi). \tag{10.11}$$

Обратим внимание еще на один важный момент. Вообще говоря, матрица $S(i\pi)$ не обязана быть обратимой, так что матрица $S(-i\pi)$ может не существовать. Это случается, например, когда $S(0)=\pm P$ при размерности пространства внутренних состояний больше 1. Но произведение $S_{12}(-i\pi+\varepsilon)C_{12}$ имеет конечный предел при $\varepsilon\to0$. Например, для модели синус-Гордона и $O(N)$-моделей этот предел равен $-C_{12}$.

Пусть теперь $\hat I_s$ — локальный интеграл движения спина s, причем в выбранном базисе действие интегралов движения диагонализуется:

$$\hat I_s|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n}=I_s(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\beta_1\ldots\beta_n}|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\beta_1\ldots\beta_n},\qquad I_s(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\beta_1\ldots\beta_n}=\sum_{i=1}^n I_{s,\beta_i}e^{s\theta_i}. \tag{10.12}$$

Отсюда очевидно следуют коммутационные соотношения

$$[\hat I_s,V^+_\beta(\theta)]=I_{s,\beta}e^{s\theta}V^+_\beta(\theta),\qquad[\hat I_s,V^\beta(\theta)]=-I_{s,\beta}e^{s\theta}V^\beta(\theta). \tag{10.13}$$

[1]Здесь написаны формулы только для различных значений θ_i. Для совпадающих значений в случае «бозонной» статистики нужно добавить обычные множители (корни из чисел заполнения).

Согласие с условием кроссинг-симметрии в виде (10.10) накладывает на собственные значения ограничение

$$I_{s,\alpha}\delta^{\alpha}_{\alpha'} = (-1)^{s-1}\sum_{\beta} C^{\alpha\beta} I_{s,\beta} C_{\beta\alpha'}. \tag{10.14}$$

Отсюда немедленно следует

Теорема 10.1 *Если в лоренц-инвариантной модели имеется нейтральная частица или пара частица—античастица с недиагональной матрицей рассеяния, на которых интегралы движения диагонализуются, интегралы движения четных спинов имеют нулевые собственные значения на этих частицах. Как следствие, если в модели есть только частицы этих двух сортов, она не имеет интегралов движения четных спинов.*

Действительно, наличие нейтральной частицы 1 означает, что в подходящем базисе имеется блок 1×1 с матрицей $C = 1$ на нем. Следовательно, $I_{s,1} = (-1)^{s-1} I_{s,1}$. Следовательно, $I_{2n,1} = 0$.

Пусть теперь в системе имеется частица 1 и античастица $\bar{1}$ с $C = \sigma^1$ (в этом блоке), такие что матричный элемент $1 + \bar{1} \to \bar{1} + 1$ не равен нулю. Тогда $I_{s,1} = (-1)^{s-1} I_{s,\bar{1}}$. Рассмотрим процесс рассеяния частицы с быстротой θ_1 и античастицы с быстротой θ_2. Тогда до и после рассеяния собственные значения интегралов движения должны быть одинаковы:

$$I_{s,1}e^{s\theta_1} + I_{s,\bar{1}}e^{s\theta_2} = I_{s,\bar{1}}e^{s\theta_1} + I_{s,1}e^{s\theta_2}.$$

Это значит, что $I_{s,1} = I_{s,\bar{1}} = (-1)^{s-1} I_{s,1}$. Отсюда заключаем, что $I_{2n,1} = 0$.

Теперь мы видим причину, почему модель синус-Гордона имеет только интегралы движения нечетных спинов. Однако ограничения на спины интегралов движения могут иметь и другой характер: они могут быть связаны со связанными состояниями.

