Лекция 8
Гравитационные волны

До сих пор мы рассматривали специальное решение линейной системы (7.14), (7.11). Мы рассмотрели стационарный случай, в котором само условие стационарности и условие достаточно быстрого убывания на бесконечности ($\sim r^{3-d}$) выделяло определенное решение. В следующей лекции мы рассмотрим специальное решение, определенное условиями запаздывания и убывания. Но мы знаем, что общее решение линейной неоднородной системы равно сумме любого специального решения и общего решения однородной системы. Последнее мы и рассмотрим в этой лекции. В случае линеаризованного уравнения Эйнштейна однородная система состоит из волнового уравнения и условия калибровки:

$$\Box\,\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \psi^{\bar\mu}_{\nu,\mu} = 0. \tag{8.1}$$

Мы ослабим ограничения и разрешим решения этого уравнения во всем пространстве, которые не спадают на бесконечности. Сначала найдем комплексные решения в виде плоских волн, а потом наложим условие вещественности на их комбинации. Именно, подставляя функции $\psi_{\mu\nu}$ в виде

$$\psi_{\mu\nu}(x) = A_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, \qquad A_{\nu\mu} = A_{\mu\nu}, \tag{8.2}$$

в волновое уравнение, получаем спектр

$$k^{\bar 0} = \pm\sqrt{(k^{\bar i})^2} = \pm|\boldsymbol{k}|, \qquad \boldsymbol{k} = k^{\bar i}\partial_i, \tag{8.3}$$

а подставляя в условие калибровки, получаем уравнение пространственно-временной поперечности

$$k^{\bar\mu}A_{\mu\nu} = 0. \tag{8.4}$$

Общее решение имеет вид линейной комбинации всех возможных плоских волн

$$\begin{gathered}\psi_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}\sum_{\varepsilon=\pm}\int\frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}}\,A^{\varepsilon}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(|\boldsymbol{k}|x^0-\boldsymbol{k}\boldsymbol{r})},\\ |\boldsymbol{k}|A^{\pm}_{0\nu}(\boldsymbol{k}) + k^{\bar i}A^{\pm}_{i\nu}(\boldsymbol{k}) = 0, \qquad A^{\pm}_{\nu\mu}(\boldsymbol{k}) = A^{\pm}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}), \qquad A^{-}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}) = \left(A^{+}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\right)^*.\end{gathered} \tag{8.5}$$

Последнее равенство во второй строчке представляет собой условие вещественности решения.

Рассмотрим одну монохроматическую плоскую волну, движущуюся вправо вдоль оси x^1, то есть с $k^{\bar 0} = k^{\bar 1} = \omega \neq 0$, $k^{\bar a} = 0$ ($a \geq 2$):

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \operatorname{Re}A_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x^0-x^1)}. \tag{8.6}$$

Иными словами $A^{+}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{d-1}A_{\mu\nu}\delta(\boldsymbol{k}-\omega\,\partial_1)$. Для удобства в этой лекции мы будем обозначать индексы $0,1$ начальными буквами греческого алфавита, а индексы $2,\dots,d-1$ — латинского:

$$\alpha,\beta,\ldots = 0,1; \qquad a,b,\ldots = 2,\ldots,d-1.$$

Условие калибровки (7.11) дает d уравнений

$$A_{0\nu} = -A_{1\nu}. \tag{8.7}$$

Таким образом, из $d(d+1)/2$ величин $A_{\mu\nu}$ осталось $d(d-1)/2$. Тем не менее, количество физически различных поляризаций меньше. Как мы уже отмечали, условие (7.11) не фиксирует калибровку полностью. Остаются еще преобразования

$$\psi'_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \xi_{\bar\mu,\nu} + \xi_{\bar\nu,\mu} - \eta_{\mu\nu}\xi^{\lambda}{}_{,\lambda}. \tag{8.8}$$

удовлетворяющие уравнению (7.21): $\Box\,\xi^\mu = 0$. Возьмем вектор ξ^μ вида

$$\xi^\mu = \operatorname{Re}X^\mu\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x^0-x^1)}. \tag{8.9}$$

Из (8.8) получаем

$$\begin{aligned} A'_{00} &= A_{00} - \mathrm{i}\omega(X^0 + X^1), \\ A'_{0a} &= A_{0a} + \mathrm{i}\omega X^a, \\ A'_{ab} &= A_{ab} - \mathrm{i}\omega(X^0 - X^1)\delta_{ab}. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Мы видим, что калибровочные преобразования позволяют устранить еще d компонент. Например, положив

$$X^0 + X^1 = -\mathrm{i}\omega^{-1}A_{00}, \qquad X^a = \mathrm{i}\omega^{-1}A_{0a}, \qquad X^0 - X^1 = -\frac{\mathrm{i}\omega^{-1}}{d-2}\sum_{a=1}^{d-2} A_{aa},$$

мы получаем $A'_{\alpha\mu} = 0$, $A'^{\bar{\mu}}_{\mu} = 0$, то есть в результате калибровочного преобразования волна стала поперечной и бесследовой. Всего «живых» компонент остается $d(d-3)/2$. Так как числа $A_{\mu\nu}$ комплексные, имеем $d(d-3)$ начальных данных для плоской волны с импульсом $\boldsymbol{k}$.

