Лекция 4
Уравнения гравитационного поля

До сих пор мы считали геометрию пространства-времени заданной. Теперь мы хотим ответить на вопрос, как эта геометрия зависит от материи, которая в ней живет. Согласно общей теории относительности, геометрия пространства-времени определяется плотностью энергии, плотностью импульса и плотностью потока импульса в системе, то есть *тензором энергии-импульса*. Однако каноническое определение тензора энергии-импульса (1.32) в общей теории относительности не годится, так как основано на однородности пространства-времени, которого в ОТО нет. Этот тензор удобно определить в теории поля, используя другую симметрию — инвариантность действия относительно замен координат в пространстве-времени.

Преобразования координат, как мы говорили, является симметрией действия. С симметриями обычно связаны законы сохранения (теорема Нётер). Однако, как мы увидим ниже, связанные с этой симметрией заряды тождественно обращаются в нуль, что означает, что данная симметрия является *калибровочной*. Действительно, рассмотрим действие $S[\phi|g]$ как функцию полей ϕ^i и метрики g. Пока что мы рассматриваем метрику как внешнее поле (поэтому отделили ее чертой). Нас будет интересовать вариация действия при бесконечно малом преобразовании координат $x^\mu = x'^\mu + \xi^\mu(x'^\bullet)$. Найдем сначала преобразования полей. Рассмотрим скалярное поле $\varphi(x^\bullet)$. Определим новое поле $\varphi'(x'^\bullet) = \varphi(x^\bullet)$. Нас будет интересовать разность этих полей, если мы подставили в них одни и те же значения координат. Имеем

$$\delta_\xi\varphi(x) = \varphi'(x'^\bullet) - \varphi(x'^\bullet) = \varphi(x^\bullet) - \varphi(x'^\bullet) = \partial_\mu\varphi(x)\,\xi^\mu = \nabla_\xi\varphi(x).$$

Операция «малого изменения» тензора δ_ξ или, более формальным языком, *производная Ли* может быть выражена непосредственно через действие вектора ξ и не требует связности, но нам будет удобно выразить ответ через ковариантные производные связности Леви—Чивиты.

Для векторного поля a^μ мы должны положить $a'^\mu(x'^\bullet) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} a^\lambda(x^\bullet)$. находим

$$\begin{aligned}\delta_\xi a^\mu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} a^\lambda(x^\bullet) - a^\mu(x'^\bullet) = \partial_\lambda a^\mu\,\xi^\lambda - a^\lambda\,\partial_\lambda\xi^\mu \\ &= \nabla_\lambda a^\mu\,\xi^\lambda - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} a^\nu \xi^\lambda - a^\lambda\,\partial_\lambda \xi^\mu = (\nabla_\xi a)^\mu - (\nabla_a \xi)^\mu\end{aligned}$$

или

$$\delta_\xi a = \nabla_\xi a - \nabla_a \xi, \qquad a \in C(TM). \tag{4.1}$$

Мы воспользовались симметрией символов Кристоффеля для связности Леви—Чивиты по нижним индексам (отсутствием кручения). Аналогично для формы a_μ находим

$$\begin{aligned}\delta_\xi a_\mu &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} a_\lambda(x^\bullet) - a_\mu(x'^\bullet) = \partial_\lambda a_\mu\,\xi^\lambda + a_\lambda\,\partial_\mu\xi^\lambda \\ &= \nabla_\lambda a_\mu\,\xi^\lambda + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} a_\nu \xi^\lambda + a_\lambda\,\partial_\mu\xi^\lambda = (\nabla_\xi a)_\mu + a(\nabla_\mu \xi).\end{aligned}$$

Правую часть не очень удобно писать в безындексных обозначениях, но мы все же хотим записать ее как утверждение о векторах, а не о компонентах. Поэтому воспользуемся формальными индексами:

$$\delta_\xi a_{\mathbf{1}} = \nabla_\xi a_{\mathbf{1}} + a_{\mathbf{1}'}\nabla_{\mathbf{1}}\xi^{\mathbf{1}'}, \qquad a \in C(T^*M) \tag{4.2}$$