Посмотрим, как ведут себя интегралы движения на связанных состояниях. Вспомним формулу (8.45) и картинку к ней (8.44). Слиянию двух линий на картинке следует сопоставить слияние операторов V:

$$V^c(\theta) = \sum_{a,b} \Gamma^c_{ab} V^b(\theta - i\bar{u}^{\bar{a}}_{b\bar{c}}) V^a(\theta + i\bar{u}^{\bar{b}}_{\bar{c}a}). \tag{10.15}$$

Суммирование по a и b ведется только по внутренним состояниям частиц a и b соответственно. Из коммутационных соотношений (10.13) получаем

$$I_{s,c} = I_{s,a}e^{is\bar{u}^{\bar{b}}_{\bar{c}a}} + I_{s,b}e^{-is\bar{u}^{\bar{a}}_{b\bar{c}}}. \tag{10.16}$$

Дополнительные ограничения возникают, когда при последовательном построении связанных состояний какое-то связанное состояние совпадает с одной из «элементарных» частиц, из которых оно построено.

Приведем пример. Рассмотрим матрицу рассеяния первого бризера в модели синус-Гордона в специальной точке $\beta^2 = 4/5$:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta + \frac{2\pi i}{3})}{\operatorname{th}\frac{1}{2}(\theta - \frac{2\pi i}{3})}. \tag{10.17}$$

Мы хотим построить на основе этой S-матрицы модель, которая содержала бы эту частицу как элементарную. Разумеется, такая модель (если она возможна) будет редукцией модели синус-Гордона, так как ее пространство состояний будем меньше пространства состояний модели синус-Гордона. S-матрица (10.17) имеет полюс на физическом листе: $\theta = 2\pi i/3$, однако знак вычета этого полюса по переменной $u = -i\theta$ отрицательный. В модели синус-Гордона это значило, что этот полюс не отвечает связанному состоянию. Но модель синус-Гордона — унитарная в том смысле, что все ее состояния имеют положительную норму, а редуцированная модель не обязана быть унитарной. Поэтому предположим, что этому полюсу отвечает частица. Назовем ее 2. Нетрудно проверить, что масса частицы 2 равна массе M_1 первого бризера:

$$M_2 = 2M_1 \cos\frac{\pi}{3} = M_1,$$

а ее матрицы рассеяния с первым бризером и с собой совпадают с $S_{11}(\theta)$:

$$S_{21}(\theta) = S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi}{3}\right) S_{11}\left(\theta - \frac{i\pi}{3}\right) = S_{11}(\theta).$$

Вообще говоря, это не значит, что она совпадает с первым бризером, но если это не так, возникает следующее состояние, которое имеет ту же массу и матрицу рассеяния и т.д. Давайте замкнем спектр частиц на одной частице и *постулируем*, что в нашей теории связанное состояние двух частиц 1 является частицей 1: $2 = 1$. Уравнение (10.16) в этом случае имеет вид:

$$I_{s,1} = 2I_{s,1}\cos\frac{\pi s}{3}.$$

Отсюда заключаем, что интегралы движения отвечают только таким спинам, что $\cos\frac{\pi s}{3} = \frac{1}{2}$, то есть $s = \pm 1 \pmod 6$. Все эти спины нечетные, так что больше никаких ограничений мы не видим. Спектр спинов интегралов движения отвечает Φ_{12}-возмущениям минимальных конформных моделей. Возмущению какой именно модели отвечает эта теория рассеяния? Как правильно отвечать на этот вопрос, мы разберем в следующей лекции, а сейчас ограничимся эвристическим рассуждением.

Рассмотрим модель синус-Гордона. Как мы уже это делали на семинаре к лекции 2, разобьем действие следующим образом:

$$\mathscr{S}_0 = \int d^2x\left(\frac{(\partial_\mu\phi)^2}{8\pi} + \frac{\mu}{2}e^{-i\beta\phi}\right), \qquad \mathscr{S}_1 = \frac{\mu}{2}\int d^2x\, e^{i\beta\phi}. \tag{10.18}$$

и будем изучать теорию возмущений по $\mathscr{S}_1$. На семинаре мы уже убедились, что первый член описывает некоторую (вообще говоря, неунитарную) конформную теорию с центральным зарядом

$$c = 1 - 6\left(\frac{\sqrt{2}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Эта теория наверняка шире, чем минимальная конформная теория поля и каким-то образом содержит ее.[2] Сравнивая с (9.17), легко заключить, что $\alpha_+ = \beta/\sqrt{2}$, $\alpha_- = -\sqrt{2}/\beta$. Конформная размерность оператора возмущения $e^{i\beta\phi}$ в этой конформной теории поля равна

$$\Delta_{\mathrm{p}} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\beta} + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}\left(3\frac{\sqrt{2}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)^2 = \Delta_{13}. \tag{10.19}$$

Гипотеза состоит в том, что некоторые редукции модели синус-Гордона описывают Φ_{13}-возмущения конформных моделей. Поэтому S-матрицы возмущенных минимальных моделей можно получить из S-матриц модели синус-Гордона в подходящем базисе.

