

Лекция 10

Решение Шварцшильда

До сих пор мы рассматривали только слабые гравитационные поля, либо предполагая малость тензора-энергии импульса, либо рассматривая систему вдали от источников. Есть большой соблазн думать, что слабое гравитационное поле описывается линейной теорией, подобной электродинамике, однако это *не так*. Получаемая таким способом теория не является математически замкнутой. Это выражается, прежде всего, в том, что возмущение метрики $h_{\mu\nu}$ влияет на измерение расстояний и времени и, таким образом, не допускает масштабирования: если мы увеличим поля так, чтобы $h_{\mu\nu}$ было бы сравнимо с $\eta_{\mu\nu}$, мы получим абсурдные результаты для движения частиц в поле. Поэтому нам с необходимостью надо рассмотреть сильное поле и понять, к каким эффектам приводит сильная нелинейность. Как мы увидим, неизбежным следствием уравнений поля оказываются особенности пространственно-временного многообразия.

В этой лекции мы построим сферически-симметричное решение уравнений Эйнштейна — *решение Шварцшильда* — в четырехмерном пространстве-времени, а в следующей изучим движение частиц в таком поле. Формально это решение будет стационарным, то есть компоненты метрики не будут зависеть от времени. Важный вывод будет состоять в том, что стационарность этого решения фиктивна и связана с неполнотой выбранной системы координат: она определена только в одной карте и не описывает многообразие целиком.

Что могли бы означать слова «сферически-симметричное решение» в применении к искривленному пространству-времени? Чтобы это понять, разберем, что мы понимаем под сферически-симметричным решением теории поля в пространстве-времени Минковского. Плоское пространство-время обладает группой симметрии $SO(3)$ вращений трехмерного пространства. Эта группа порождается тремя генераторами

$$J_x = z \partial_y - y \partial_z, \quad J_y = x \partial_z - z \partial_x, \quad J_z = y \partial_x - x \partial_y, \quad (10.1)$$

образующими алгебру Ли $so(3) \simeq su(2)$ относительно коммутатора:

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=x}^z \epsilon^{ijk} J_k, \quad \epsilon^{xyz} = 1, \quad \epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik} = -\epsilon^{ikj}. \quad (10.2)$$

Генераторы J_i являются векторными полями Киллинга для плоской метрики. Под сферически-симметричными решениями мы понимаем решения, инвариантные относительно группы вращений $SO(3)$. В терминах векторных полей Киллинга это выражается так

$$\delta_{J_i} A = 0, \quad (10.3)$$

где $A(x)$ — некоторое тензорное поле (сечение тензорного расслоения), а δ_ξ — уже знакомая нам производная Ли.

Для записи сферически-симметричных решений удобно выбрать сферические координаты t, r, ϑ, φ ,

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta, \quad (10.4)$$

причем метрика будет даваться формулой

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (10.5)$$

где $d\Omega^2$ — метрика на единичной сфере:

$$d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2. \quad (10.6)$$

В этих координатах векторы Киллинга J_i имеют вид

$$J_x = \sin \varphi \partial_\vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta \cos \varphi \partial_\varphi, \quad J_y = -\cos \varphi \partial_\vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta \sin \varphi \partial_\varphi, \quad J_z = -\partial_\varphi. \quad (10.7)$$

Видно, что векторные поля J_i действуют на сферах $r, t = \text{const}$, причем группа $SO(3)$ действует на сфере транзитивно. Поэтому скалярные поля для сферически-симметричного решения должны были бы быть функциями только от r и t .

В искривленном пространстве-времени будем действовать точно так же. Мы назовем метрику сферически-симметричной, если в ней имеются три пространственноподобных векторных поля Киллинга J_i , удовлетворяющих коммутационным соотношениям (10.2) алгебры Ли $so(3)$. Условие (10.3) для метрики выполняется в силу того, что J_i являются векторами Киллинга. В более сложных случаях, когда кроме гравитационного поля есть поля материи, на них нужно наложить условие (10.3).

Самый простой способ построить сферически-симметричную метрику состоит в том, чтобы «расслоить» пространство-время на двумерные сферы со сферическими координатами на каждой. На двумерных сферах мы выберем координаты ϑ, φ таким образом, чтобы векторы (10.7) были векторами Киллинга. Две остальные координаты мы обозначим через t и r по аналогии с плоским пространством. Немного ниже мы уточним их определение.

Требование, чтобы векторные поля J_i являлись полями Киллинга,

$$J_{i\mu;\nu} + J_{i\nu;\mu} = 0, \quad J_{i\mu} = g_{\mu\nu} J_i^\nu,$$

накладывает ограничения на метрику. Прежде всего, для J_z имеем

$$0 = J_{z\mu;\nu} + J_{z\nu;\mu} = -g_{\mu\varphi,\nu} - g_{\nu\varphi,\mu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\varphi} = -g_{\mu\nu,\varphi}, \quad (10.8)$$

откуда следует, что компоненты метрики не зависят от φ .