Этот результат легко обобщить на произвольные тензорные поля:

$$\delta_\xi a^{\mathbf{1}\ldots\mathbf{k}}{}_{\mathbf{k+1}\ldots\mathbf{l}} = \nabla_\xi a^{\mathbf{1}\ldots\mathbf{k}}{}_{\mathbf{k+1}\ldots\mathbf{l}} - \sum_{i=1}^{k} a^{\mathbf{1}\ldots\mathbf{i}'\ldots\mathbf{k}}{}_{\mathbf{k+1}\ldots\mathbf{l}}\,\nabla_{\mathbf{i}'}\xi^{\mathbf{i}} + \sum_{i=k+1}^{l} a^{\mathbf{1}\ldots\mathbf{k}}{}_{\mathbf{k+1}\ldots\mathbf{i}'\ldots\mathbf{l}}\,\nabla_{\mathbf{i}}\xi^{\mathbf{i}'}. \tag{4.3}$$

Для метрического тензора, в силу того, что он ковариантно постоянен, имеем

$$\delta_\xi g_{\mathbf{12}} = g_{\mathbf{11}'}\nabla_{\mathbf{2}}\xi^{\mathbf{1}'} + g_{\mathbf{22}'}\nabla_{\mathbf{1}}\xi^{\mathbf{2}'} = \nabla_{\mathbf{2}}\xi_{\mathbf{1}} + \nabla_{\mathbf{1}}\xi_{\mathbf{2}} = \xi_{\mathbf{1};\mathbf{2}} + \xi_{\mathbf{2};\mathbf{1}}, \tag{4.4}$$

где $\xi_{\mathbf{1}} = g_{\mathbf{12}}\xi^{\mathbf{2}}$ форма, получаемая «опусканием индексов» из вектора ξ. В координатах имеем

$$\delta_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}. \tag{4.5}$$

Наконец,

$$\delta_\xi \log g = g^{\mu\nu}\delta_\xi g_{\mu\nu} = 2\xi^\mu{}_{;\mu}. \tag{4.6}$$

Теперь рассмотрим действие вида

$$S[\phi|g] = \int d^d x\,\sqrt{|g|}\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet\phi|g). \tag{4.7}$$

Для простоты будем считать, что поля ϕ^i скалярные, а в лагранжиан не входят производные от $g_{\mu\nu}$. Мы будем также пользоваться кратким обозначением $a_{,\mu} = \partial_\mu a$. Вариация действия при преобразовании δ_ξ должна обратиться в нуль:

$$\begin{aligned} 0 = \delta_\xi S = \int d^d x\,&\left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi}\,\delta_\xi\phi + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}}\,\delta_\xi(\phi_{,\lambda})\right) \\ &+ \int d^d x\,\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}}\,\delta_\xi g_{\mu\nu} - \int d^d x\,\partial_\mu(\xi^\mu\sqrt{|g|}\mathcal{L}). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Последнее слагаемое связано с тем, что при замене координат изменяется также область интегрирования.

Уравнение движения для поля ϕ имеет вид

$$\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi} = \partial_\lambda\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}}.$$

Хотелось бы, однако, записать его через ковариантную производную. Используя (3.27), получим

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \nabla_\lambda\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\lambda}}. \tag{4.9}$$

Отсюда видим, что, используя правило Лейбница для ковариантной производной и тождество (3.27), сумму первого и третьего слагаемых в (4.8) можно представить в виде

$$(\mathrm{I}) + (\mathrm{III}) = \int d^d x\,\sqrt{|g|}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \nabla_\lambda\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\lambda}}\right)\phi_{,\kappa}\xi^\kappa + \int d^d x\,\partial_\lambda(\sqrt{|g|}\tilde{T}^\lambda_\kappa\xi^\kappa),$$