Вернемся к модели с матрицей рассеяния (10.17). Эта модель представляет собой редукцию модели синус-Гордона с $\beta^2 = 4/5$, то есть, как мы ожидаем, Φ_{13}-возмущения минимальной конформной модели с центральным зарядом $c = 1 - 6(\sqrt{5/2} - \sqrt{2/5})^2 = -22/5$. Это — минимальная модель $M(2,5)$, иначе именуемая моделью Ли—Янга. Эта модель содержит всего два примарных поля с размерностями

$$\Delta_{11} = \Delta_{14} = 0, \qquad \Delta_{12} = \Delta_{13} = -1/5.$$

Таким образом, в этой модели Φ_{13}-возмущение совпадает с Φ_{12}-возмущением, что объясняет спектр спинов интегралов движения.

Попробуем продолжить серию моделей с частицами, которые даются бризерным сектором модели синус-Гордона. Массы бризеров, как мы помним, даются формулой

$$M_n = 2M_{\mathrm{kink}}\sin\frac{\pi p n}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots, < 1/p, \qquad \beta^2 = 2\frac{p}{p+1}.$$

[2] Минимальные конформные теории поля получаются из них так называемой фельдеровской редукцией. Пространства состояний минимальных моделей находятся как когомологии некоторого сложно устроенного нильпотентного оператора.

Давайте продолжим спектр бризеров за предел $1/p$ и потребуем, чтобы спектр частиц после этого допускал замыкание на «правильные» бризеры. Это так, если $2/p$ — целое число. Тогда $M_n = M_{2/p-n}$. Тут возможны два случая. Если $2/p$ четно, это формально соответствует минимальной модели $M(1,1/p)$, обладающей сложными свойствами. Ее таблица Каца пуста, но в ней есть так называемые логарифмические операторы. В модели синус-Гордона такие модели отвечают безотражательным точкам, когда амплитуда отражения антисолитона на солитоне $c(\theta)=0$. Мы не будем рассматривать этот случай.

Изучим второй случай, отвечающий

$$\frac{2}{p} = 2N-1, \qquad N=2,3,\dots; \qquad M_n = M_{2N-1-n} = M_1 \frac{\sin\frac{\pi n}{2N-1}}{\sin\frac{\pi}{2N-1}} \quad (n=1,2,\dots,2N-2). \tag{10.20}$$

Этот случай отвечает, как мы ожидаем, Φ_{13}-возмущению «ленточных» минимальных моделей $M(2, 2N+1)$, примарные операторы $\Phi_{1n} = \Phi_{1,2N+1-n}$ которых имеют размерности

$$\Delta_{1n} = -\frac{(n-1)(2N-n)}{2(2N+1)} \quad (n=1,2,\dots,2N). \tag{10.21}$$

Нетрудно показать, что

$$S_{n,2N-1-n'}(\theta) = S_{nn'}(\theta), \tag{10.22}$$

что согласуется с отождествлением частиц $n = (2N-1-n)$. Посмотрим, как это отождествление ограничивает набор интегралов движения. Как видно из спектра масс, n-тая частица представляет собой связанное состояние частиц $(n-1)$ и 1 с параметрами

$$\bar u^1_{n,n-1} = \frac{\pi}{2N-1}, \qquad \bar u^{n-1}_{1n} = \frac{\pi(n-1)}{2N-1}. \tag{10.23}$$

Следовательно

$$I_{s,n} = I_{s,n-1}e^{i\pi s/(2N-1)} + I_{s,1}e^{-i\pi s(n-1)/(2N-1)} = I_{s,1}\sum_{k=1}^{n} e^{i\pi s(n+1-2k)/(2N-1)}$$
$$= I_{s,1} \times \begin{cases} \frac{\sin\frac{\pi s n}{2N-1}}{\sin\frac{\pi s}{2N-1}}, & s \neq 0 \pmod{2N-1}; \\ n(-1)^{s(n+1)/(2N-1)}, & s = 0 \pmod{2N-1}. \end{cases}$$

Потребовав $I_{s,2N-2} = I_{s,1}$, получаем, что $s \neq 0 \pmod{2N-1}$ и $(-1)^{s-1}=1$, то есть спины нечетны и не кратны $2N-1$. Это соответствует спектру Φ_{13}-возмущений «ленточных» моделей, описанному в прошлой лекции.

