Лекция 3

Частицы и поля в искривленном пространстве-времени

Общая теория относительности отличается от специальной, во-первых, тем, что пространство-время общей теории относительности представляет собой псевдориманово многообразие общего вида M сигнатуры $(1, d-1)$, а, во-вторых, тем, что сама структура многообразия имеет динамику, зависящую от движения вещества. Разберемся сначала с первой частью — движением частиц в заданном искривленном пространстве-времени.

Прежде всего, метрика в пространстве-времени, также как и в специальной теории относительности, определяет собственное время частицы. Элемент собственного времени ds является инвариантом и определяется как

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu. \tag{3.1}$$

Поэтому действие свободной частицы остается тем же:

$$S[x] = -m \int_A^B ds = -m \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}. \tag{3.2}$$

Параметр τ, параметризующий кривую $x(\tau)$, вообще говоря, произволен. Достоинство лагранжева формализма состоит в том, что с его помощью нетрудно получить уравнение движения в произвольной параметризации. Однако физическим объектом является не функция $x(\tau)$, а мировая линия, то есть кривая в многообразии M. Математически этому соответствует тот факт, что действие (3.2) *репараметризационно-инвариантно*, то есть инвариантно относительно преобразований

$$\tau = \alpha(\tau'), \tag{3.3}$$

где α произвольная гладкая взаимно-однозначная вещественная функция. Мы можем выбрать такую параметризацию, что

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = C^2 = \text{const}\,. \tag{3.4}$$

В этом случае $s = C\tau + \text{const}$, то есть параметр τ и есть, с точностью до множителя, собственное время. Репараметризация (3.3) является *калибровочным преобразованием*, а условие (3.4) — условием, фиксирующим калибровку. Общее лагранжево уравнения для $x(\tau)$ довольно сложное, но в калибровке (3.4) оно упрощается и совпадает с приведенным в предыдущей лекции *уравнением геодезической*

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \tag{3.5}$$

где $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ суть символы Кристоффеля для связности Леви—Чивиты (2.27).

То есть мировая линия частицы, свободно падающей в гравитационном поле, является геодезическая. В данном контексте важно проверить согласованность условия фиксации калибровки (3.4) с решением. То есть, предположим, что условие (3.4) выполняется при $\tau = 0$. Что гарантирует выполнение этого условия при произвольных τ? Очевидно, $g(\dot{x}, \dot{x})$ должна быть сохраняющейся величиной:

$$\frac{d}{d\tau}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right) = 0 \tag{3.6}$$

на решениях уравнения (3.5). Это нетрудно проверить.

Сохранение $g(\dot{x}, \dot{x})$ имеет важное следствие для геометрии геодезических. Из него немедленно следует следующая теорема. Все геодезические делятся на три класса:

1) времениподобные геодезические, для которых $g(\dot{x}, \dot{x}) > 0$ на всем протяжении;

2) светоподобные геодезические, для которых $g(\dot{x}, \dot{x}) = 0$;

3) пространственноподобные геодезические, для которых $g(\dot{x}, \dot{y}) < 0$.

Действие (3.2) дает времениподобные геодезические, так что мы можем положить $C = 1$ в (3.4) и отождествить параметр τ с собственным временем s. Светоподобные геодезические не могут быть получены ни из какого действия. Однако физически их можно рассматривать как предел времениподобных мировых линий при $m \to 0$. Это следует из того, что в любых процессах взаимодействия частиц частицы малой массы будут чаще всего вылетать с большими скоростями dx^i/dx^0, так что в пределе нулевой массы они будут всегда вылетать со скоростью света, что соответствует $g(\dot{x},\dot{x})=0$. Пространственноподобные геодезические могут быть формально получены из действия $\mu\int d\tau\,\sqrt{-g(\dot{x},\dot{x})}$, но исключаются как мировые линии частиц из соображений причинности.[5]