где

$$\tilde{T}^\mu_\nu = \partial_\nu\phi\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \mathcal{L}\delta^\mu_\nu \tag{4.10}$$

— *канонический* тензор энергии-импульса, определенный по аналогии со специальной теорией относительности. Однако, в отличие от СТО, действие не трансляционно-инвариантно, что приводит к появлению второго слагаемого в (4.8). Для второго слагаемого имеем

$$(\mathrm{II}) = \int d^d x\,2\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}}\xi_{\nu;\mu} = \int d^d x\,\partial_\lambda\left(2\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\lambda\nu}}\xi_\nu\right) - \int d^d x\,2\nabla_\mu\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}}\xi_\nu.$$

Окончательно, получаем

$$\begin{aligned} 0 = \delta_\xi S = \int d^d x\,&\left(\sqrt{|g|}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \nabla_\lambda\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\lambda}}\right)\phi_{,\nu} - 2\nabla_\mu\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}}\right)\xi^\nu \\ &+ \int d^d x\,\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}\tilde{T}^{\mu\nu}\xi_\nu + 2\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}}\xi_\nu\right). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Рассмотрим сначала такие векторные поля ξ, которые обращаются в нуль на границе вместе со всеми своими производными. Тогда второе слагаемое в (4.11) исчезает и мы получаем тождество

$$2\nabla_\mu\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} = \sqrt{|g|}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \nabla_\lambda\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\lambda}}\right)\phi_{,\nu}, \tag{4.12}$$

которое верно для любого общековариантного действия вида (4.7). Тогда для общего векторного поля ξ (не обращающегося в нуль на границе) в выражении (4.11) остается только второе слагаемое, которое сводится к поверхностному интегралу. Так как поверхность произвольна, отсюда следует, что

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}}. \tag{4.13}$$

Таким образом, правая часть этого уравнения совпадает с тензором энергии-импульса системы в плоском пределе. Поэтому мы *определим* общерелятивистский тензор энергии-импульса для лагранжианов общего вида как[7]

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}}\left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} + \cdots\right) \tag{4.14}$$

Вернемся к тождеству (4.12). На решениях уравнения движения (4.9) оно сводится к ковариантному постоянству тензора энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \tag{4.15}$$

Как и следовало ожидать, энергия и импульс не сохраняются в отсутствие однородности (трансляционной инвариантности) пространства-времени, а момент импульса — в отсутствии изотропии. Физически это означает обмен энергией, импульсом и моментом импульса с гравитационным полем. Позже мы обсудим это более подробно.

Давайте теперь найдем тензор энергии-импульса для точечной частицы. Запишем действие (3.10) в виде

$$S[x|g] = \int d^d x \int d\tau\, \delta(x^\bullet - x^\bullet(\tau)) \left(-m\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)} - eA_\mu(x)\dot{x}^\mu(\tau)\right).$$

Дифференцируя по метрике, получаем в калибровке $\tau = s$:

$$T^{\mu\nu} = \int ds\, \frac{\delta(x^\bullet - x^\bullet(s))}{\sqrt{|g|}} m\dot{x}^\mu(s)\dot{x}^\nu(s).$$

Первый множитель представляет собой инвариантную дельта-функцию на псевдоримановом многообразии:

$$\delta_g(x, y) = \frac{\delta(x^\bullet - y^\bullet)}{\sqrt{|g(y)|}}. \tag{4.16}$$

Поэтому окончательно получаем

$$T^{\mu\nu} = \int ds\, \delta_g(x, x(s))\, m\dot{x}^\mu(s)\dot{x}^\nu(s). \tag{4.17}$$