Хотя мы рассматривали очень частные модели, наши рассуждения вполне достаточны для доказательства следующей теоремы:

Теорема 10.2 *Если теория содержит нейтральную частицу обладающую Φ^n-свойством, то есть, если имеется цепочка последовательных $n-2$ слияний:*

$$1+1\to 2,\ 1+2\to 3,\ \dots,\ (n-2)+1\to 1,$$

причем каждая следующая частица 1 в цепочке отстоит от предыдущей на один и тот же угол u^2_{11} в одном и том же направлении,[3] *собственные значения интегралов движения спинов кратных n равны нулю на этой частице.*

Центральные заряды и конформные размерности в моделях, о которых мы до сих пор говорили, отрицательны, так что модели неунитарны. Попробуем изучить какую-нибудь унитарную модель. Рассмотрим конформную модель $M(3,4)$ $(c=1/2)$, отвечающую скейлинговому пределу модели Изинга. В этой модели в симметричном секторе имеется три примарных оператора:

$$\Phi_{11}=\Phi_{23}=1:\ \Delta_{11}=0; \qquad \Phi_{21}=\Phi_{13}=\varepsilon:\ \Delta_{13}=\frac{1}{2}; \qquad \Phi_{12}=\Phi_{22}=\sigma:\ \Delta_{12}=\frac{1}{16}. \tag{10.24}$$

[3] Это значит, что все слияния связаны с одним и тем же полюсом в матрице $S_{11}(\theta)$, входящей в каждую матрицу $S_{k1}(\theta)$ с наименьшей мнимой частью.

Оператор ε принято называть энергетическим оператором, хотя, строго говоря, он отвечает плотности энтропии магнетика. В представлении свободными фермионами это оператор $\bar\psi\psi$, а коэффициент при нем есть масса фермиона, которая, как известно, пропорциональна $T-T_c$. Оператор σ пропорционален намагниченности и коэффициент при нем пропорционален внешнему магнитному полю. То есть, общее возмущение теории имеет (в эвклидовом пространстве) вид:[4]

$$\mathscr{S}=\mathscr{S}_{M(3,4)}+\tau\int d^2x\,\varepsilon(x)-h\int d^2x\,\sigma(x),\qquad \tau\sim\frac{T-T_c}{T_c},\qquad h\sim H_{\text{ext}}.$$

Такая общая теория не является интегрируемой, поскольку не имеет высших интегралов движения. В то же время по-отдельности теории с $h=0$ (температурное возмущение) и $\tau=0$ (возмущение внешним магнитным полем) интегрируемы.

С другой стороны мы знаем, что модель Изинга соответствует классической теории Ландау со свободной энергией

$$F[\sigma]=\int d^2x\,\left(\frac{g}{2}(\nabla\sigma)^2-h\sigma+\frac{a\tau\sigma^2}{2}+\frac{b\sigma^4}{4!}+\cdots\right). \tag{10.25}$$

Теория Ландау является теорией среднего поля и теряет применимость в достаточно малой окрестности критической точки (флуктуационной области). Но свободную энергию (10.25) можно использовать в качестве «затравочного действия» для флуктуационной теории.

Рассмотрим сначала температурное возмущение. Теория Ландау здесь не очень полезна. Зато имеется точное и явное решение, сводящее теорию к свободному майорановским фермиону с эвклидовым действием $S[\psi]=\frac12\int d^2x\,\bar\psi(i\hat\partial+m)\psi$. Соответственно, если описывать частицы бозонным полем σ, матрица рассеяния будет равна $S(\theta)=-1$. Интегралы движения выражаются явно через фермионное поле (см. задачу к предыдущей лекции).

