

Лекция 2

Бозонизация модели Тирринга

Рассмотрим *массивную модель Тирринга* в пространстве Минковского:¹

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi - \frac{\pi g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 \right). \quad (2.1)$$

Здесь $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ — фермионное поле и дираковски сопряженное ему поле, γ^μ — матрицы Дирака, а $\hat{\partial} = \gamma^\mu\partial_\mu$. Матрицы Дирака удовлетворяют стандартным соотношениям

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu+} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0.$$

В двумерном случае гамма-матрицы можно записать в виде:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

В модели имеется сохраняющийся ток

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (2.3)$$

В случае $m = 0$ имеется еще один сохраняющийся ток

$$j_3^\mu = \bar{\psi}\gamma^3\gamma^\mu\psi = \epsilon^{\mu\nu}j_\nu. \quad (2.4)$$

В прошлый раз мы рассматривали модель синус-Гордона:

$$S^{SG}[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu\phi)^2}{8\pi} + \mu \cos \beta\phi \right). \quad (2.5)$$

В этой модели имеется топологическое число

$$q = \frac{\beta}{2\pi}(\phi(t, +\infty) - \phi(t, -\infty)), \quad (2.6)$$

принимаяющее целые значения. Его можно записать в виде

$$q = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_1\phi(t, x). \quad (2.7)$$

Это позволяет найти ток, ответственный за топологический заряд:

$$j_{\text{top}}^\mu = -\frac{\beta}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu\phi. \quad (2.8)$$

Этот ток удовлетворяет уравнению непрерывности $\partial_\mu j_{\text{top}}^\mu = 0$ в силу антисимметрии символа $\epsilon^{\mu\nu}$ и коммутативности производных.

В этой лекции мы убедимся, что массивная модель Тирринга и модель синус-Гордона эквивалентны [4, 5], причем параметры двух моделей связаны соотношениями

$$g = \beta^{-2} - 1, \quad (2.9)$$

$$\mu \sim mr_0^{\beta^2-1}, \quad (2.10)$$

а тирринговский ток совпадает с топологическим:

$$j^\mu = j_{\text{top}}^\mu. \quad (2.11)$$

Это исключительно важное соответствие, называемое *бозонизацией*. Уравнение (2.11) играет ключевую роль в бозонизации.

¹Множитель π перед константой g добавлен, чтобы упростить вид точных ответов.

Перепишем действие модели Тирринга, используя явный вид гамма-матриц:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x (i\psi_1^+(\partial_0 + \partial_1)\psi_1 + i\psi_2^+(\partial_0 - \partial_1)\psi_2 + im(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1) - 2\pi g\psi_1^+\psi_2^+\psi_2\psi_1).$$

Подставляя $z = x^1 - x^0$, $\bar{z} = x^1 + x^0$, получаем

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x (2i\psi_1^+\bar{\partial}\psi_1 - 2i\psi_2^+\partial\psi_2 + im(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1) - 2\pi g\psi_1^+\psi_2^+\psi_2\psi_1).$$

В этих компонентах тирринговский ток имеет вид:

$$j^z = -2\psi_2^+\psi_2, \quad j^{\bar{z}} = 2\psi_1^+\psi_1.$$

Рассмотрим случай $m = 0$, который допускает точное решение[3]. Начнем с решения классических уравнений движения

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\psi_1 &= -i\pi g\psi_2^+\psi_2\psi_1, \\ \partial\psi_2 &= i\pi g\psi_1^+\psi_1\psi_2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из сохранения тока $j_3^\mu = \epsilon^{\mu\nu}j_\nu$ следует, что ток j^μ можно представить в виде

$$j^\mu = -\frac{\beta}{2\pi} \partial^\mu \tilde{\phi}. \quad (2.13)$$

Здесь $\tilde{\phi}$ и ϕ связаны между собой соотношением дуальности (1.20), описанным в предыдущей лекции, и удовлетворяют уравнениям движения

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \partial_\mu \partial^\mu \tilde{\phi} = 0.$$

Общее решение этих уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z}), \\ \tilde{\phi}(x) &= \varphi(z) - \bar{\varphi}(\bar{z}), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\varphi(z)$ и $\bar{\varphi}(\bar{z})$ — произвольные функции только z и \bar{z} соответственно. Коэффициент в (2.13) произволен. Мы выбрали его так, чтобы формально выполнялось соотношение (2.11).