Чтобы прояснить связь с ньютоновской механикой, запишем действие нерелятивистской частицы в виде

$$S=\int dt\,\left(-m+\frac{mv^2}{2}-m\phi(\boldsymbol{r})\right), \tag{3.7}$$

где первый член $-m$ добавлен просто для согласованности с релятивистским действием, а $\phi(\boldsymbol{r})$ — ньютоновский гравитационный потенциал. Сравнивая с (3.2), мы получим

$$ds=\left(1-\frac{v^2}{2}+\phi\right)\,dt.$$

Считая второе и третье слагаемое малым и учитывая, что $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}\,dt$, получаем

$$ds^2=(1+2\phi)dt^2-d\boldsymbol{r}^2. \tag{3.8}$$

Мы видим, что в данном приближении

$$g_{00}=1+2\phi,\qquad g_{0k}=0,\qquad g_{ik}=-\delta_{ik}. \tag{3.9}$$

Это связывает гравитационный потенциал с метрическим тензором. В дальнейшем, изучая нерелятивистский предел уравнений Эйнштейна, мы увидим, как получить ньютоновскую форму гравитационного потенциала $\phi(\boldsymbol{r})=-G\sum_i m_i/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|$ для системы медленно движущихся тел с массами m_i в точках $\boldsymbol{r}_i$.

Рассмотрим теперь гамильтонову формулировку уравнений движения частицы в чуть более общем виде — в присутствии электромагнитного поля:

$$S[x]=\int_A^B(-m\,ds-eA_\mu\,dx^\mu)=\int_{\tau_A}^{\tau_B}d\tau\,(-m\sqrt{g(\dot{x},\dot{x})}-eA(\dot{x})). \tag{3.10}$$

Если мы наложим калибровочное условие (5.5) с $C=1$ (то есть $\tau=s$), мы получим уравнение движения

$$\ddot{x}^\lambda+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu=eF^\lambda{}_\kappa\dot{x}^\kappa,\qquad F_{\mu\nu}=A_{\nu;\mu}-A_{\mu;\nu}=A_{\nu,\mu}-A_{\mu,\nu}. \tag{3.11}$$

Теперь снова будем считать «время» τ произвольным параметром. Эта произвольность ведет в гамильтоновом подходе к возникновению связи. Действительно, нетрудно проверить, что матрица $\partial^2L/\partial\dot{x}^\mu\partial\dot{x}^\nu$ вырождена и имеет ранг 3. Следовательно, имеется, по крайней мере, одна связь между обобщенными координатами x^μ и импульсами $P_\mu=\partial L/\partial\dot{x}^\mu$. Это отражает тот факт, что на самом деле частица имеет три степени свободы, а не четыре. Действительно, имеем

$$P_\mu=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\mu}=-\frac{mg_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{g(\dot{x},\dot{x})}}-eA_\mu. \tag{3.12}$$

Отсюда немедленно получаем *связь* между каноническими переменными

$$\chi(x,P)\equiv g^{\mu\nu}(P_\mu+eA_\mu)(P_\nu+eA_\nu)-m^2=0 \tag{3.13}$$

Для гамильтониана имеем

$$H_\tau(x,P)=P_\mu\dot{x}^\mu-L(x,\dot{x})=0 \tag{3.14}$$

Как показал Дирак, наличие связи означает, что мы имеем право модифицировать гамильтониан, добавив связь χ:

$$H'_\tau(x,P)=H_\tau(x,P)+\alpha(x,P)\chi(x,P)=\alpha(x,P)\left(g^{\mu\nu}(P_\mu+eA_\mu)(P_\nu+eA_\nu)-m^2\right). \tag{3.15}$$

[5] В квантовой теории поля частицы с мнимой массой $m=\mathrm{i}\mu$ исключаются по другой причине. Таким частицам отвечают конфигурации полей вблизи максимума, а не минимума потенциальной энергии, так что появление мнимой массы означает абсолютную неустойчивость «вакуумной» конфигурации. Решения же с вещественной массой не допускают распространения возмущений вне светового конуса.

