Лекция 7

Решение модели Тирринга методом анзаца Бете: построение собственный состояний

В этой лекции мы обсудим решение массивной модели Тирринга

$$S^{MT}[\psi,\bar\psi]=\int d^2x\,\left(\bar\psi(i\hat\partial-m_0)\psi-\frac{\pi g}{2}(\bar\psi\gamma^\mu\psi)^2\right) \tag{7.1}$$

методом анзаца Бете (см. книгу [13] и ссылки в ней). Напомним, что гамма-матрицы можно записать в виде

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix},\qquad \gamma^0=\begin{pmatrix} & -i\\ i & \end{pmatrix}=\sigma^2,\qquad \gamma^1=\begin{pmatrix} & i\\ i & \end{pmatrix}=i\sigma^1,\qquad \gamma^3=\gamma^0\gamma^1=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}=\sigma^3.$$

Гамильтониан модели Тирринга имеет вид

$$H=\int dx\,\left(-i\psi^+\sigma^3\partial_x\psi+m_0\psi^+\sigma^2\psi+2\pi g\psi_+^+\psi_-^+\psi_-\psi_+\right) \tag{7.2}$$

с коммутационными соотношениями

$$\psi_{\alpha'}^+(x')\psi_\alpha(x)+\psi_\alpha(x)\psi_{\alpha'}^+(x')=\delta_{\alpha'\alpha}\delta(x'-x), \tag{7.3}$$

причем импульс P и оператор фермионного числа Q имеют вид

$$P=-i\int dx\,\psi^+\partial_x\psi,\qquad Q=\int dx\,\psi^+\psi. \tag{7.4}$$

Давайте вспомним картину Дирака. Спектр $\epsilon^2-p^2=m^2$ имеет две ветви: $\epsilon=\pm\sqrt{p^2+m^2}$. Согласно принципу Паули в одном состоянии может находиться одно возбуждение. Состояние системы, в котором все одночастичные состояния вакантны, мы будем называть «голым вакуумом» или *псевдовакуумом.* Если начать заполнять состояния с отрицательной энергией фермионами, энергия системы будет уменьшаться. Поэтому псевдовакуум не является основным состоянием системы. Основное состояние (физический вакуум) получится, когда мы заполним все состояния отрицательной энергии («море Дирака»). «Элементарные возбуждения» над псевдовакуумом бы будем называть *псевдочастицами.* Попробуем формализовать эту процедуру.

Рассмотрим сначала случай свободных фермионов $g=0$. Обозначим через $|\Omega\rangle$ состояние, удовлетворяющее условиям

$$\psi_\alpha(x)|\Omega\rangle=0,\qquad \langle\Omega|\psi_\alpha^+(x)=0. \tag{7.5}$$

Введем волновую функцию состояния N псевдочастиц:

$$|\chi_N\rangle=\int d^Nx\,\chi^{\alpha_1\dots\alpha_N}(x_1,\dots,x_N)\psi_{\alpha_N}^+(x_N)\dots\psi_{\alpha_1}^+(x_1)|\Omega\rangle. \tag{7.6}$$

Состояния такого вида являются собственными векторами оператора Q:

$$Q|\chi_N\rangle=N|\chi_N\rangle.$$

Таким образом, полное пространство состояний $\mathcal{H}$ распадается в сумму по собственным значениям Q:

$$\mathcal{H}\simeq\bigoplus_{N=0}^{\infty}\mathcal{H}_N,\qquad v\in\mathcal{H}_N\Leftrightarrow Qv=Nv. \tag{7.7}$$

Оператор фермионного числа в этой картине становится оператором числа псевдочастиц.