Далее мы будем полагать $i = x, y$. Подставляя $\mu, \nu = \vartheta, \varphi$, получаем уравнения, из которых находим

$$g_{\varphi\vartheta} = 0, \quad g_{\varphi\varphi} = g_{\vartheta\vartheta} \sin^2 \vartheta, \quad \partial_\vartheta g_{\vartheta\vartheta} = 0. \quad (10.9)$$

Это значит, что индуцированная метрика на каждой сфере пропорциональна стандартной метрике $d\Omega^2$ единичной сферы, то есть обладает $SO(3)$ -симметрией.

Теперь, выбирая $\mu = r, t, \nu = \vartheta, \varphi$, немедленно получаем

$$g_{\alpha a} = 0, \quad \alpha = t, r, \quad a = \vartheta, \varphi, \quad (10.10)$$

то есть подпространства $\vartheta = \text{const}, \varphi = \text{const}$ ортогональны сферам. Заметим, что это означает, что ковекторы $\bar{g}(J_i) = g_{\mu\nu} J_i^\nu dx^\mu$ лежат в кокасательном пространстве к сфере, так же как векторы J_i лежат на касательном пространстве. Это же условие достаточно для того, чтобы двумерные символы Кристоффеля на сферах совпадали с соответствующими четырехмерными. Получаем

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{tr} dt dr + g_{rr} dr^2 + g_{\vartheta\vartheta} d\Omega^2.$$

Из оставшихся условий следует, что

$$\partial_\vartheta g_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = t, r, \quad (10.11)$$

то есть все четыре функции $g_{tt}, g_{tr}, g_{rr}, g_{\vartheta\vartheta}$ зависят только от t и r .

Заметим теперь, что метрика в факторпространстве $M/SO(3)$, где $SO(3)$ — группа вращений, порожденная векторами Киллинга, есть метрика общего вида. Поэтому преобразованиями координат t, r мы можем зафиксировать две функции. Во-первых, потребуем, чтобы направления ∂_t и ∂_r были ортогональны, а во-вторых, определим r условием, чтобы длина большой окружности на любой из сфер $t, r = \text{const}$ равнялась $2\pi r$. Это значит, что

$$g_{tr} = 0, \quad g_{\vartheta\vartheta} = -r^2. \quad (10.12)$$

Оставшиеся компоненты метрики g_{tt}, g_{rr} удобно записать в экспоненциальном виде e^{2k}, e^{2h} . Итак, сферически-симметричную метрику всегда можно представить в виде

$$ds^2 = e^{2k(t,r)} dt^2 - e^{2h(t,r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (10.13)$$

Метрика в таких координатах имеет диагональный вид, так что обратную метрику легко найти:

$$g^{\bullet\bullet} = e^{-2k(t,r)} \partial_t \otimes \partial_t - e^{-2h(t,r)} \partial_r \otimes \partial_r - r^{-2} (\partial_\vartheta \otimes \partial_\vartheta + \sin^{-2} \vartheta \partial_\varphi \otimes \partial_\varphi). \quad (10.14)$$

Будем точкой обозначать производную по t и штрихом — по r . Имеем для ненулевых символов Кристоффеля

$$\begin{aligned}\Gamma_{tt}^t &= \dot{k}, & \Gamma_{rt}^t &= k', & \Gamma_{tt}^r &= k'e^{2k-2h}, \\ \Gamma_{rt}^r &= \dot{h}, & \Gamma_{rr}^t &= \dot{h}e^{2h-2k}, & \Gamma_{rr}^r &= h', \\ \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = r^{-1}, & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -re^{-2h}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -re^{-2h} \sin^2 \vartheta, \\ \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi &= \text{ctg } \vartheta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta &= -\sin \vartheta \cos \vartheta.\end{aligned}\tag{10.15}$$

Отсюда находим ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$\begin{aligned}R_t^t &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' + 2r^{-1}k')e^{-2h}, \\ R_r^r &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' - 2r^{-1}h')e^{-2h}, \\ R_r^t &= 2r^{-1}e^{-2k}\dot{h}, \\ R_\vartheta^\vartheta &= R_\varphi^\varphi = -r^{-2}(1 + (rh' - rk' - 1)e^{-2h}),\end{aligned}\tag{10.16}$$

Решим уравнения Эйнштейна в вакууме $R_\nu^\mu = 0$. Из третьего уравнения немедленно имеем $\dot{h} = 0$, то есть $h = h(r)$. В первом и втором уравнениях выпадают все члены с производными по времени, и мы имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной r . Используя комбинации $R_t^t \mp R_r^r$, получаем

$$\begin{aligned}k' + h' &= 0, \\ k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h') &= 0, \\ r(k' - h') &= e^{2h} - 1.\end{aligned}$$

Из первого уравнения немедленно имеем

$$k(t, r) = F(t) - h(r).$$

Функцию $F(t)$ можно устранить преобразованием координат $t' = \int dt e^{F(t)}$, поэтому без ограничения общности положим ее равной нулю. Имеем

$$h = -k, \quad k'' + 2k'^2 + \frac{2k'}{r} = 0, \quad \frac{2 dk}{e^{-2k} - 1} = \frac{dr}{r}.$$

Третье уравнение легко решается

$$e^{2k} = 1 - \frac{r_g}{r},$$

где r_g — некоторая постоянная размерности длины. Подставляя это решение во второе уравнение, убеждаемся, что оно тоже выполнено. Окончательно имеем

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\Omega^2.\tag{10.17}$$

Это решение называется *решением Шварцшильда*, а постоянная r_g — *гравитационным радиусом*.