где $\alpha(x,P)$ — произвольная несингулярная функция канонических переменных. Очевидно,

$$\dot\chi = \{H'_\tau, \chi\} = \alpha\{\chi,\chi\} + \{\alpha,\chi\}\chi = 0$$

на уравнении связи. Это значит, что условие согласованности связи с эволюцией системы не накладывает никаких дополнительных связей на систему. Стандартным образом получаем уравнения движения

$$\begin{aligned}
\dot P_\mu &= -\frac{\partial H'_\tau}{\partial x^\mu} = -\alpha\left(\partial_\mu g^{\lambda\nu}(P_\lambda + eA_\lambda) + 2eg^{\lambda\nu}\partial_\mu A_\lambda\right)(P_\nu + eA_\nu),\\
\dot x^\mu &= \frac{\partial H'_\tau}{\partial P_\mu} = 2\alpha g^{\mu\nu}(P_\nu + eA_\nu).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Если наложить калибровочное условие (3.4), то отсюда опять следует уравнение движения (3.11).

Связь (3.13) дает возможность немедленно получить уравнение Гамильтона—Якоби для частицы в гравитационном поле. Рассмотрим действие S на решении уравнений движения как функцию конечного значения «времени» $\tau = \tau_B$ и конечного положения частицы x при постоянном начальном «времени» и начальном положении частицы

$$S(\tau,x) = \int d\tau\, L(x^\bullet, \dot x^\bullet) = \int d\tau\,(P_\mu \dot x^\mu - H_\tau) = \int (P_\mu\, dx^\mu - H_\tau\, d\tau).$$

Отсюда имеем

$$dS(\tau,x) = P_\mu\, dx^\mu - H_\tau\, d\tau. \tag{3.17}$$

В силу того, что $H_\tau = 0$, зависимость от τ пропадает. Имеем

$$P_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}. \tag{3.18}$$

Подставляя это в уравнение связи (3.13), получаем

$$g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} + eA_\mu\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} + eA_\nu\right) - m^2 = 0. \tag{3.19}$$

Полученное *уравнение Га́мильтона—Якóби* не зависит от параметризации кривой и в этом смысле калибровочно-инвариантно. Это уравнение имеет очевидный предел при $m \to 0$, и дает в этом пределе уравнение для светоподобных кривых. При $A = 0$ эти кривые являются светоподобными геодезическими.

Как с помощью уравнения Гамильтона—Якоби можно решить задачу о движении частицы? Предположим, что нам удалось найти семейство решений $S(x,\alpha)$, зависящих от параметра α. Рассмотрим эволюцию во «времени» производной $\partial S(x,\alpha)/\partial\alpha$:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial S(x(\tau),\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\dot x^\mu\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha}(P_\mu\dot x^\mu) = \frac{\partial}{\partial\alpha}(P_\mu\dot x^\mu - H_\tau) = \frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial\alpha} = 0.$$

Значит,

$$\frac{\partial S(x(\tau),\alpha)}{\partial\alpha} = -\beta,$$

где β — новая константа. Это — *алгебраическое* уравнение на x^μ. Теперь, если нам удалось найти решение, зависящее от $d-1$ параметров $\alpha_1,\ldots,\alpha_{d-1}$, такое что всюду

$$\det\frac{\partial^2 S}{\partial x^i\,\partial\alpha_j} \neq 0,$$

мы имеем $d-1$ алгебраических уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_i} = -\beta^i, \qquad i = 1,\ldots,d-1, \tag{3.20}$$

позволяющих найти $d-1$ переменных $x^1,\ldots x^{d-1}$ как функции времени x^0. Такое решение называется *полным интегралом* уравнения. $2(d-1)$ констант α_i, β^i являются параметрами решения.

Их ровно столько, сколько должно быть начальных данных в задаче $(x^i, \frac{dx^i}{dx^0})$.[6] Собственно, доказательство существования полного интеграла уравнения Гамильтона—Якоби основано на том, что за переменные α_i, β^j можно принять начальные значения импульсов и координат системы. Вообще говоря, такое решение существует только локально, в некоторой окрестности $U_x \subseteq M$ каждой неособой точки x. Системы, для которых существуют глобальное полное решение, называются *интегрируемыми*. Интегрируемость системы тесно связана применимостью метода разделения переменных к данной системе. Метод разделения переменных в уравнении Гамильтона—Якоби будет позже продемонстрирован в конкретных задачах.

