

## Лекция 10

### Движение частицы в метрике Шварцшильда

В прошлый раз мы обсуждали радиальное движение частицы в метрике Шварцшильда. Сегодня рассмотрим общий случай движения частицы по орбите, детально разберем процесс разделения переменных в уравнении Гамильтона—Якоби, и рассмотрим два эффекта в слабом поле, связанные с экспериментальной проверкой ОТО: вращение перигелия орбиты частицы и отклонение света гравитационным полем (гравитационное линзирование).

В силу сферической симметрии системы и закона сохранения момента импульса частица будет двигаться в одной плоскости, проходящей через «центр»  $r = 0$ . Удобно выбрать эту плоскость перпендикулярной оси  $z = x^3$ , то есть принять  $\vartheta = \pi/2$ . Уравнение Гамильтона—Якоби (3.19) принимает вид

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - m^2 = 0. \quad (10.1)$$

Мы видим, что переменные  $t, \varphi$  не входят явно в уравнение. Поэтому мы можем положить соответствующие производные равными константам:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = J. \quad (10.2)$$

Смысл этих констант достаточно очевиден:  $E$  представляет собой энергию частицы, а  $J$  — момент импульса в направлении оси  $z$ . Отсюда имеем

$$S(E, J, t, r, \varphi) = -Et + J\varphi + S_r(E, J, r). \quad (10.3)$$

Подставляя это в уравнение (10.1) и интегрируя по  $r$ , получаем

$$S_r = \pm \int dr \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \sqrt{F(E, J, r)}, \quad F(E, J, r) = E^2 - \left(m^2 + \frac{J^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right). \quad (10.4)$$

Мы имеем решение, зависящее от двух параметров, для системы с двумя степенями свободы. Очевидно, мировая линия частицы определяется уравнениями

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -t_0, \quad \frac{\partial S}{\partial J} = \varphi_0, \quad (10.5)$$

где константы  $t_0, \varphi_0$  имеют очевидный смысл начального времени и угла. Имеем

$$t = t_0 \pm E \int_{r_0}^r \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{F(E, J, r)}}, \quad (10.6)$$

$$\varphi = \varphi_0 \pm J \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{F(E, J, r)}}. \quad (10.7)$$

Мы здесь немного злоупотребили обозначениями, обозначив одной буквой предел и переменную интегрирования, но, я думаю, это никого не введет в заблуждение. Физикам такое простительно.

Зададимся вопросом: в каких пределах может меняться радиальная координата  $r$  при движении частицы? Это определяется условием неотрицательности выражения под корнем:

$$F(E, J, r) = E^2 - U^2(J, r) = E^2 - \left(m^2 + \frac{J^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \geq 0, \quad r > 0. \quad (10.8)$$

Величина  $U(J, r)$  играет роль потенциальной энергии.

Прежде чем разбирать подробно все возможные случаи, перечислим возможные формы движения тела в центральном поле:

1. Инфинитное движение. Частица прилетает из бесконечности, приближается к сфере Шварцшильда до некоторого минимального значения радиальной координаты  $r = R_{\min}$ , а затем снова улетает на бесконечность.

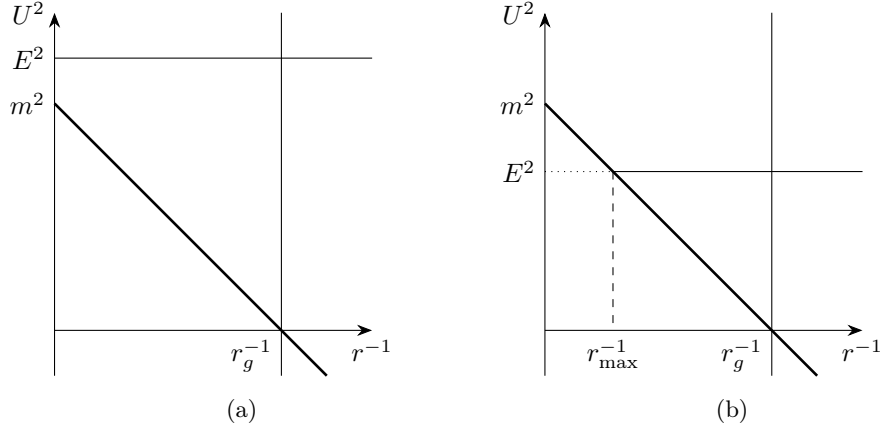


Рис. 10.1. График  $U^2(0, r)$  в зависимости от  $r^{-1}$ . (а)  $E > m$  и  $F > 0$  для всех  $r$ ; (б)  $E < m$  и  $F \geq 0$  для  $r \leq r_{\max}$ .