Теперь рассмотрим возмущение магнитным полем [16]. Размерность константы связи h равна $2-1/8=15/8$. Так как в теории больше нет размерных постоянных, массы частиц пропорциональны $h^{8/15}$. Пусть m_1 — масса самой легкой частицы 1. Предположим, что это — нейтральная частица, связанная с флуктуациями параметра порядка. Вспомним, что спины интегралов движения модели равны

$$s=1,7,11,13,17,19,23,29\pmod{30}. \tag{10.26}$$

Обратим внимание, что в этом спектре отсутствуют спины кратные 3. Это может говорить о том, что частица обладает Φ^3-свойством в согласии с теорией Ландау. Действительно, при $\tau=0$ параметр порядка σ в свободной энергии Ландау имеет минимум в точке $\sigma=\sigma_0=(6h/b)^{1/3}$. Вблизи минимума свободную энергию можно разложить по $\varphi=\sigma-\sigma_0$:

$$F[\sigma_0+\varphi]=\text{const}+\int d^2x\,\left(\frac{g}{2}(\nabla\varphi)^2+\frac{b^{1/3}(6h)^{2/3}\varphi^2}{4}+h\varphi^3+\frac{b\varphi^4}{4!}+\cdots\right).$$

Заметим, что критические индексы при $T=T_c$ в теории Ландау не слишком сильно отличаются от точных критических индексов (что не так при $T\neq T_c$).

Кроме того, в спектре отсутствуют спины кратные 5. Для того, чтобы выполнялось Φ^5-свойство необходимо, чтобы была еще одна частица 2, которая была бы связанным состоянием $1+1$, и при этом частица 1 была бы связанным состоянием $2+2$. Из (10.16) находим уравнения

$$I_{s,2}=2I_{s,1}\cos s\bar u^1_{21},\qquad I_{s,1}=2I_{s,2}\cos s\bar u^2_{12}$$

для всех s из (10.26). Отсюда

$$4\cos s\bar u^1_{21}\cos s\bar u^2_{12}=1.$$

При условии $2\cos\bar u^1_{21}=m_2/m_1>1$ эта система уравнений имеет решение

$$\bar u^1_{21}=\frac{\pi}{5},\qquad \bar u^2_{12}=\frac{2\pi}{5}. \tag{10.27}$$

[4]В пространстве Минковского только меняются знаки перед τ и h.