Действие $\hat H_N$ гамильтониана на волновую функцию $\chi^{\alpha_1\dots\alpha_N}(x_1,\dots,x_N)$, определенное уравнением

$$H|\chi_N\rangle=\int d^Nx\,(\hat H_N\chi)^{\alpha_1\dots\alpha_N}(x_1,\dots,x_N)\psi_{\alpha_N}^+(x_N)\dots\psi_{\alpha_1}^+(x_1)|\Omega\rangle, \tag{7.8}$$

имеет вид

$$\hat{H}_N = \sum_{k=1}^{N} (-i\sigma_k^3 \partial_{x_k} + m_0 \sigma_k^2),$$

где σ_k^i действует на пространстве k-й частицы. При $N = 1$ собственное состояние имеет вид

$$\chi_\lambda(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda/2} \\ ie^{-\lambda/2} \end{pmatrix} e^{ixm_0 \operatorname{sh} \lambda}. \tag{7.9}$$

Многочастичное решение свободнополевого гамильтониана дается слэтеровским детерминантом:

$$\chi_{\lambda_1 \dots \lambda_N}^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_\sigma (-1)^\sigma \prod_{k=1}^{N} \chi_{\lambda_k}^{\alpha_{\sigma_k}}(x_{\sigma_k}). \tag{7.10}$$

Энергия N-частичного состояния равна

$$E_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_0 \sum_{k=1}^{N} \operatorname{ch} \lambda_k. \tag{7.11}$$

Какие значения могут принимать параметры λ? Если система находится в ящике размера L с циклическими граничными условиями, «быстроты» λ_k являются решениями уравнений

$$e^{im_0 L \operatorname{sh} \lambda_k} = 1 \qquad k = 1, \dots, N. \tag{7.12}$$

Следовательно,

$$\operatorname{sh} \lambda_k = \frac{2\pi n_k}{m_0 L}, \qquad n_k \in \mathbb{Z}.$$

Это значит, что λ_k находится либо на вещественной оси $\mathbb{R}$, либо на прямой $-i\pi + \mathbb{R}$. Последние решения соответствуют отрицательным энергиям. Очевидно, основным является состояние, в котором все состояния отрицательной энергии заполнены. Положим $\lambda_k = -i\pi + \xi_k$. Чтобы определить энергию вакуума, введем ультрафиолетовое обрезание

$$-\Theta < \xi_k < \Theta, \qquad \Theta \simeq \log \frac{\Lambda}{m_0}. \tag{7.13}$$

В термодинамическом пределе $L \to \infty$ энергия вакуума равна

$$E_0 = -L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} \rho(\xi) m_0 \operatorname{ch} \xi, \qquad \rho(\xi) = \frac{2\pi}{L} \left| \frac{dn}{d\xi} \right| = m_0 \operatorname{ch} \xi.$$

Конечно, энергия основного состояния сама по себе бессмысленна, интересны энергии возбужденных состояний. Возбуждению с быстротой θ соответствует дополнительный корень в точке

$$\lambda_k = \theta \qquad \text{(частица)},$$

или дырка (отсутствие корня) в точке

$$\lambda_k = \theta - i\pi \qquad \text{(античастица)}.$$

Поскольку корни уравнений (7.12) никак не связаны друг с другом, мы получаем систему невзаимодействующих частиц и античастиц с $p = (m \operatorname{ch} \theta, m \operatorname{sh} \theta)$, подчиняющихся принципу Паули, то есть то, что мы и должны были получить.

Теперь включим взаимодействие. Оператор взаимодействия в (7.2) коммутирует с оператором числа псевдочастиц Q. Поэтому оператор взаимодействия действует внутри пространств $\mathcal{H}_N$:

$$\hat{H}_N = \sum_{k=1}^{N} (-i\sigma_k^3 \partial_{x_k} + m_0 \sigma_k^2) + \pi g \sum_{k<l}^{N} \delta(x_k - x_l)(1 - \sigma_k^3 \sigma_l^3). \tag{7.14}$$

Конструкция из сигма-матриц в правой части есть

$$\frac{1}{2}(1 \otimes 1 - \sigma^3 \otimes \sigma^3)_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha_1'\alpha_2'} = \delta_{\alpha_1}^{\alpha_1'}\delta_{\alpha_2}^{\alpha_2'}\delta_{\alpha_1,-\alpha_2}, \tag{7.15}$$

то есть взаимодействуют между собой только частицы противоположных спинов.