2. «Инфинитно-сингулярное»<sup>10</sup> движение. Частица прилетает из бесконечности, пересекает горизонт событий  $\mathcal{H}^+$  и достигает сингулярности черной дыры  $\mathcal{S}^+$ . Либо наоборот, испускается сингулярностью белой дыры  $\mathcal{S}^-$ , пересекает горизонт событий  $\mathcal{H}^-$  и уходит на бесконечность. Эти два движения переходят друг в друга при обращении времени.
3. Фinitное (орбитальное) движение. Частица совершает орбитальное движение приближаясь к сфере Шварцшильда и удаляясь от нее, оставаясь все время в некоторых пределах  $R_{\min} \leq r \leq R_{\max}$ .
4. «Фinitно-сингулярное» движение. Частица испускается белой дырой, последовательно пересекает горизонты событий  $\mathcal{H}^-$  и  $\mathcal{H}^+$  и поглощается черной дырой. При этом ее радиальная координата не превышает некоторого значения  $r_{\max}$ .

Точки  $R_{\max}, R_{\min}, r_{\max}$  являются *точками поворота*. Это значит, что в этих точках (и только в этих точках!) может изменяться направление радиального движения частицы: «к центру» на «от центра» и наоборот.

Сначала рассмотрим случай  $J = 0$ . В этом случае уравнение  $F(E, J, r) = 0$  линейно и легко решается. Мы получаем

$$\frac{r_g}{r} \geq -\frac{E^2 - m^2}{m^2}. \quad (10.9)$$

Мы видим, что если  $E \geq m$  неравенство выполняется для любых допустимых значений  $r$ , точек поворота нет и движение частицы «инфинитно-сингулярное». В случае  $E < m$  частица не может удалиться на расстояние больше  $r_{\max} = r_g m^2 / (m^2 - E^2)$ . Достигнув точки  $r = r_{\max}$ , частица *разворачивается* (ее скорость в этот момент равна нулю) и снова падает на «центр», точнее, на сингулярность  $\mathcal{S}^+$ . Это — «фinitно-сингулярное» движение. Графически это изображено на рис. 10.1. На графиках приведена зависимость  $U^2$  от  $r^{-1}$  и уровни  $E^2$ . Сплошная часть линий уровня  $E^2$  показывает области, где происходит движение частицы, а пунктирная часть — запрещенные области.

В случае  $J \neq 0$  ситуация оказывается сложнее. Уравнение  $F(E, J, r) = 0$  является уравнением третьей степени. Удобно рассмотреть его как уравнение на  $\xi = r^{-1}$ :

$$r_g J^2 \xi^3 - J^2 \xi^2 + m^2 r_g \xi + E^2 - m^2 = 0. \quad (10.10)$$

Старший коэффициент положителен, так что при достаточно больших  $|\xi|$  функция  $F(E, J, \xi^{-1})$  растет. Далее ситуация зависит от количества корней уравнения (10.10) и от их знаков. Нетрудно

<sup>10</sup>В кавычки взяты названия, не являющиеся общепринятыми терминами.

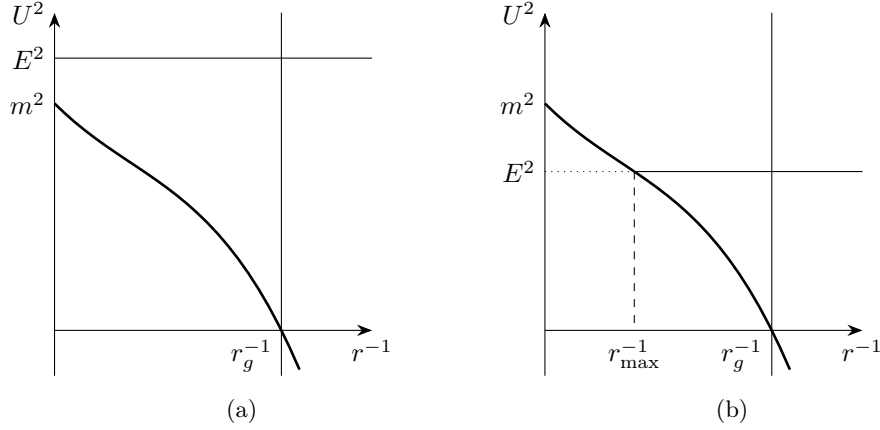


Рис. 10.2. График  $U^2(J, r)$  в зависимости от  $r^{-1}$  в случае  $|J| < \sqrt{3}mr_g$ . (a)  $E > m$  и  $F > 0$  для всех  $r$ ; (b)  $E < m$  и  $F \geq 0$  для  $r \leq r_{\max}$ .