Теперь рассмотрим поля на римановом многообразии. Мы знаем, что действие для полей записывается в виде интеграла по пространству-времени от плотности лагранжиана. В общей теории относительности этот интеграл должен быть инвариантен по отношению к преобразованиям координат общего вида (*общековариантен*). Для этого, прежде всего, нам нужно иметь инвариантную форму объема. Хорошо известно, что форма объема $d^dx = \bigwedge_\mu dx^\mu$ преобразуется по закону

$$d^dx = J\,d^dx', \qquad J = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} = \det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\mu}\right). \tag{3.21}$$

Множитель J называется *якобианом* преобразования. С другой стороны, метрический тензор преобразуется по правилу

$$g_{\mu\nu} = g'_{\kappa\lambda}\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu},$$

а, значит, в силу того, что детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов, имеем

$$\det(g_{\mu\nu}) = \det(g'_{\mu\nu})J^{-2}. \tag{3.22}$$

Мы будем пользоваться общепринятым обозначением

$$g = \det(g_{\mu\nu}). \tag{3.23}$$

Отсюда мы видим, что величина

$$dV = \sqrt{|g|}\,d^dx \tag{3.24}$$

инвариантна относительно преобразований координат. Точнее говоря, она инвариантна относительно преобразований координат, сохраняющих ориентацию. В случае преобразований, меняющих ориентацию, формально говоря $dV = -dV'$. Тем не менее, коль скоро мы интересуемся интегралами, вместе с изменением знака элементом объема меняет ориентацию и область, по которой ведется интегрирование, так что $\int d^dx = \int |J|\,d^dx'$ и мы можем рассматривать элемент объема dV как инвариантную величину.

Таким образом, величина $\sqrt{|g|}$ является не скаляром, а общим множителем компонент тензора, называемого *формой объема*:

$$dV = \frac{1}{d!}\sqrt{|g|}\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_d}\,dx^{\mu_1}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_d} = \sqrt{|g|}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^d,$$

где $\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_d}$ — единственный полностью антисимметричный символ степени d, нормированный равенством $\varepsilon_{01\ldots d-1} = 1$. Легко проверить, что

$$\nabla_\lambda(\sqrt{|g|}\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_d}) = \left(\partial_\lambda\sqrt{|g|} - \sqrt{|g|}\Gamma^\mu_{\lambda\mu}\right)\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_d}$$

Из матричного тождества $\operatorname{tr}(G^{-1}\partial G) = \partial\log\det G$ немедленно находим

$$\Gamma^\mu_{\lambda\mu} = \partial_\mu\log\sqrt{|g|} \tag{3.25}$$

и

$$\nabla_\lambda(\sqrt{|g|}\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_d}) = 0. \tag{3.26}$$

[6]Более того, переменные α_i и β^i представляют собой особые (стационарные) канонические переменные в фазовом пространстве системы, а формулы (3.18) и (3.20) задают каноническое преобразование от переменных P_i, x^i к переменным α_i, β^i.

Отсюда следует соотношение, которое понадобится нам ниже:

$$\sqrt{|g|}\nabla_\lambda a^\lambda = \partial_\lambda(\sqrt{|g|}a^\lambda). \tag{3.27}$$

Таким образом, будем писать

$$S[\phi] = \int d^d x\, \sqrt{|g|}\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet\phi), \tag{3.28}$$

где $\mathcal{L}$ — общековариантная плотность лагранжиана. Для скалярных полей построить такие лагранжианы несложно. Например, все лагранжианы вида

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet\phi) = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}G_{ij}(\phi)\,\partial_\mu\phi^i\,\partial_\nu\phi^j - U(\phi) - RV(\phi) \tag{3.29}$$

являются общековариантными. Вообще, большой класс общековариантных лагранжианов можно построить из лоренц-инвариантных лагранжианов заменой

$$\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}, \qquad \partial_\mu \to \nabla_\mu. \tag{3.30}$$

Получаемые таким способом лагранжианы называются лагранжианами с *минимальной* связью материи с гравитацией. Например, лагранжиан (3.29) будет лагранжианом с минимальной связью, если $V(\phi) = 0$. Мы будем ограничиваться случаями минимальной связи.