Величину r_g легко выразить через полную энергию (массу) системы. Действительно, рассмотрим асимптотику решения Шварцшильда при $r \rightarrow \infty$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Эта асимптотика не соответствует виду (7.23), так как для нее $h = 0$ и, следовательно, $\psi_{rr} \neq 0$. Но ее можно привести к нужному виду малым калибровочным преобразованием $r \rightarrow r + \frac{r_g}{2}$. Тогда в первом порядке по r_g/r имеем

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\Omega^2).$$

Переходя к «декартовым» координатам (10.4), находим $h_{ij} = \delta_{ij}h_{tt}$, $h_{tt} = -r_g/r$, $h = 2r_g/r$, откуда находим $\psi_{ij} = h_{ij} + \frac{1}{2}h\delta_{ij} = 0$, $\psi_{tt} = h_{tt} - \frac{1}{2}h = -2r_g/r$. Это согласуется с асимптотическим решением (7.23) при $A = -2r_g$. Сравнивая с (7.27), получаем

$$r_g = 2GM.\tag{10.18}$$

Из сферической симметрии решения физически ясно, что момент импульса системы, создающей гравитационное поле, равен нулю. Это также строго следует из того, что в асимптотике $\psi_{0i} = 0$.

Важно отметить, что решение Шварцшильда является единственным (с точностью до преобразований координат) сферически-симметричным решением уравнений Эйнштейна в вакууме для любого сферического слоя. Это значит, что радиальные движения сферически-симметричной материи, как и в ньютоновской теории, не влияют на гравитационное поле в пустом пространстве снаружи.

Давайте изучим глобальные свойства решения (10.17). Если размер гравитирующих тел больше r_g , то решение (10.17) хорошо определено. Чтобы получить полное решение, мы должны сплести его с решением в области, где $T^{\mu\nu} \neq 0$. В то же время, ничто не может гарантировать, что материя распределена достаточно неплотно. Вполне возможно, что сил отталкивания не хватит, чтобы удержать материю за пределами сферы $r = r_g$, на которой метрика имеет особенность. Более того, может так случиться, что при ненулевом, но небольшом тензоре энергии-импульса особенность просто сдвинется внутрь, но не исчезнет. Поэтому попробуем понять смысл этой особенности. Для этого найдем промежутки времени на прямых $r, \vartheta, \varphi = \text{const}$ и расстояния на плоскостях $t = \text{const}$. Пусть частица неподвижно висит в шварцшильдовых координатах. Пусть dt — малый промежуток «глобального» координатного времени. Промежуток физического времени по часам частицы (ее собственного времени) $d\tau$ равен

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} dt. \quad (10.19)$$

Эта величина стремится к нулю при $r \rightarrow r_g$. Значит, прямая $r = r_g, \vartheta, \varphi = \text{const}$ изотропна. Позже мы увидим, что на самом деле эта прямая является в пространстве-времени *единственной точкой*.

Теперь перейдем к измерениям расстояний в пространственных слоях. Так как система координат Шварцшильда имеет нулевые компоненты g_{0i} , пространственная часть метрики полностью определяет расстояния между точками. Мы немедленно получаем, что расстояния между точками на любой сфере $r = \text{const}$, в том числе и на сфере Шварцшильда $r = r_g$, определяются стандартной метрикой на сфере радиуса r :

$$dl_{\text{сф}}^2 = r^2 d\Omega^2.$$

Расстояния же вдоль радиуса растут с приближением к сфере Шварцшильда:

$$dl_{\text{рад}} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} dr.$$

Нетрудно проверить, что расстояние от сферы Шварцшильда до любой близлежащей точки (и, следовательно, до любой вообще точки) конечно. Пусть $r - r_g \ll r_g$. Тогда имеем

$$l_{\text{рад}}(r, r_g) = \int dr \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} \simeq \sqrt{r_g} \int \frac{dr}{\sqrt{r - r_g}} = 2\sqrt{r_g(r - r_g)}.$$

Это значит, что сфера Шварцшильда не «утолщается» в пространственном направлении.

Теперь покажем, что эти координаты не покрывают все физическое пространственно-временное многообразие. Для этого рассмотрим изотропные (светоподобные) кривые в плоскости (t, r) . В силу симметрии системы эти кривые должны быть геодезическими. Полагая $d\vartheta = d\varphi = 0$ и $ds = 0$, получаем

$$dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (10.20)$$

Знак «+» отвечает «фотону», летящему из центра, а знак «-» — «фотону», летящему к центру. Это уравнение нетрудно проинтегрировать, но даже без интегрирования ясно, что будет происходить с фотоном в будущем. Фотон, удаляющийся от центра, постепенно выйдет на асимптотику $r = t$ и уйдет на бесконечность, в то время как «падающий» фотон будет приближаться к радиусу Шварцшильда по закону $r - r_g \sim e^{-t/r_g}$. Никакая частица не может обогнать свет и, тем самым, не может пересечь сферу Шварцшильда. Тем самым, массы никогда не достигнут этой сферы и проблема сингулярности просто не возникнет. Сфера Шварцшильда недостижима, а координаты внутри сферы Шварцшильда не являются продолжением карты вне сферы Шварцшильда.