Теперь будем рассматривать метрику как динамическую переменную. Для этого в действии вида (4.7) не хватает членов с производными от метрики. Давайте посмотрим, какого рода члены могут возникать. Мы будем обсуждать простейший случай, когда действие разбивается в сумму

$$S_{\text{общ}}[\phi, g] = S[\phi|g] + S_{\text{грав}}[g], \tag{4.18}$$

где $S_{\text{мат}}$ — действие вида (4.7), не содержащее производных метрики, а вся динамика содержится в гравитационном действии $S_{\text{грав}}$. Уравнение движения для метрики при этом будет иметь вид

$$\frac{\delta S_{\text{общ}}}{\delta g_{\mu\nu}} \equiv \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{\text{общ}})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{\text{общ}})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} + \cdots = 0, \tag{4.19}$$

[7]Для полей, отличных от скалярного поля, канонический тензор энергии-импульса может не быть симметричным. Общерелятивстский же тензор энергии-импульса всегда симметричен отличается от канонического дивергенцией на выражение вида $|g|^{-1/2}\partial_\lambda(|g|^{1/2}\psi^{\mu\nu\lambda})$, где ψ — антисимметричный тензор третьего ранга.

что эквивалентно тому, что суммарный тензор энергии-импульса материи и гравитации равен нулю:

$$T^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = 0. \tag{4.20}$$

То есть формально энергия и импульс не могут распространяться в пространстве, а только переходят их гравитационной формы в «материальную» и обратно. Это противоречит физической интуиции, и говорит о том, что энергию и импульс гравитационного поля следует определить как-то по-другому. Мы обсудим этот вопрос в одной из следующих лекций.

Теперь обсудим вид действия $S_{\text{грав}}$. Соответствующий лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{грав}}$ должен быть скалярной величиной. Мы предположим, что он содержит первые производные метрики не более чем во второй степени, а вторые производные — не более чем в первой степени. Это значит, что компоненты метрики являются правильными динамическими переменными (обобщенными координатами), а набор компонент метрики и их первых производных по времени определяет начальные условия в задаче Коши. Из известных нам величин только единица и скаляр Риччи R удовлетворяют этому условию. Скаляры более общего вида $f(R, R_{\mathbf{12}}R^{\mathbf{12}}, R_{\mathbf{1234}}R^{\mathbf{1234}}, R_{\mathbf{12}}R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{3}}R^{\mathbf{23}}, \ldots)$ будут содержать высшие производные. Поэтому действие запишем в виде

$$S_{\text{грав}} = -\frac{1}{16\pi G}\int d^dx\,\sqrt{|g|}(R + 2\Lambda), \tag{4.21}$$

где $G > 0$ и Λ — две постоянные. Действие такого вида называется *действием Эйнштейна—Гильберта*. Второе слагаемое (так называемый *лямбда-член*) не содержит производных и может быть отнесено к материи. Действительно, имеем

$$T^{\mu\nu}_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{4\pi G\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\Lambda}{8\pi G}\,g^{\mu\nu}. \tag{4.22}$$

Следовательно, лямбда-член можно интерпретировать как действие вещества с уравнением состояния $p = \text{ const}$ и плотностью энергии $\varepsilon = -p = \Lambda/8\pi G$. Если $\Lambda > 0$ плотность энергии положительна, а давление отрицательно. Если же $\Lambda < 0$, все наоборот. Мы не знаем такого рода материи, однако в некоторых модельных теориях поля имеются метастабильные состояния с такими свойствами. Экспериментально лямбда-член слишком мал, чтобы играть роль во взаимодействиях даже на галактических масштабах, и его следует принимать во внимание только в космологических задачах, когда речь идет об эволюции Вселенной в целом. Итак, в дальнейшем лямбда-член мы будем опускать.