Мы видим, что безмассовая модель Тирринга эквивалентна свободному безмассовому бозону. Из соотношения (2.13) имеем

$$\frac{\beta}{2\pi} \partial\varphi = \psi_1^+\psi_1, \quad \frac{\beta}{2\pi} \bar{\partial}\bar{\varphi} = \psi_2^+\psi_2. \quad (2.15)$$

Если продолжать искать классическое решение, следует подставить эти функции в уравнения (2.12). Решая последние, находим

$$\psi_1(z, \bar{z}) = F_1(z)e^{-i\frac{g\beta}{2}\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_2(z, \bar{z}) = F_2(\bar{z})e^{i\frac{g\beta}{2}\varphi(z)} \quad (2.16)$$

с произвольными функциями F_i . Подставляя обратно в (2.15), получаем

$$\frac{\beta}{2\pi} \partial\varphi(z) = F_1(z)F_1^*(z), \quad \frac{\beta}{2\pi} \bar{\partial}\bar{\varphi}(\bar{z}) = F_2(\bar{z})F_2^*(\bar{z}), \quad (2.17)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение функции в предположении вещественности аргумента. Остается проинтегрировать эти уравнения и подставить результат в (2.16). В результате поля ψ_i выражаются через две функции F_i и две константы интегрирования.

Перейдем к квантовому случаю. Давайте искать решение уравнений (2.15) в виде

$$\psi_i(x) = \eta_i \sqrt{\frac{N_i}{2\pi}} e^{i\alpha_i\varphi(z) + i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_i^+(x) = \eta_i^{-1} \sqrt{\frac{N_i}{2\pi}} e^{-i\alpha_i\varphi(z) - i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad (2.18)$$

где η_i — алгебраические множители, необходимые, чтобы обеспечить фермионное поведение полей ψ_i . Оказывается, что решения можно найти, если положить

$$\eta_1\eta_2 = -\eta_2\eta_1. \quad (2.19)$$

Прежде всего, потребуем, чтобы поля $\psi_i(x)$ вели себя как фермионы. Рассмотрим произведение

$$\psi_i(x')\psi_j(x) = \eta_i\eta_j \frac{\sqrt{N_i N_j}}{2\pi} (z' - z)^{\alpha_i\alpha_j} (\bar{z}' - \bar{z})^{\beta_i\beta_j} e^{i\alpha_i\varphi(z') + i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z}') + i\alpha_j\varphi(z) + i\beta_j\bar{\varphi}(\bar{z})}. \quad (2.20)$$

Это выражение хорошо продолжается в эвклидову область. Из требования антикоммутируемости легко получить, что

$$\alpha_i^2 - \beta_i^2 \in 2\mathbb{Z} + 1, \quad \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 \in 2\mathbb{Z}. \quad (2.21)$$

Из (2.20) видно, что произведения вроде $\psi_1^+\psi_1$ плохо определены. Давайте *определим* эти произведения следующим образом. Рассмотрим другое произведение:

$$\psi_1^+(x')\psi_1(x) = \frac{N_1}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1^2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1^2} (1 - i\alpha_1(z' - z)\partial\phi(x) - i\beta_1(\bar{z}' - \bar{z})\bar{\partial}\phi(x) + \dots). \quad (2.22)$$

Усредним это произведение по окружности $|z' - z|^2 = r_0^2$ и будем считать r_0 малым. Старший член в разложении по r_0 примем за $\psi_1^+(x)\psi_1(x)$. Предположим, что

$$\alpha_1^2 - \beta_1^2 = 1. \quad (2.23)$$

Тогда первый и третий члены в разложении (2.22) при усреднении обратятся в нуль. Старшим ненулевым членом будет второй:

$$N_1 r_0^{-2\beta_1^2} \left(\frac{-i\alpha_1\partial\varphi}{2\pi} \right).$$

Его мы и отождествляем с $\psi_1^+\psi_1$. Мы видим, что если бы мы потребовали буквальной эрмитовой сопряженности ψ и ψ^+ , множитель i в $-i\alpha_1\varphi(z)$ испортил бы нам эрмитовость оператора $\psi_1^+\psi_1$.

Сравнивая с (2.15), получаем

$$\beta = -ir_0^{-2\beta_1^2} N_1 \alpha_1. \quad (2.24)$$

Аналогично, полагая

$$\alpha_2^2 - \beta_2^2 = -1, \quad (2.25)$$

получим

$$\beta = -ir_0^{-2\alpha_2^2} N_2 \beta_2. \quad (2.26)$$

Теперь рассмотрим уравнения движения (2.12). Подставляя (2.15) и (2.18), получим

$$\begin{aligned} i\beta_1\bar{\partial}\bar{\varphi}e^{i\alpha_1\varphi+i\beta_1\bar{\varphi}} &= -i\frac{g\beta}{2}\bar{\partial}\bar{\varphi}e^{i\alpha_1\varphi+i\beta_1\bar{\varphi}}, \\ i\alpha_2\partial\varphi e^{i\alpha_2\varphi+i\beta_2\bar{\varphi}} &= i\frac{g\beta}{2}\partial\varphi e^{i\alpha_2\varphi+i\beta_2\bar{\varphi}}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\alpha_2 = -\beta_1 = \frac{g\beta}{2}, \quad (2.27)$$

что, конечно же, согласуется с классическим решением.