Казалось бы, мы решили проблему сингулярности. Это так и не так. Это так, если мы наблюдаем за системой издалека. Действительно, удаленный наблюдатель будет видеть как частицы приближаются к сфере Шварцшильда, образуя вокруг нее тонкий слой, но никогда не пересекают ее. В тоже время удаленный наблюдатель будет замечать, как замедляется течение времени на падающих часах. На самом деле это время будет замедляться так быстро, что падающая частица достигнет радиуса Шварцшильда (и окажется в абсолютном будущем для удаленного наблюдателя!) за *конечное собственное время*.

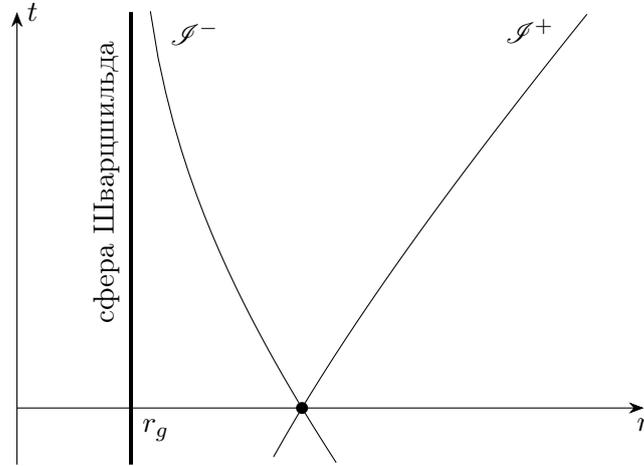


Рис. 10.1. Изотропные геодезические \mathcal{S}^\pm в шварцшильдовой метрике, соответствующие двум знакам в уравнении (10.20). Кривая \mathcal{S}^- приближается к сфере Шварцшильда, но никогда не достигает ее. Кривая \mathcal{S}^+ уходит на бесконечность. Область внутри сферы Шварцшильда не покрывается картой и, на самом деле, не имеет смысла.

Чтобы убедиться в этом, найдем времениподобную геодезическую в плоскости (t, r) . Проще решить не уравнение геодезической (4.6), а уравнение Гамильтона—Якоби (4.20):

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = m^2. \tag{10.21}$$

Умножив обе части на $1 - r_g/r$, мы получим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = m^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2 \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2.$$

Левая часть содержит только производную по t , а правая — только производную по r . Давайте искать решение в таком виде, чтобы обе части были равны константе. Положим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \tag{10.22}$$

Константа E имеет смысл энергии частицы, и связана с однородностью задачи по времени. Так как энергия всюду входит в виде квадрата, мы будем считать ее положительной. Теперь имеем

$$S(t, r) = -Et + S_r(r),$$

и уравнение превращается в уравнение для S_r :

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 = E^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} - m^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}.$$

Отсюда получаем

$$S_r(r) = \pm \int dr \frac{E}{1 - \frac{r_g}{r}} \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}.$$

Дифференцируя полное действие $S(t, r, E)$ по параметру E , имеем

$$-t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t \pm \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}},$$

где t_0 — новая константа, имеющая смысл «начального» момента времени. Итак

$$t - t_0 = \pm \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}} \quad (10.23)$$

Это — алгебраическое уравнение, задающее мировую линию частицы. Мы сейчас не будем изучать подробно это уравнение и свойства его решений. Мы сделаем это в следующий раз. Нас интересует собственное время и мы его выпишем:

$$d\tau = ds = -\frac{dS}{m} = \frac{E}{m} dt - \frac{dS_r(r)}{m} = \pm \frac{m}{E} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (10.24)$$

Найдем полное собственное время, которое требуется частице, чтобы переместиться из точки $r = r_0$ в точку r_g . Выбирая нижний знак, а затем меняя направление интегрирования, находим

$$\tau_{\text{пад}} = \frac{m}{E} \int_{r_g}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (10.25)$$

Важно, что собственное время падения *конечно*, так как подынтегральное выражение всюду конечно и *не имеет особенностей* при $r = r_g$. Если $E < m$, имеется особенность при $r = r_g m / \sqrt{m^2 - E^2}$, но это интегрируемая особенность. Она отвечает финитному движению: частица взлетела, а потом начала падать.

Заметим, что

$$d\tau = \frac{m}{E} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt. \quad (10.26)$$

Первый множитель m/E постоянен и для бесконечно удаленной частицы равен $\sqrt{1 - v^2}$, то есть дает замедление времени частицы, связанное с ее «первоначальным» движением. Второй множитель $1 - r_g/r$ дает гравитационное замедление времени, отличное от замедления (10.19) для «неподвижно висящей» частицы.

Чтобы построить координаты, выходящие за пределы шварцшильдовской карты, придется отказаться от статичности метрики. Вместо координат (t, r) удобно будет использовать координаты светового конуса x^\pm . Потребуем, чтобы решения уравнения (10.20) записывались в виде $x^\mp = \text{const}$. Отсюда

$$dx^\pm = dt \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (10.27)$$

Явное интегрирование дает

$$x^\pm = t \pm r^*, \quad r^* = r + r_g \log \left(\frac{r}{r_g} - 1 \right). \quad (10.28)$$

Эти уравнения определяют t, r как функции переменных x^\pm . Важно, что любой паре вещественных чисел (x^-, x^+) можно сопоставить точку в области $r > r_g$. Бесконечному прошлому и бесконечному будущему в шварцшильдовой метрике отвечают пределы $x^- + x^+ \rightarrow \mp\infty$, бесконечно удаленной точке при конечном времени — предел $x^+ - x^- \rightarrow +\infty$, а сфере Шварцшильда — предел $x^+ - x^- \rightarrow -\infty$. Таким образом на $r = r_g$ один из параметров x^\pm может оставаться конечным, но тогда на этом радиусе $t \rightarrow \pm\infty$.