(хотя и утомительно) найти экстремумы функции  $F(E, J, \xi^{-1})$ :

$$\xi_{\pm} = \frac{1}{3r_g} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3r_g^2 m^2}{J^2}} \right), \quad (10.11)$$

$$F(E, J, \xi_{\pm}^{-1}) = E^2 - E_{\pm}^2, \quad E_{\pm}^2 = \frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{27} \frac{J^2}{r_g^2} \left( 1 \pm \left( 1 - \frac{3r_g^2 m^2}{J^2} \right)^{3/2} \right).$$

Здесь имеется два случая.

1. Если  $|J| \leq \sqrt{3}mr_g$ , функция  $F(E, J, r)$  монотонна и имеется единственный вещественный корень  $r_{\max}$ , который положителен при  $E < m$  и отрицателен при  $E > m$ . Действительно, для корней уравнения (10.10)  $\xi_i$  имеем  $\xi_1 \xi_2 \xi_3 = \frac{m^2 - E^2}{r_g J^2}$ . Поскольку два корня, например  $\xi_2, \xi_3$  комплексно сопряжены друг другу, их произведение положительно. Значит, знак  $\xi_1$  (и, соответственно,  $r_1$ ) совпадает со знаком  $m^2 - E^2$ . Итак, ситуация вполне аналогична ситуации при  $J = 0$  за исключением того, что  $r_{\max}$  теперь является решением уравнения третьей степени (см. рис. 10.2).

2. Если же момент импульса частицы достаточно велик,  $|J| > \sqrt{3}mr_g$ , уравнение (10.10) может иметь от одного до трех вещественных корней. При этом точки экстремума положительны,  $\xi_{\pm} > 0$ , а экстремальные значения удовлетворяют условию  $E_+^2 > E_-^2 > 0$ . Из положительности точек экстремумов следует, что, если имеется три корня, то, по крайней мере, два из них положительны. Полагая  $E_{\pm} > 0$ , мы видим, что при  $E > E_+$  имеется ровно один вещественный корень  $\xi_1$ . При этом знак корня, опять же, совпадает со знаком  $m^2 - E^2$ . При этом поведение системы зависит от того, что больше,  $E_+$  или  $m$ . Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} E_+ &> m, & \text{если } |J| > 2mr_g; \\ E_+ &< m, & \text{если } |J| < 2mr_g. \end{aligned}$$

При  $E > E_+, m$  единственный корень отрицателен и частица совершает «инфинитно-сингулярное» движение. То же самое происходит при  $E < E_-$ . В области же  $E_- < E < \max(E_+, m)$  случай 2 распадается на два подслучая.

2а. При  $\sqrt{3}mr_g < J < 2mr_g$  (см. рис. 10.3) в диапазоне  $E_+ < E < m$  система ведет себя как в случае 1: единственный корень  $\xi_1$  положителен и соответствующее значение  $r_{\max} = \xi_1^{-1}$  дает максимальное удаление частицы от сферы Шварцшильда. Частица совершает «финитно-сингулярное» движение.

В случае же  $E_- < E < E_+$  имеется три положительных корня. Обозначим их  $R_{\max} > R_{\min} > r_{\max}$  и две области неотрицательных значений  $F(E, J, r)$ :  $R_{\min} \leq r \leq R_{\max}$  и  $r \leq r_{\max}$ . Первая область отвечает орбитальному (финитному) движению, вторая — «финитно-сингулярному».

2б. При  $J > 2mr_g$  (см. рис. 10.4) в диапазоне  $E_+ > E > m$  (то есть, когда момент  $J$  достаточно велик) имеется три корня, но один из них отрицательный, а два других — положительные. Этим двум