Чтобы зафиксировать коэффициенты α_i, β_i , нужно самосогласованно определить массовый член таким образом, чтобы он коммутировал с фермионным током

$$Q = \int df_\mu j^\mu, \quad (2.28)$$

где $df_\mu = \epsilon_{\mu\nu} dx^\nu$ — элемент одномерной поверхности. Рассмотрим разложение

$$\psi_2^+(x')\psi_1(x) = -\eta_1\eta_2^{-1} \frac{\sqrt{N_1 N_2}}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1\alpha_2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1\beta_2} \left(e^{i(\alpha_1-\alpha_2)\varphi(z) + i(\beta_1-\beta_2)\bar{\varphi}(\bar{z})} + \dots \right).$$

Первый член выживает при усреднении по углам, если

$$\alpha_1 \alpha_2 = \beta_1 \beta_2, \quad (2.29)$$

что согласуется с (2.23–2.27) и дает, кроме того,

$$\alpha_1 = -\beta_2. \quad (2.30)$$

Усредняя по углам, получаем определения для произведений

$$\begin{aligned} \psi_2^+ \psi_1 &= -\eta_1 \eta_2^{-1} \frac{\sqrt{N_1 N_2}}{2\pi} r_0^{-2\alpha_1 \alpha_2} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)\phi}, \\ \psi_1^+ \psi_2 &= -\eta_2 \eta_1^{-1} \frac{\sqrt{N_1 N_2}}{2\pi} r_0^{-2\alpha_1 \alpha_2} e^{-i(\alpha_1 - \alpha_2)\phi}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Проверим теперь, что так определенные операторы коммутируют с Q . Пусть $O(x)$ — локальный оператор. Вычислим коммутатор

$$\begin{aligned} [O(0), Q] &= \oint df_\mu j^\mu(x) O(0) = \oint dx^\nu \epsilon_{\mu\nu} j^\mu(x) O(0) = -\frac{\beta}{2\pi} \oint dx^\nu \epsilon_{\mu\nu} \partial^\mu \tilde{\phi}(x) O(0) \\ &= -\frac{\beta}{2\pi} \oint dx^\nu \epsilon_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\lambda} \partial_\lambda \phi(x) O(0) = \frac{\beta}{2\pi} \oint dx^\lambda \partial_\lambda \phi(x) O(0) = \frac{\beta}{2\pi} \Delta \phi(x) O(0), \end{aligned} \quad (2.32)$$

Здесь $\Delta \phi(x)$ — приращение поля $\phi(x)$ при обходе x вокруг нуля против часовой стрелки. Теперь применим эту формулу к оператору $O(x) = e^{i\alpha\varphi(z) + i\alpha'\bar{\varphi}(\bar{z})}$:

$$\begin{aligned} [e^{i\alpha\varphi(0) + i\alpha'\bar{\varphi}(0)}, Q] &= \frac{\beta}{2\pi} \Delta(\varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})) e^{i\alpha\varphi(0) + i\alpha'\bar{\varphi}(0)} \\ &= \frac{i\beta}{2\pi} \Delta \left(\alpha \log \frac{1}{z} + \alpha' \log \frac{1}{\bar{z}} \right) e^{i\alpha\varphi(0) + i\alpha'\bar{\varphi}(0)} = \beta(\alpha - \alpha') e^{i\alpha\varphi(0) + i\alpha'\bar{\varphi}(0)}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Коммутатор $[Q, O(x)] = 0$, если $\alpha = \alpha'$ и, следовательно, $O(x) = e^{i\alpha\phi(x)}$. Очевидно, это условие выполнено для операторов, определенных в (2.31).

Теперь зафиксируем параметр β . Для этого положим $O(x) = \psi_i(x)$ в (2.33). Так как операторы ψ_i имеют фермионный заряд -1 , имеем

$$\psi_i(0) = [\psi_i(0), Q] = \beta(\alpha_i - \beta_i) \psi_i(0) = \beta(\alpha_1 + \alpha_2) \psi_i(0)$$

Следовательно,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta^{-1}, \quad (2.34)$$

откуда немедленно получаем

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta \quad (2.35)$$

и

$$\begin{aligned} \alpha_1 = -\beta_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} + \beta \right), \\ \alpha_2 = -\beta_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} - \beta \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Подставляя ответ в (2.27), получаем (2.9).