Переменные x^\pm дают возможность построить сразу несколько координатных систем. Начнем с простейшей. Выберем в качестве времени одну из координат светового конуса, например x^+ , а в качестве

пространственной координаты оставим r . Тогда мы получим координаты Эддингтона—Финкельштейна:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr - r^2 d\Omega^2. \quad (10.29)$$

Метрика в этих координатах по-прежнему стационарна. Однако на поверхности $r = r_g$ уже нет особенности: компоненты конечные и гладкие, а метрика невырождена, $g = -r^4 \sin^2 \vartheta \neq 0$. Легко видеть, что кривые $r = r_g, \vartheta, \varphi = \text{const}$ являются изотропными геодезическими. Эти геодезические входят в непрерывное семейство изотропных геодезических $x^- = \text{const}$, которые расходятся от центра при $r > r_g$ и сходятся к центру при $r < r_g$ (Рис. 10.2). Поверхность $r = r_g$ представляет собой *горизонт событий будущего* \mathcal{H}^+ , из-за которого мы не можем получать никаких сигналов, так как все частицы, испущенные под горизонтом событий, не выходят из под него, а падают на сингулярность, которая лежит на линии $r = 0$. Область внутри горизонта событий будущего называют *черной дырой*.

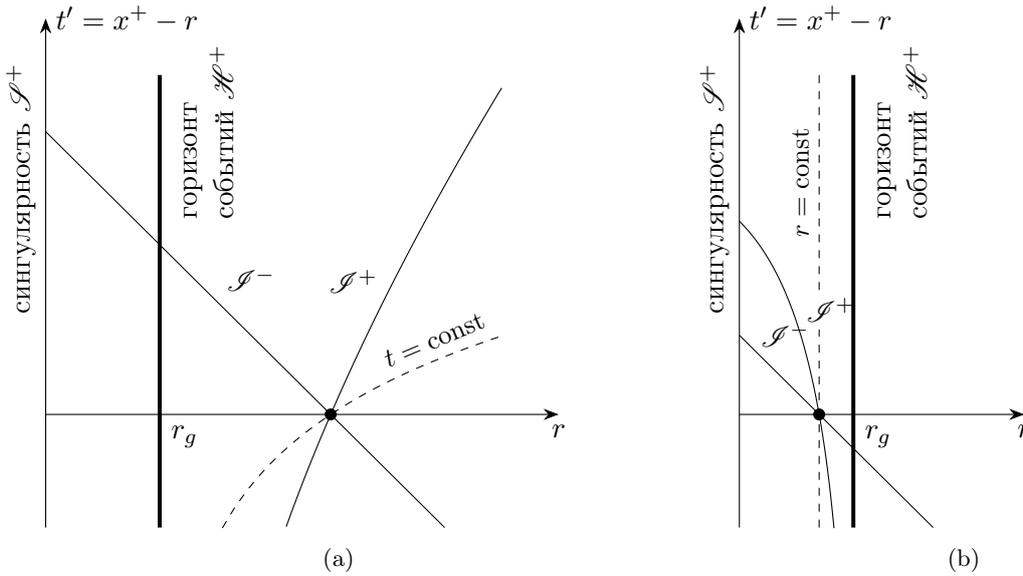


Рис. 10.2. Координаты Эддингтона—Финкельштейна. Для большей наглядности на оси ординат мы отложили время $t' = x^+ - r$, асимптотически переходящее в временную координату пространства Минковского. (а) Начальная точка находится вне горизонта событий. Изотропная кривая \mathcal{S}^- ($x^+ = \text{const}$) пересекает горизонт событий и достигает сингулярности. Изотропная кривая \mathcal{S}^+ ($x^- = \text{const}$) уходит на бесконечность. Пунктирной линией обозначена поверхность синхронных событий, т.е. постоянного шварцшильдовского времени t . (б) Начальная точка находится за горизонтом событий. Обе изотропных геодезических \mathcal{S}^- и \mathcal{S}^+ достигают сингулярности. Одновременными в смысле синхронизации часов здесь будут события на поверхности $r = \text{const}$ (пунктир).

Важный факт состоит в том, что внутри черной дыры частица достигает сингулярности тоже за конечное собственное время. Чтобы это показать, перейдем к координатам Шварцшильда в области *под горизонтом* заменой координат

$$x^+ = t + r^*, \quad r^* = r + r_g \log \left(1 - \frac{r}{r_g}\right).$$

Заметим, что в силу условия $r < r_g$ координата r играет роль времени, а t — пространственной координаты. Теперь для вычисления собственного времени под горизонтом мы снова можем воспользоваться формулой (10.24). Имеем

$$s_{\text{синг}} = \frac{m}{E} \int_0^{r_g} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (10.30)$$

Эта величина, очевидно, конечна.