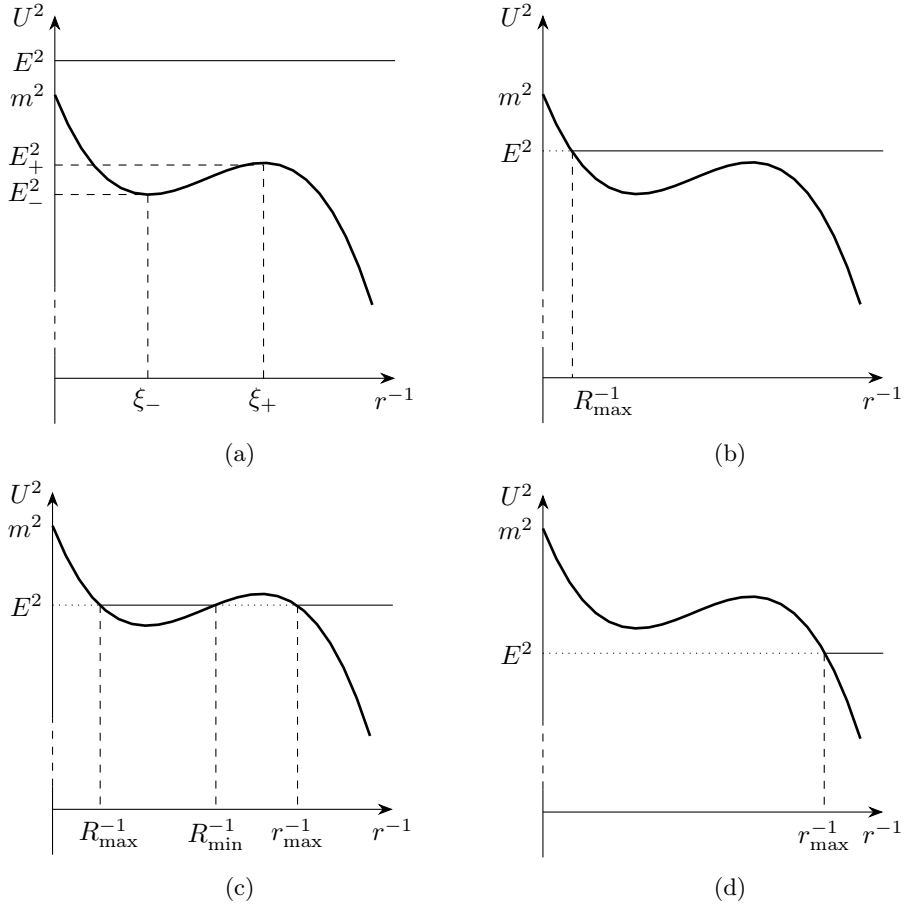


Рис. 10.3. График  $U^2(J, r)$  в зависимости от  $r^{-1}$  в случае  $\sqrt{3}mr_g < |J| < 2mr_g$ . (a)  $E > m$ ; (b)  $E_+ < E < m$ ; (c)  $E_- < E < E_+$ ; (d)  $E < E_-$ .

положительным корням отвечают две точки  $R_{\min}, r_{\max}$ , такие что  $R_{\min} > \xi_-^{-1} > r_{\max} > \xi_+^{-1} > \frac{3}{2}r_g$ . В области  $r > R_{\min}$  частица совершает инфинитное движение, а в области  $r < r_{\max}$  — «финитно-сингулярное». Между этими двумя областями имеется потенциальный барьер.

Изучим орбитальное движение тела, которое имеет место в случае 2 при  $E_- \leq E \leq m, E_+$ . В это случае тело вращается вокруг источника гравитации, периодически приближаясь к источнику и достигая точки *перигелия*  $r = R_{\min}$  и затем удаляясь и достигая точки *афелия*  $r = R_{\max}$ . Уравнения (10.6), (10.7) дают нам время  $T_{\text{пер}}$  и угол  $\Phi_{\text{пер}}$ , характеризующие движение тела по орбите:

$$T_{\text{пер}} = 2E \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{F(E, J, r)}}, \quad (10.12)$$

$$\Phi_{\text{пер}} = 2J \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{F(E, J, r)}}. \quad (10.13)$$

Величина  $T_{\text{пер}}$  дает время, за которое тело, находящееся в начальный момент времени в перигелии достигает афелия и вновь приближается, достигая новой точки перигелия. Величина  $\Phi_{\text{пер}}$  дает угол, на который следующая точка перигелия отличается от предыдущей. В ньютоновском пределе  $\Phi_{\text{пер}} = 2\pi$ , то есть следующий перигелий достигается ровно через один оборот вокруг источника гравитации. В дальнейшем нас будет интересовать величина  $\Delta\Phi_{\text{пер}} = \Phi_{\text{пер}} - 2\pi$ , характеризующая смещение перигелия за один оборот. Важно отметить, что величина  $T_{\text{пер}}$  является периодом *радикального* движения тела, а не периодом обращения (*сидерическим* периодом), то есть периодом, за который угол меняется на  $2\pi$ . Сидерический период, строго говоря, не является периодом какого бы то ни было движения. Он зависит от того, с какой начальной точки орбиты мы его отсчитываем. Хорошо определен только *средний* сидерический период, основанный на «многолетних»