Из (2.24), (2.26) находим

$$N_1 = -N_2 = i r_0^{\frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2\beta^2} - 1} \frac{2\beta^2}{\beta^2 + 1}, \quad (2.37)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} -i\psi_2^+ \psi_1 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} (i\eta_1 \eta_2^{-1}) e^{i\beta\phi}, \\ i\psi_1^+ \psi_2 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} (i\eta_1 \eta_2^{-1})^{-1} e^{-i\beta\phi}. \end{aligned}$$

Так как на бесконечной плоскости суммарный «заряд» должен быть равен нулю, операторы $e^{i\beta\phi}$ и $e^{-i\beta\phi}$ должны встречаться в равных количествах для корреляционных функций, полиномиальных по $\varphi, \bar{\varphi}$. Поэтому множители $(i\eta_1\eta_2^{-1})^{\pm 1}$ тоже сократятся. В более общем случае их можно опустить, переопределив операторы:

$$(i\eta_1\eta_2^{-1})^{\alpha/\beta} e^{i\alpha\phi} \rightarrow e^{i\alpha\phi}.$$

Тогда имеем

$$i(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1) = \frac{2}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} \cos \beta\phi, \quad (2.38)$$

откуда находим (2.10).

Строго говоря, пока мы нашли точное решение только для безмассовой модели Тирринга. Однако из наших рассуждений следует, что теория возмущений по члену $m\bar{\psi}\psi$ для модели Тирринга и теория возмущений по $\cos \beta\phi$ для модели синус-Гордона совпадают, что дает сильное основание в пользу совпадения теорий [4, 5]. Отметим, что константа связи g в модели Тирринга не перенормируется, в то время как «масса» m не является физической величиной и существенно перенормируется. Это связано с тем, что массовый член $\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1$ имеет масштабную размерность β^2 из-за переопределения произведения полей. Измерима константа μ модели синус-Гордона, причем

$$\mu \sim m_{\text{phys}}^{2-\beta^2}, \quad m \sim m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}}r_0)^{1-\beta^2} = m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}}r_0)^{\frac{g}{1+g}}, \quad (2.39)$$

где m_{phys} — масса физических возбуждений (например, тирринговских фермионов) в теории. Коэффициент пропорциональности между параметром μ и $m_{\text{phys}}^{2-\beta^2}$ известен точно [6].

Остается еще один вопрос: чему соответствуют тирринговские фермионы в модели синус-Гордона? Из равенства между топологическим и фермионным токами можно заключить, что они соответствуют кинкам — нетривиальным возбуждениям с топологическими числами $q = \pm 1$.

Задачи

1. Докажите, что в безмассовой модели Тирринга ток (2.4) сохраняется. Найдите дивергенцию этого тока при ненулевой массе.

2. В модели свободных безмассовых дираковских фермионов ($m = 0, g = 0$) найдите парные корреляционные функции фермионных полей $\langle \psi_i^+(x')\psi_j(x) \rangle$.

3. Получите все классические решения уравнения синус-Гордона $\phi(t, x)$ с конечной энергией, зависящие только от $x - vt$ с некоторой константой $v, |v| < 1$. Найдите топологические заряды этих решений.

4. Повторите рассуждения лекции в специальном случае свободного фермиона ($g = 0$). Проверьте, что в этом случае $m_{\text{phys}} = m = \pi\mu$.

5*. Покажите, что в модели Тирринга, в согласии с (2.39), в однопетлевом приближении масса перенормируется следующим образом

$$m_{\text{phys}} = m \left(1 + g \log \frac{\Lambda}{m} \right),$$

где Λ — параметр обрезания по импульсам.