Координаты Эддингтона—Финкельштейна сохраняют стационарность метрики, но в них мы теряем симметрию по отношению к обращению времени. Дело в том, что линия $r = r_g$ в этих координатах находится в *абсолютном будущем* по отношению ко всей области $r > r_g$ и в шварцшильдовых координатах находится в бесконечном будущем $t \rightarrow +\infty$. Область $r > r_g$ представляет собой одну и ту же

область и в координатах Эддингтона—Финкельштейна и в координатах Шварцшильда, но координаты Эддингтона—Финкельштейна растягивают двумерную сферу $r = r_g$, $t = +\infty$, которая «собирает» все изотропные геодезические типа \mathcal{I}^- , в трехмерный горизонт событий \mathcal{H}^+ , и уводят сферу Шварцшильда в бесконечное прошлое $x^+ = -\infty$. Обозначим карту, покрываемую координатами Эддингтона—Финкельштейна через EF^+ , а карту, покрываемую координатами Шварцшильда через Sc . Тогда $EF^+ \supset Sc$.

Обращению времени в этой конструкции отвечает замена $x^+ \rightarrow -x^-$, что дает альтернативную систему координат Эддингтона—Финкельштейна EF^- :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (dx^-)^2 + 2 dx^- dr - r^2 d\Omega^2. \quad (10.31)$$

Эта система продолжает систему координат Шварцшильда в бесконечное прошлое. В новой системе координат поверхность $r = r_g$ представляет собой *горизонт событий прошлого* \mathcal{H}^- . Сингулярность $r = 0$ в этой области не поглощает частицы, а испускает их. Область внутри горизонта событий прошлого отлична от области внутри горизонта событий будущего, и попасть из нее в черную дыру минуя область $r \geq r_g$ невозможно. Ее называют *белой дырой*. Карта Шварцшильда оказывается пересечением двух карт: $Sc = EF^+ \cap EF^-$.

Как же совместить две картины (10.29) и (10.31)? Для этого надо полностью перейти к координатам светового конуса x^\pm :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r(x^-, x^+)}\right) dx^- dx^+ - r^2(x^-, x^+) d\Omega^2. \quad (10.32)$$

Пока ничего нового, по сути, не произошло. Новая идея состоит в том, чтобы отобразить каждую из переменных x^\pm на полуось. Это отвечает тому, что мы теперь воспринимаем плоскость (t, r) не как предел квадрата со сторонами, параллельными осям t и r , а как предел квадрата со светоподобными сторонами, параллельными осям x^- и x^+ . В координатах Эддингтона—Финкельштейна мы спокойно «уходили на временную бесконечность» вблизи горизонта событий, оставляя конечными координаты x^+ и r . Но в этой бесконечности координата x^- будет стремиться к бесконечности вместе с $t = \frac{1}{2}(x^- + x^+)$. Поэтому неплохо бы ее как-то «поджать». Аналогично, в прошлом неплохо бы «поджать» x^+ . Это достигается в *координатах Крускала—Секереша*

$$u = -2r_g e^{-x^-/2r_g}, \quad v = 2r_g e^{x^+/2r_g}, \quad (10.33)$$

которые остаются конечными на горизонтах событий. Из (10.28) получаем

$$uv = -4r_g^2 e^{r/r_g} \left(\frac{r}{r_g} - 1\right). \quad (10.34)$$

То есть условию $r = r_g$ отвечают две поверхности $u = 0$ и $v = 0$. Шварцшильдовской области $r > r_g$ отвечает квадрант $u < 0, v > 0$, причем значению $r = r_g$ при конечных t соответствует в пространстве (u, v) единственная точка $u = v = 0$. То есть сфера Шварцшильда является *двумерной сферой*, а не трехмерным цилиндром. Это немедленно сказывается на метрике. Она перестает быть сингулярной как на шварцшильдовской сфере, так и на горизонтах событий:

$$ds^2 = \frac{r_g}{r(u, v)} e^{-\frac{r(u, v)}{r_g}} du dv - r^2(u, v) d\Omega^2. \quad (10.35)$$

Здесь r записана как функция новых переменных u, v , которая решает уравнение (10.34).

Систему координат Крускала удобно изобразить графически с помощью *диаграммы Пенроуза* или *конформной* или *причинной диаграммы*. Для этого от некомпактных координат u, v следует перейти к компактным переменным u', v' с помощью замены

$$u = 2r_g \operatorname{tg} u', \quad v = 2r_g \operatorname{tg} v'.$$

В двумерном пространстве (u, v) это преобразование является конформным и сохраняет изотропные направления. Дополнительное *преобразование Вейля*