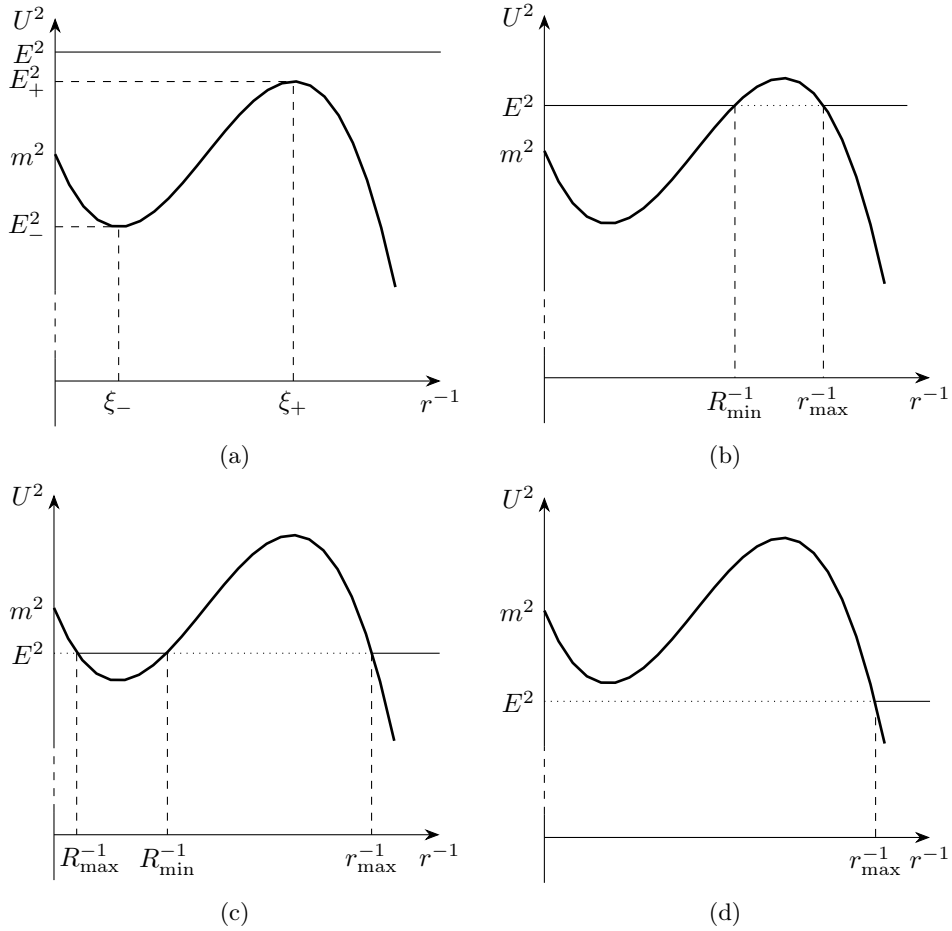


Рис. 10.4. График  $U^2(J, r)$  в зависимости от  $r^{-1}$  в случае  $|J| > 2mr_g$ . (a)  $E > E_+$ ; (b)  $m < E < E_+$ ; (c)  $E_- < E < m$ ; (d)  $E < E_-$ .

измерениях:

$$\overline{T_{\text{сид}}} = \frac{2\pi}{\Phi_{\text{пер}}} T_{\text{пер}}. \quad (10.14)$$

### Задачи

1. Второй закон Кеплера утверждает, что угловая скорость частицы в ньютоновском гравитационном поле (и, на самом деле, в любом статическом центральном потенциальном поле в нерелятивистской механике) обратно пропорциональна квадрату расстояния до центрального тела. Найдите аналог второго закона Кеплера для тела, движущегося в метрике Шварцшильда.
2. Найдите все устойчивые круговые орбиты в метрике Шварцшильда, их энергии, моменты импульса и сидерические периоды в зависимости от радиуса орбиты.
3. Возьмите интегралы в (10.6), (10.7) в случае  $r_g = 0$  и убедитесь, что уравнения описывают прямолинейное движение частицы в плоском пространстве-времени.
4. Напишите и решите уравнение Гамильтона–Якоби в координатах Эддингтона–Финкельштейна (9.22).
5. Покажите, что в случае свободного падения на черную дыру, частица достигает горизонта  $\mathcal{H}^+$ , а затем и сингулярности за конечное собственное время и при ненулевом моменте.

## Семинар 10

### Уравнение Гамильтона—Якоби

1. Метод разделения переменных и интегрируемость.
2. Свободная частица в плоском пространстве: декартовы и сферические координаты.
3. Частица в поле гравитационной волны.
4. Частица в ньютоновском потенциале.