Найдем теперь уравнение движения для метрики. Проварьируем гравитационное действие:

$$\begin{aligned}\delta\int d^4x\,\sqrt{|g|}R = \delta\int d^4x\,\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} &= \int d^4x\,\left(\delta\sqrt{|g|}\,R + \sqrt{|g|}\,\delta g^{\mu\nu}\,R_{\mu\nu} + \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu}\right)\\ &= \int d^4x\,\left(\sqrt{|g|}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu}\right).\end{aligned}$$

Оказывается, последний член под интегралом является полной дивергенцией,

$$\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda(\sqrt{|g|}w^\lambda) = \sqrt{|g|}w^\lambda{}_{;\lambda}, \qquad w^\lambda = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\lambda\mu}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}, \tag{4.23}$$

и, таким образом, дает нулевой вклад, если вариация равна нулю на поверхности. Отсюда получаем *уравнения Эйнштейна* для метрики

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{4.24}$$

Таким образом, роль источника гравитационного поля в общей теории относительности играет тензор энергии-импульса материи. Следует обратить внимание на два отличия от ньютоновской теории. Во-первых, источником гравитации является не только плотность массы (или плотность энергии), но и плотность импульса (или плотность потока энергии) и даже плотность потока импульса (в частности, давление). Конечно, в солнечной системе эти вклады ничтожно малы. Однако в случае более плотных объектов или на больших масштабах их надо учитывать. Во-вторых, гравитационное поле в ОТО обладает динамическими степенями свободы, так что источники не могут однозначно задавать конфигурацию поля. Конечно, в отличие от электромагнитного поля, уравнения гравитационного поля нелинейны, так что решение нельзя разбить в сумму вынужденного и свободного поля. Тем не менее, задача Коши должна содержать не только начальное состояние материи, но и начальное состояние гравитационного поля, а малые возмущения гравитационного поля распространяются как волны. Эти особенности мы обсудим позже.

Теперь свернем уравнение (4.24) с обратной метрикой $g^{\mu\nu}$. Мы легко находим

$$\frac{d-2}{2}R = -8\pi G T, \qquad T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}. \tag{4.25}$$

Подставляя это в (4.24), получаем альтернативный вид уравнений Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{d-2}T\right). \tag{4.26}$$

В частности, в отсутствие материи уравнения Эйнштейна принимают простой вид

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{4.27}$$

Рассмотрим уравнения Эйнштейна как уравнения эволюции гравитационного поля. Для этого выделим члены со вторыми производные по времени (x^0) в тензоре Риччи. Нетрудно проверить, что

$$R_{00} = -\frac{1}{2}g^{ik}\ddot{g}_{ik} + \overline{R}_{00}, \qquad R_{0i} = \frac{1}{2}g^{0k}\ddot{g}_{ik} + \overline{R}_{0i}, \qquad R_{ik} = -\frac{1}{2}g^{00}\ddot{g}_{ik} + \overline{R}_{ik}. \tag{4.28}$$

Точи над буквами здесь означают производные по времени. Через $\overline{R}_{\mu\nu}$ обозначены члены, содержащие не более чем первые производные по времени. Мы видим, что компоненты тензора Риччи вообще не содержат вторых производных по времени от компонент $g_{0\mu}$. Этот результат будет еще выразительнее, если мы поднимем первый индекс и вычтем след:

$$\begin{gathered}R^0_0 - \frac{1}{2}R = \overline{R}^0_0 - \frac{1}{2}\overline{R}, \qquad R^0_i = \overline{R}^0_i, \\ R^i_k - \frac{\delta^i_k}{2}R = \frac{1}{2}(g^{0l}g^{0m} - g^{00}g^{lm})(\delta^i_l\ddot{g}_{km} - \delta^i_k\ddot{g}_{lm}) + \overline{R}^i_k - \frac{\delta^i_k}{2}\overline{R}.\end{gathered} \tag{4.29}$$