$$g'_{\mu\nu}(x) = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x)$$

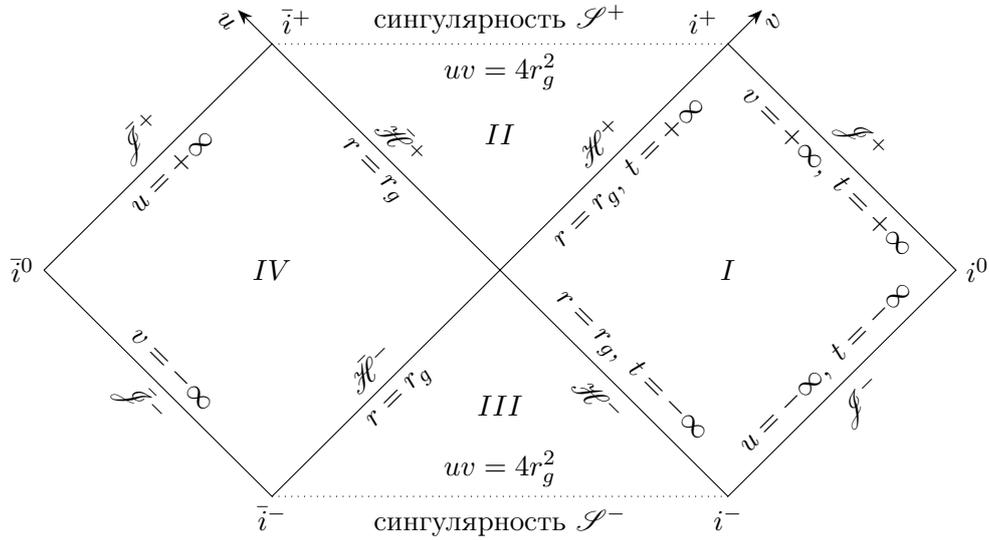


Рис. 10.3. Диаграмма Пенроуза для максимально расширенного многообразия Крускала. I — область, покрываемая картой Шварцшильда; II — черная дыра; III — белая дыра; IV — «зазеркалье». Имеем $I = Sc$, $I \cup III = EF^+$, $I \cup III = EF^-$.

с множителем

$$\Omega(x) = \frac{r(u, v)}{r_g} e^{\frac{r(u, v)}{r_g}} \frac{1}{(1 + u^2/4r_g^2)(1 + v^2/4r_g^2)}$$

отобразит метрику (10.35) в плоскую метрику листа бумаги. В общем случае диаграммы Пенроуза получаются сжатием («компактификацией») координат светового конуса, поэтому изотропные кривые всегда изображаются на них отрезками прямых, лежащими под углом 45° к горизонту, и причинная структура пространства-времени становится понятной. Диаграмма Пенроуза для метрики Шварцшильда изображена на Рис. 10.3.

Горизонт событий будущего \mathcal{H}^+ изображается лучом $u = 0, v > 0$, а горизонт событий прошлого \mathcal{H}^- — лучом $v = 0, u < 0$. Оба луча ограничивают внешнюю область $v > 0, u < 0$, что эквивалентно $r > r_g$ в шварцшильдовых координатах. Эта область обозначена на конформной диаграмме 10.3 как область I . Схематично координаты Шварцшильда на конформной диаграмме изображены на Рис. 10.4.

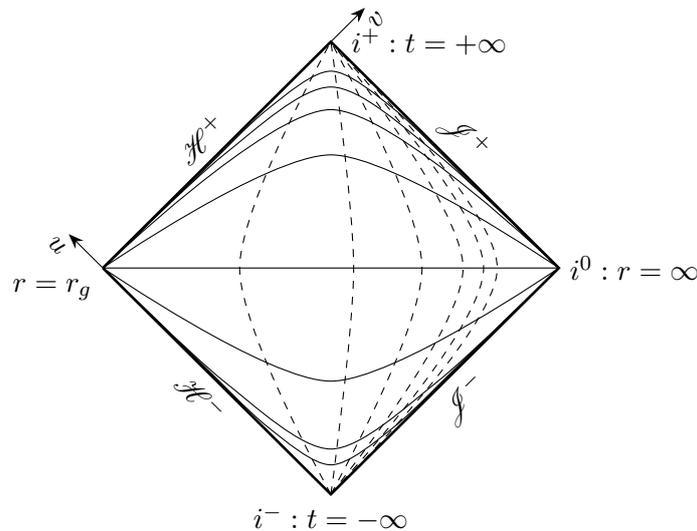


Рис. 10.4. Координатная сетка Шварцшильда в области I диаграммы Пенроуза (качественно). Линии времени t (пунктирные) сгущаются к правому краю, линии радиальной координаты r (сплошные) одинаково сгущаются сверху и снизу.

Достоинство координат u, v состоит в том, что мы можем продолжить метрику (10.35) из области

$u < 0, v > 0$ (область I) в будущее в область $u, v > 0$ (область II , черная дыра) и в прошлое в область $u, v < 0$ (область III , белая дыра). Формально области II и III отвечают значениям $r < r_g$, но, на самом деле, представляют собой две совершенно отдельные области пространства-времени, независимо описываемые областью $r < r_g$ координат Шварцшильда. Насколько далеко можно продолжить метрику в область положительных значений uv ? До тех пор, пока мы не достигнем линий сингулярности

$$r(u, v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad uv = 4r_g^2. \quad (10.36)$$

При $u, v > 0$ сингулярность находится в абсолютном будущем (см. рис. 10.3) для всех событий внутри области II . Никакая траектория не может миновать сингулярности. При $u, v < 0$ сингулярность находится в абсолютном прошлом.