При выводе диаграммной техники удобно пользоваться представлением для действия модели Тирринга со вспомогательным полем:

$$S[\psi, \bar{\psi}, A^\mu] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - \hat{A} - m)\psi + \frac{1}{2\pi g} A^\mu A_\mu \right).$$

Семинар 2

Сохранение энергии и импульса в модели синус-Гордона

Рассмотрим конформную теорию поля в эвклидовом пространстве с формальным действием S_0 и тензором энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ ($T_\mu^\mu = 0$). Пусть $\Phi_\Delta(x)$ — примарный (первичный) оператор конформной размерности Δ . Рассмотрим возмущенную теорию с действием

$$S = S_0 + S_1 = S_0 + \lambda \int d^2x \Phi_\Delta(x). \quad (2.40)$$

Рассмотрим компоненту $T = -2\pi T_{zz}$ тензора энергии-импульса. В конформной теории поля она удовлетворяет соотношению

$$\bar{\partial}T(x) = 0$$

Это значит, что для любых локальных операторов Φ_1, \dots, Φ_N имеет место тождество

$$\langle \bar{\partial}T(x) \Phi_1(x_1) \cdots \Phi_N(x_N) \rangle_0 = 0, \quad \text{если } x \neq x_1, \dots, x_N.$$

Когда $x = x_i$ это уравнение может нарушаться. Рассмотрим, например, операторное разложение

$$\begin{aligned} T(x) \Phi_\Delta(x') &= \frac{\Delta \Phi_\Delta(x')}{(z - z')^2} + \frac{\partial' \Phi_\Delta(x')}{z - z'} + O(1) \\ &= \Delta \Phi_\Delta(x') \partial \frac{1}{z - z'} + \frac{\partial' \Phi_\Delta(x')}{z' - z} + O(1). \end{aligned}$$

Дифференцируя по \bar{z} , получаем

$$\Phi_\Delta(x') \bar{\partial}T(x) = \Delta \Phi_\Delta(x') \bar{\partial} \partial' (z - z')^{-1} + \partial' \Phi_\Delta(x') \bar{\partial} (z - z')^{-1} + O(1).$$

Нетрудно проверить, что

$$\bar{\partial} \frac{1}{z} = \pi \delta(x). \quad (2.41)$$

Отсюда находим

$$\Phi_\Delta(x') \bar{\partial}T(x) = \pi \Delta \Phi_\Delta(x') \partial' \delta(x - x') + \partial' \Phi_\Delta(x') \delta(x - x') + O(1).$$

и

$$\int d^2x' \Phi_\Delta(x') \bar{\partial}T(x) = \pi(1 - \Delta) \partial \Phi_\Delta(x). \quad (2.42)$$

Теперь рассмотрим среднее от $\bar{\partial}T(x)X$ с любым X в виде произведения от локальных операторов в первом порядке теории возмущений:

$$\langle \bar{\partial}T(x)X \rangle = \frac{\langle e^{-S_1} \bar{\partial}T(x)X \rangle_0}{\langle e^{-S_1} \rangle_0} \simeq -\lambda \int d^2y \langle \Phi_\Delta(y) \bar{\partial}T(x)X \rangle_0 \simeq -\pi(1 - \Delta) \lambda \langle \partial \Phi(x)X \rangle.$$

Получаем

$$\bar{\partial}T(x) = \partial \Theta(x), \quad (2.43)$$

где²

$$\Theta(x) = 2\pi T_{z\bar{z}}(x) = -\pi(1 - \Delta) \lambda \Phi(x) + O(\lambda^2). \quad (2.44)$$

Аналогично

$$\partial \bar{T}(x) = \bar{\partial} \Theta(x). \quad (2.45)$$

Выражение (2.44) может оказаться точным, если

$$(z' - z) \Phi(x') \left(\int d^2y \Phi(y) \right)^k T(x) = o(1), \quad \text{если } k > 0. \quad (2.46)$$

²Заметим, что мы опускаем и поднимаем индексы с помощью метрики пространства Минковского $g_{z\bar{z}} = -1/2$, $g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0$.

Для модели синус-Гордона мы можем принять

$$S_0 = \int d^2x \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi}, \quad \Phi_\Delta = -\cos \beta\phi, \quad \lambda = \mu, \quad \Delta = \frac{\beta^2}{2}.$$

Тогда

$$T(x) = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2, \quad \bar{T}(x) = -\frac{1}{2}(\bar{\partial}\phi)^2, \quad \Theta(x) = \pi(1 - \beta^2/2)\mu \cos \beta\phi + O(\mu^2). \quad (2.47)$$

Однако условие (2.46) обращения в нуль высших поправок для $\Theta(x)$ не выполняется. Действительно, нетрудно проверить, что левая часть имеет порядок $(z' - z)^{-1}|z' - z|^{2k - k(k+1)\beta^2}$, и при любом значении β условие (2.46) нарушается при достаточно больших k .

Решить эту проблему можно двумя способами. Первый состоит в том, чтобы предположить, что поправки аналитичны по β^2 и если n -тый член теории возмущений обращается в нуль при достаточно малых β^2 , то он обращается в нуль тождественно. Тем не менее, предположение об аналитичности требует некоторого обоснования.