То есть, мы видим, что уравнения Эйнштейна, в левую часть которых входит R^0_μ, являются *связями*, а не динамическими уравнениями. Динамическими уравнениями являются $\frac{d(d-1)}{2}$ уравнений для пространственных компонент. Формально это означает, что, чтобы задать эволюцию метрики, мы должны задать на пространственно-подобной поверхности S_0 начальные значения $g_{ik}, \dot{g}_{ik}, g_{0\mu}$ — всего d^2 переменных. На самом деле это не так. Мы забыли о том, что все физические величины должны быть инвариантны по отношению к общим заменам координат. Формально замены координат описываются d функциями переменных x^0, x^i. Однако с динамической точки зрения ситуация сложнее. Чтобы ее описать, давайте для любого решения выберем синхронную систему координат, что будет соответствовать некоторой фиксации калибровки. Синхронная система координат, вообще говоря, не может быть определена во всем пространстве, но нам будет достаточно, что ее можно выбрать в окрестностях любой регулярной точки пространства-времени. Тогда компоненты $g_{0\mu} = \delta_{0\mu}$ фиксированы. Остается $V = d(d-1)$ начальных данных на пространственно-подобной поверхности. Уравнения, содержащие R^0_μ, дают $C = d$ связей на эти величины. Кроме того, синхронная система координат не фиксирует калибровку полностью. Она сохраняет свойство синхронности при преобразованиях вида (4.4), если

$$\xi_{0;0} = 0, \qquad \xi_{i;0} = -\xi_{0;i}.$$

Итак, временные производные величин ξ_μ полностью определяются их значениями и пространственными производными. Таким образом, «остаточная» калибровочная свобода на начальной поверхности S_0 описывается $G = d$ функциями пространственных координат. Значит, начальные данные гравитационного поля описываются

$$V - C - G = d(d-1) - d - d = d(d-3) \tag{4.30}$$

функциями координат. Немного вольно можно сказать, что число собственных степеней свободы (половина размерности фазового пространства) гравитационного поля составляет $\frac{d(d-3)}{2}$ в каждой точке. Мы это установим более строго, когда будем изучать гравитационные волны.

Задачи

1. Докажите, что тензор энергии-импульса (4.14) ковариантно сохраняется, то есть удовлетворяет уравнению (4.15), для произвольного лагранжиана.

2. Докажите (4.23).

3. Покажите, что действие Эйнштейна—Гильберта (4.21) (с $\Lambda = 0$, как мы условились) можно привести к виду

$$S_{\text{грав}}[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^dx\,\sqrt{|g|}\,\mathcal{R}(g, \partial_\bullet g),$$

где $\mathcal{R}$ является функцией метрики и ее первых производных. Покажите, что

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\lambda}). \tag{4.31}$$

(Более явно,

$$\mathcal{R} = \frac{1}{4}g_{\mu\nu,\rho}g_{\kappa\lambda,\sigma}\left(g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\kappa}g^{\nu\sigma}g^{\rho\lambda} - 2g^{\mu\nu}g^{\kappa\rho}g^{\lambda\sigma}\right), \tag{4.32}$$

но вывод этой формулы довольно трудоемок, так что это — для желающих.)

4. Действие Эйнштейна—Гильберта можно записать как функционал метрики g и связности Γ, считая их независимыми переменными:

$$S_{\text{грав}}[g, \Gamma] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^dx\,\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(\Gamma, \partial_\bullet\Gamma). \tag{4.33}$$

Иными словами, мы не рассматриваем многообразие как псевдориманово. Покажите, что условиями экстремума действия (4.18) в таком предположении будет условие Леви—Чивиты (2.27) и уравнения Эйнштейна (4.24).

5. Покажите, что в двумерном пространстве-времени величина $\sqrt{|g|}R$ является полной дивергенцией, а уравнения Эйнштейна сводятся к обращению в нуль тензора энергии-импульса: $T_{\mu\nu} = 0$.

6. Проверьте формулы (4.28), (4.29).

Семинар 4

Тензор энергии-импульса разных физических систем

Источником гравитационного поля, как мы убедились, является тензор энергии-импульса материи. На семинаре вы вычислите тензор энергии-импульса для нескольких физических систем:

1. Движущаяся пылевидная материя.
2. Движущаяся жидкость с плотностью ρ и давлением p. Нерелятивистский и ультрарелятивистский идеальные газы.
3. Модели теории поля (скалярное поле со взаимодействием, электромагнитное поле,...)