Кроме областей I, II и III мы видим на диаграмме область IV , которая необходима, если мы хотим избежать ситуации, когда частицы пропадают неизвестно куда или появляются ниоткуда в регулярных точках.¹ Эта область представляет собой невидимый «зеркальный мир», с которым не может быть никакой коммуникации из области I ,² но который обязан существовать. Формально горизонт \mathcal{H}^+ и бесконечность \mathcal{J}^+ отображаются в область $t \rightarrow -\infty$, а горизонт \mathcal{H}^- и бесконечность \mathcal{J}^- — в область $t \rightarrow +\infty$, так что можно предположить, что время там течет в некотором смысле назад. Однако, скорее всего, это относится к области умозрительных непроверяемых предположений.

Задачи

1. Покажите, что векторные поля J_i , определенные в (10.1), являются векторами Киллинга в плоском пространстве-времени и удовлетворяют соотношениям (10.2) алгебры $so(3)$.
2. Завершите доказательство (10.9)–(10.11).
3. Проверьте формулы (10.15) и (10.16).
4. Используя уравнение Гамильтона—Якоби, покажите, что в некоторой окрестности любой точки метрику можно привести к виду

$$ds^2 = g_{--}(dx^-)^2 + 2dx^- d\tau + 2g_{-i} dx^- dx^i + g_{ij} dx^i dx^j, \quad i = 2, \dots, d-1.$$

Здесь τ является аффинным параметром изотропных геодезических. В случае $g_{-i} = 0$ эти геодезические даются уравнениями $x^- = \text{const}$, $x^i = \text{const}$. Такая метрика обобщает метрику Эддингтона—Финкельштейна.

5*. Используя конструкцию, которую мы обсуждали на Семинаре 6, и формулы (10.21)–(10.24), постройте синхронную систему отсчета в подпространстве ϑ , $\varphi = \text{const}$. Перейдите от координат (t, x) к координатам $\tau = -S/m$ и $\varepsilon = E/m$ и найдите метрику в этих координатах. Как меняется с собственным временем расстояние между частицами, которые начали падать одновременно из одной точки с немного разными энергиями? Как оно ведет себя вблизи сингулярности?

Семинар 10

Гравитационное поле статического сферически-симметричного тела

В случае статического сферически-симметричного тела с тензором энергии-импульса

$$T_t^t = \rho(r), \quad T_j^i = -p(r)\delta_j^i$$

задачу нахождения гравитационного поля можно решить точно. Уравнения Эйнштейна принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{h} &= 0, \\ r^{-1}e^{-2h}(k' + h') &= 4\pi G(\rho + p), \\ e^{-2h}(k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h')) &= 8\pi Gp, \\ r^{-2}(1 - e^{-2h}) + r^{-1}(h' - k')e^{-2h} &= 4\pi G(\rho - p). \end{aligned}$$

¹Естественно, можно рассматривать и многолистные накрытия пространства, изображенного на рис. 10.3 с точкой ветвления $u = v = 0$ ($r = r_g$), в которых будет несколько (или даже бесконечно много) областей типа I, II, III, IV .

²Точнее, мы можем что-то узнать об этом мире, только упав на черную дыру, если мы, конечно, выживем, когда нас будут разрывать приливные силы. В любом случае наше знание пропадет, когда мы упадем на сингулярность.

Первое уравнение приводит к статичности метрики. Уравнение для $h(r)$ отделяется и дает

$$e^{-2h} = 1 - \frac{2Gm(r)}{r}, \quad m(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho(r). \quad (10.37)$$

С помощью четвертого уравнения отсюда легко найти $k'(r)$:

$$\frac{dk}{dr} = G \frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r(r - 2Gm(r))}.$$

Подставляя ответ в третье уравнение, получаем *условие статического равновесия Оппенгеймера—Волкова*

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{(\rho + p)(m(r) + 4\pi r^3 p(r))}{r(r - 2Gm(r))}. \quad (10.38)$$

На этом уравнении строится теория устойчивости звезд (в тех случаях, когда вращением можно пренебречь). Уравнение следует решать с граничным условием $p(R) = 0$, где R — радиус звезды.

Давайте оценим предел устойчивости звезд. Критерий устойчивости звезды радиуса R имеет вид:

$$r > 2Gm(r) \quad \forall r < R. \quad (10.39)$$

Проще всего найти критерий устойчивости для звезды, состоящей из несжимаемого вещества $\rho = \text{const}$. В этом случае для предельной массы имеем

$$M_{\text{max}} = \sqrt{\frac{3}{32\pi\rho G^3}}. \quad (10.40)$$

Для нейтронной звезды с плотностью $\rho \simeq 3 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$ имеем $M_{\text{max}} \simeq 6.6 M_{\odot}$, где M_{\odot} — масса Солнца.

Рассмотрим теперь звезду с уравнением состояния

$$p = \alpha\rho. \quad (10.41)$$

В случае $\alpha = \frac{1}{3}$ это уравнение представляет собой уравнение ультрарелятивистского идеального газа. Здесь имеется точное решение

$$m(r) = Kr, \quad K = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 6\alpha + 1} G^{-1}, \quad (10.42)$$

и критерий устойчивости состоит в том, что $K < \frac{1}{2G}$. Это условие выполнено при любых α . Масса такой звезды может быть сколь угодно велика и определяется только «обрезкой» на малых плотностях, где закон (10.41) перестает работать. Поэтому предельная масса существенно зависит от уравнения состояния при малых плотностях.