Член взаимодействия в гамильтониане (7.14) плохо определен. Действительно, уравнение на собственные функции является дифференциальным уравнением первого порядка. Поэтому дельта-функциональный член приводит к скачку волновой функции на поверхности $x_k = x_l$. В то же время действие гамильтониана зависит от значений волновой функции как раз на этой поверхности. Дельта-функцию следует регуляризовать. Покажем, что ответ не зависит от регуляризации. Рассмотрим уравнение

$$f'(x) - c\delta(x)f(x) = g(x, f(x))$$

Регуляризуем дельта-функцию произвольной интегрируемой функцией $\delta_a(x)$ с носителем $[-a, a]$:

$$f'(x) - c\delta_a(x)f(x) = g(x, f(x)), \qquad \int_{-a}^{a} dx\, \delta_a(x) = 1. \tag{7.16}$$

Пусть

$$\delta_a(x) = \epsilon_a'(x).$$

Тогда

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = c\epsilon_a'(x) + \frac{g(x, f(x))}{f(x)}.$$

При достаточно малых a вторым слагаемым можно пренебречь, и мы имеем

$$f(x) = \mathrm{const}\, e^{c\epsilon_a(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f(+a) = e^{c(\epsilon_a(a) - \epsilon_a(-a))} f(-a) = e^c f(-a).$$

Отсюда в пределе $a \to 0$ получаем

$$f(+0) = e^c f(-0). \tag{7.17}$$

Одночастичные состояния опять описываются решениями (7.9). Рассмотрим двухчастичное состояние. Поскольку взаимодействие контактное (отлично от нуля только при $x_1 = x_2$), при $x_1 \neq x_2$ волновая функция представляет собой решение уравнений для свободных фермионов. Благодаря законам сохранения энергии и импульса рассеяние безотражательно, и волновая функция имеет вид

$$\chi_{\lambda_1\lambda_2}^{\alpha_1\alpha_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12}\chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1)\chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{21}\chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1)\chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{при } x_1 < x_2, \\ A_{21}\chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1)\chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{12}\chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1)\chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{при } x_1 > x_2. \end{cases} \tag{7.18}$$

Эта функция, очевидно, антисимметрична по (α_1, x_1), (α_2, x_2) и содержит (с точностью до нормировки) один свободный параметр A_{21}/A_{12}, который должен зависеть от константы связи g. Прямое вычисление с помощью (7.17) дает

$$\frac{A_{21}}{A_{12}} = R(\lambda_1 - \lambda_2), \qquad R(\lambda) = e^{i\Phi(\lambda)} = \frac{\mathrm{ch}\,\frac{\lambda - i\pi g}{2}}{\mathrm{ch}\,\frac{\lambda + i\pi g}{2}}. \tag{7.19}$$

Функция $R(\lambda)$ имеет смысл матрицы рассеяния псевдочастиц. Фазу рассеяния $\Phi(\lambda)$ удобно фиксировать условием кососимметричности

$$\Phi(-\lambda) = -\Phi(\lambda), \tag{7.20}$$

считая, что разрезы лежат на лучах $(i\pi(1 - |g|), i\infty)$, $(-i\pi(1 - |g|), -i\infty)$. Величины λ_k естественно определены по модулю $2\pi i$.