Отсюда находим
$$\frac{m_2}{m_1} = 2\cos\frac{\pi}{5} \simeq 1.618. \tag{10.28}$$
Теперь нам нужно найти S-матрицу $S_{11}(\theta)$, удовлетворяющую обычным условиям $S_{11}(\theta) = S_{11}(i\pi-\theta) = S_{11}^{-1}(-\theta)$ и условию
$$S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi}{3}\right) S_{11}\left(\theta - \frac{i\pi}{3}\right) = S_{11}(\theta), \tag{10.29}$$
как и для модели Ли—Янга, но при этом также имеющую полюс при $-i\theta = \frac{2\pi}{5}$ с положительным вычетом. Из (10.29) немедленно следует, что S-матрица имеет полюсы при $-i\theta = \frac{\pi}{15}, \frac{14\pi}{15}$ от первого сомножителя, причем второй (возникающий в силу кроссинг-симметрии) полюс должен иметь отрицательный вычет, чтобы не было частиц меньшей массы. Возможные полюсы $-i\theta = \frac{11\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}$ от второго сомножителя сокращаются нулями от первого сомножителя:
$$S_{11}\left(\frac{11\pi i}{15} + \frac{i\pi}{3}\right) = S_{11}\left(i\pi + \frac{i\pi}{15}\right) = S_{11}\left(-\frac{i\pi}{15}\right) = S_{11}^{-1}\left(\frac{i\pi}{15}\right) = 0.$$
Нетрудно подобрать S_{11} в виде
$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th}\frac{\theta+2\pi i/3}{2}\operatorname{th}\frac{\theta+2\pi i/5}{2}\operatorname{th}\frac{\theta+\pi i/15}{2}}{\operatorname{th}\frac{\theta-2\pi i/3}{2}\operatorname{th}\frac{\theta-2\pi i/5}{2}\operatorname{th}\frac{\theta-\pi i/15}{2}}. \tag{10.30}$$
Полюс в точке $-i\theta = \frac{\pi}{15}$ имеет положительный вычет, и, таким образом, в системе имеется еще одна частица 3:
$$\bar u_{31}^1 = \frac{\pi}{30}, \qquad \frac{m_3}{m_1} = 2\cos\frac{\pi}{30} \simeq 1.989. \tag{10.31}$$
Далее, амплитуда рассеяния
$$S_{12}(\theta) = S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi}{5}\right) S_{11}\left(\theta - \frac{i\pi}{5}\right) \tag{10.32}$$
имеет полюсы в точках $-i\theta = \frac{4\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{7\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}$. Первые три легко отождествляются с u_{12}^a, $a = 1, 2, 3$. Последний соответствует новой частице 4 массы
$$\frac{m_4}{m_1} = 4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{7\pi}{30} \simeq 2.405. \tag{10.33}$$
Продолжая процедуру дальше, можно найти еще четыре частицы с массами
$$\begin{aligned} &\frac{m_5}{m_1} = 4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{15} \simeq 2.956, \qquad &\frac{m_6}{m_1} = 4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{30} \simeq 3.218,\\ &\frac{m_7}{m_1} = 8\cos^2\frac{\pi}{5}\cos\frac{7\pi}{30} \simeq 3.891, \qquad &\frac{m_8}{m_1} = 8\cos^2\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{15} \simeq 4.783. \end{aligned} \tag{10.34}$$
Частицы 5 и 6 появляются как связанные состояния $2+2$, частица 7 появляется в канале $3+3$, а частица 8 — в канале $4+4$.

Задачи

1. Проверьте, что соотношения (10.8) могут быть записаны в виде (10.9).

2. Покажите, что определение (10.15) согласуется с уравнением (8.45) для матрицы рассеяния связанных состояний.

3. Рассмотрите модель синус-Гордона в безотражательных точках $p = 1/N$. Покажите, что спектр разрешенных спинов интегралов движения состоит из всех нечетных значений s и значений $s = N \pmod{2N}$: $s \in (2\mathbb{Z}+1) \cup N(2\mathbb{Z}+1)$.

4. Рассмотрите теорию с парой частица—античастица $(1, \bar{1})$ массы m с матрицей рассеяния

$$S_{11} = \frac{\operatorname{sh}(\theta/2 - i\pi g)}{\operatorname{sh}(\theta/2 + i\pi g)}, \qquad S_{1\bar{1}}(\theta) = S_{11}(i\pi - \theta). \tag{10.35}$$

Найдите спектр интегралов движения этой теории. Найдите отношения $I_{s,\bar{1}}/I_{s,1}$ для этих интегралов движения. Покажите, что матрица рассеяния (10.35) в первом порядке по теории возмущений совпадает с матрицей рассеяния теории с действием (в пространстве Минковского) *комплексной модели синус-Гордона*:

$$\mathscr{S}[\chi, \bar{\chi}] = \int \frac{d^2x}{4\pi} \left(\frac{\partial_\mu \chi \, \partial^\mu \bar{\chi}}{1 + g\bar{\chi}\chi} - m^2 \bar{\chi}\chi \right). \tag{10.36}$$

(На самом деле, после подходящей перенормировки массы и константы связи, выражение (10.35) дает точную S-матрицу этой теории.)

5*. Снова рассмотрим S-матрицу (10.35), но при значениях константы связи $-1 < g < 0$. В этом случае S-матрица имеет полюс при $-i\theta = \pi|g|$ с положительным вычетом. Найдите спектр связанных состояний, порожденных из частиц 1 и $\bar{1}$. При целых значениях величины $-g^{-1} = N \geq 2$ спектр частиц содержит пары частиц одинаковой массы и равного по модулю N заряда. Покажите, что при отождествлении частиц в этих парах теория рассеяния самосогласованна ($\mathbb{Z}_N$*-симметричная модель Изинга*). Найдите спектр спинов интегралов движения в этой теории.