Задачи

1. Получите (3.5) из действия (3.2) при условии (3.4).

2. Докажите (3.6).

3. Покажите (для плоского пространства-времени), что возможность передачи сигнала вдоль пространственноподобных геодезических означала бы возможность передачи сигнала в собственное прошлое.

4. Найдите матрицу $(\partial^2 L/\partial\dot x^\mu\partial\dot x^\nu)$ для действия (3.10) и покажите, что вектор $\dot x^\mu$ является собственным вектором этой матрицы с нулевым собственным значением.

5. Покажите, что гамильтониан H_τ равен нулю.

6. Покажите, что при $\alpha = \text{const}$ из (3.16) следует уравнение (3.11).

7. Покажите, что условие (3.6) выполняется на решениях уравнения (3.11).

8. Рассмотрим двумерную поверхность в пространстве-времени, заданную гладкой функцией $\varphi(\tau,\sigma) \in M$ двух вещественных параметров. При каждом данном значении σ функция φ задает кривую $\varphi(\cdot,\sigma)$, а при каждом значении τ — кривую $\varphi(\tau,\cdot)$. Обозначим через $\dot\varphi(\tau,\sigma) = \frac{\partial}{\partial\tau}\varphi^\mu(\tau,\sigma)\,\partial_\mu$, $\varphi'(\tau,\sigma) = \frac{\partial}{\partial\sigma}\varphi^\mu(\tau,\sigma)\,\partial_\mu$ касательные к двум семействам кривых — при данных σ и при данных τ. Покажите, что для связности Леви—Чивиты

$$\nabla_{\dot\varphi}\varphi' = \nabla_{\varphi'}\dot\varphi.$$

9. Приливные силы. В условиях предыдущей задачи предположим, что кривые первого сорта являются геодезическими с собственным временем τ: $\nabla_{\dot\varphi}\dot\varphi = 0$. Можно сказать, что вектор $\varphi'(\tau,\sigma)\,d\sigma$ соединяет две соседние геодезические в данный момент собственного времени τ. Таким образом, вторая ковариантная производная по τ будет давать относительное ускорение соответствующих материальных точек. Докажите, что

$$\nabla^2_{\dot\varphi}\varphi' = R(\dot\varphi,\varphi')\dot\varphi \quad \text{или} \quad \nabla^2\varphi'^{\mathbf{1}} = R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{234}}\dot\varphi^{\mathbf{2}}\dot\varphi^{\mathbf{3}}\varphi'^{\mathbf{4}}\,d\tau^2. \tag{3.31}$$

Семинар 3

Физическая интерпретация метрики

Системы отсчета в общей теории относительности существуют только локально, поэтому каждой системе координат соответствует семейство систем отсчета в каждой точке. Мы будем разбирать физическую интерпретацию геометрических данных. Мы покажем, что:

1. Интервалы времени в системе отсчета даются формулой $d\tau = \sqrt{g_{00}}\,dt$.

2. Пространственные расстояния между близкими точками даются метрикой

$$dl^2 = \gamma_{ik}\,dx^i\,dx^k, \qquad \gamma_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^{ik} = -g^{ik}. \tag{3.32}$$

3. События в расположенных поблизости точках одновременны в локальной системе отсчета, связанной с данной системой координат, если

$$dx^0 = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}\,dx^i. \tag{3.33}$$

4. На римановом многообразии на достаточно малой карте можно ввести *синхронную систему координат* с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ik}\,dx^i\,dx^k. \tag{3.34}$$

   Временные линии в этой системе координат являются геодезическими, а пространственные слои ортогональны им в каждой точке. Локальную систему координат можно построить, решая некоторое уравнение Гамильтона—Якоби.