Заметим, что функция $R(\lambda)$ периодична по g с периодом 2. Так как мы будем строить вакуум, близкий к вакууму свободных фермионов, следует считать, что решение имеет смысл при

$$-1 < g < 1. \tag{7.21}$$

Теперь нетрудно построить общее N-частичное решение (*анзац Бете*):

$$\chi^{\alpha_1\ldots\alpha_N}_{\lambda_1\ldots\lambda_N}(x_1,\ldots,x_N)=\sum_\tau(-1)^{\sigma\tau}A_\tau\prod_{k=1}^N\chi^{\alpha_{\sigma_k}}_{\lambda_{\tau_k}}(x_{\sigma_k})\quad\text{при } x_{\sigma_1}<\ldots<x_{\sigma_N}. \tag{7.22}$$

Коэффициенты A удовлетворяют соотношениям

$$A_{\ldots,i+1,i,\ldots}=R(\lambda_i-\lambda_{i+1})A_{\ldots,i,i+1,\ldots}. \tag{7.23}$$

Наложим циклическое граничное условие

$$\chi(\ldots,x_k+L,\ldots)=\chi(\ldots,x_k,\ldots). \tag{7.24}$$

Получаем

$$e^{im_0L\operatorname{sh}\lambda_k}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne k}}^N R(\lambda_k-\lambda_l)=1. \tag{7.25}$$

Эта система уравнений на параметры λ_k называется системой *уравнений Бете*. Уравнения Бете — нелинейные уравнения с N неизвестными, причем, как ожидается, в физически интересных случаях $N\to\infty$. Тем не менее сделан огромный шаг: решение задачи сведено к решению системы алгебраических уравнений. Каждому решению этой системы, т. е. каждому набору (с точностью до перестановки) чисел $(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)$, удовлетворяющему (7.25), соответствует единственное состояние системы. Компоненты λ_k решения называются *корнями* уравнений Бете.

Логарифмируя уравнения Бете, найдем

$$m_0L\operatorname{sh}\lambda_k+\sum_{l=1}^N\Phi(\lambda_k-\lambda_l)=2\pi n_k, \tag{7.26}$$

причем энергия и импульс состояния равны

$$E_N(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)=m_0\sum_{i=1}^N\operatorname{ch}\lambda_i,\qquad P_N(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)=m_0\sum_{i=1}^N\operatorname{sh}\lambda_i. \tag{7.27}$$

Зададимся вопросом: как могут располагаться корни уравнений Бете? Естественно, подходят вещественные корни и корни на прямой $-i\pi+\mathbb{R}$. Общие комплексные корни могут располагаться парами симметрично относительно одной из прямых $\mathbb{R}$ и $-i\pi+\mathbb{R}$. Более подробный анализ показывает, что других типов решений не может быть.

Уравнения Бете сопоставляют каждому решению $(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)$ набор чисел $(n_1,\ldots,n_N)$, причем можно показать, что $n_k=n_l$, только если $\lambda_k=\lambda_l$. Из принципа Паули следует, что все λ_k должны быть различны и что, следовательно,

$$n_k\ne n_l\qquad(k\ne l). \tag{7.28}$$

Естественно предположить, что наименьшей энергии отвечает решение уравнений Бете с отрицательными энергиями псевдочастиц, т. е. с $\operatorname{Im}\lambda_k=-\pi$. Будем писать

$$\lambda_k=\xi_k-i\pi.$$

Чтобы минимизировать энергию, надо заполнить все состояния отрицательной энергии, поэтому надо, чтобы целые числа n_k шли через единицу:

$$n_{k+1}-n_k=\pm1, \tag{7.29}$$

причем удобно выбрать знак так, чтобы величина ξ_k росла с k. Поэтому примем

$$n_k=k_0-k$$

с некоторым k_0. Тогда

$$m_0 L \operatorname{sh} \xi_k = 2\pi(k - k_0) + \sum_{l=1}^{N} \Phi(\xi_k - \xi_l). \tag{7.30}$$

В термодинамическом пределе $L \to \infty$ расстояние между уровнями стремится к нулю и можно продифференцировать это уравнение по ξ_k. Мы получим

$$m_0 \operatorname{ch} \xi = \rho(\xi) + \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi}\, \Phi'(\xi - \xi')\rho(\xi'). \tag{7.31}$$

Здесь

$$\rho(\xi) = \frac{2\pi}{L}\frac{dk}{d\xi} \tag{7.32}$$

— спектральная плотность состояний, связанная с числом псевдочастиц N в состоянии формулой

$$\int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi}\, \rho(\xi) = \frac{N}{L}. \tag{7.33}$$

При $\Theta \to \infty$ величина m_0 стремиться к нулю при $g > 0$ и к бесконечности при $g < 0$.[1] При $g > 0$ есть несложный способ найти решение. Положим сначала $\Theta = \infty$ и $m_0 = 0$. Тогда получается однородное уравнение

$$\rho(\xi) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi'}{2\pi}\, \Phi'(\xi - \xi')\rho(\xi') = 0, \tag{7.34}$$

которое можно решать методом Фурье. Для любой величины $X(\xi)$ определим фурье-образ

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi}\, X(\xi)e^{i\xi\omega}. \tag{7.35}$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению (7.34), получаем

$$\left(1 + \tilde{\Phi}'(\omega)\right)\tilde{\rho}(\omega) = 0, \tag{7.36}$$

где

$$\tilde{\Phi}'(\omega) = -\frac{\operatorname{sh} \pi g\omega}{\operatorname{sh} \pi\omega}. \tag{7.37}$$

Формально, $\tilde{\rho}(\omega)$ должно быть линейной комбинацией дельта-функций с носителем в нулях выражения в скобках. Поскольку все эти нули $\omega = \pm i\alpha_k$ чисто мнимые, соответствующие дельта-функции производят экспоненциальные множители вида $e^{\mp\alpha_k\xi}$. Выберем наименее расходящийся вклад, отвечающий двум ближайшим к вещественной оси полюсам: $\alpha_1 = (1+g)^{-1}$. В силу симметрии модели относительно пространственных отражений интересующее нас решение должно быть четным:

$$\rho(\xi) = M \operatorname{ch} \frac{\xi}{1+g} \tag{7.38}$$

с некоторым коэффициентом M. Его можно найти, подставив это решение в уравнение (7.31) с конечными $\Theta \gg 1$ и m_0, и он оказывается конечным в масштабе физической массы модели.

Задачи

1. Получите (7.2) из (7.1). Выведите (7.14).
2. Выведите (7.19).
3. Проверьте (7.37) и найдите нули выражения $1 + \tilde{\Phi}'(\omega)$.

[1] Заметим, что эти рассуждения верны только при $g \geq -\frac{1}{3}$. При $g < -\frac{1}{3}$ вакуум перестраивается и содержит комплексные корни уравнений Бете. Тем не менее, окончательные результаты, касающиеся спектра частиц и матриц рассеяния оказываются верными вплоть до $g = -1$.

4. Покажите, что коэффициент в решении (7.38) имеет порядок величины $M = m_0 e^{\frac{g}{1+g}\Theta}$. Разберите оба случая $g > 0$ и $-\frac{1}{3} < g < 0$.

5*. Рассмотрите асимптотические волновые функции для фермионов вида (7.22) с некоторыми многокомпонентными одночастичными волновыми функциями $\chi_\lambda^\alpha(x)$ и с некоторой скалярной матрицей рассеяния $R(\lambda)$ общего вида, удовлетворяющей только условию унитарности $R(\lambda)R(-\lambda) = 1$. Покажите, что для каждой такой функции можно построить асимптотическую волновую функцию системы бозонов с матрицей рассеяния $S(\lambda) = -R(\lambda)$. Как нужно изменить циклические граничные условия, чтобы уравнения Бете для обеих теорий в точности совпадали? Как свойства теории зависят от знака $R(0)$?

Семинар 7

Комплексные решения уравнений Бете

Мы продолжим изучение (асимптотических) волновых функций Бете системы нерелятивистских бозонов без внутренних состояний для разностей импульсов вблизи полюса S-матрицы. Мы покажем, что связанным состояниями в пределе больших размеров отвечают так называемые струны комплексных корней Бете. Мы построим уравнения Бете для систем, содержащих такие струны.