Для описания гравитационной волны удобно выбрать $d(d-3)/2$ комбинаций компонент, инвариантных относительно остаточных калибровочных преобразований: ψ_{ab} $(a < b)$ и $\psi_{aa} - \psi_{a+1,a+1}$ $(a = 2, \ldots, d-2)$. В частности, в четырехмерном пространстве это ψ_{23} и $\psi_{22} - \psi_{33}$. Вместе с их производными по времени они образуют $d(d-3)$ функции пространственных координат, необходимые для решения задачи Коши. В четырехмерном пространстве-времени нужно задать четыре функции. Решения однородного уравнения в размерностях $d \le 3$ полностью устраняются калибровкой, и гравитация в этих размерностях не имеет собственных динамических степеней свободы. Хотя мы рассматривали слабые возмущения плоского пространства-времени, выводы, касающиеся задачи Коши в ОТО, имеют общий характер.

Изучая плоские волны, мы можем рассуждать по-другому. Рассмотрим общее решение уравнений (8.1), не зависящее от координат x^a. В плоскости (x^0, x^1) удобно перейти к *координатам светового конуса* $x^{\pm} = x^0 \pm x^1$. Тогда

$$ds^2 = h_{++}(dx^+)^2 + h_{--}(dx^-)^2 + (1 + 2h_{+-})\,dx^+\,dx^- - (\delta_{ab} - h_{ab})\,dx^a\,dx^b. \tag{8.11}$$

Уравнения (8.1) для постоянных по x^a функций принимают вид

$$\partial_+\partial_-\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_+\psi_{-\mu} + \partial_-\psi_{+\mu} = 0. \tag{8.12}$$

Из волнового уравнения немедленно находим

$$\psi_{\mu\nu} = \psi^R_{\mu\nu}(x^-) + \psi^L_{\mu\nu}(x^+). \tag{8.13}$$

Функция $\psi^R_{\mu\nu}(x^-)$ описывает волну, движущуюся направо, а функция $\psi^L_{\mu\nu}(x^+)$ — волну, движущуюся налево. Калибровочное условие дает $\dot{\psi}^L_{-\mu}(x^+) = -\dot{\psi}^R_{+\mu}(x^-)$. Левая часть этого уравнения зависит только от x^+, а правая — только от x^-. Это значит, что обе функции постоянны. Исключая линейные решения для $\psi^{R,L}_{\mu\nu}$ как не соответствующие физическому условию малости и постоянные ненулевые решения, как отвечающие другой задаче (мы еще обсудим это в следующей лекции), находим:

$$\psi^L_{-\mu} = \psi^R_{+\mu} = 0. \tag{8.14}$$

Нетрудно показать, что калибровочным преобразованием вида (8.8) можно обратить в нуль компоненты $\psi^L_{+\mu}, \psi^R_{-\mu}$ и следы $\psi^{R,L} = \eta^{\mu\nu}\psi^{R,L}_{\mu\nu}$ (поперечная калибровка). Тогда $h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu}$ и решения будут иметь вид

$$h_{ab}(x) = h^R_{ab}(x^-) + h^L_{ab}(x^+), \qquad h_{\alpha\mu} = 0, \qquad \eta^{ab}h^{R,L}_{ab} = 0. \tag{8.15}$$

Мы видим, что эволюция системы волн определяется $d(d-3)$ функциями $h^{R,L}_{ab}$ $(a < b)$, $h^{R,L}_{aa} - h^{R,L}_{a+1,a+1}$ $(2 \le a \le d-2)$ в согласии с нашими предыдущими соображениями.

Оставив только одну движущуюся направо волну, изучим, как меняются под ее влиянием пространственные расстояния. Так как поперечной калибровке отвечает синхронная система координат $(g_{0\mu} = \delta_{0\mu})$, имеем

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (\delta_{ab} - h_{ab})\,dx^a\,dx^b. \tag{8.16}$$

Если мы возьмем $(d-2)$-мерную сферу в плоскости, перпендикулярной волне, то функции h_{ab} описывают небольшие центрально-симметричные деформации такой сферы, причем величина h_{aa} дает нам уменьшение диаметра сферы в направлении оси x^a, а h_{ab} $(a \neq b)$ дает уменьшение диаметра сферы в диагональном направлении $x^a = x^b$ в плоскости $x^a x^b$ и увеличение диаметра в перпендикулярном ему диагональном направлении $x^a = -x^b$. В силу бесследовости объем сферы в первом порядке по h_{ab} сохраняется: $\det(\gamma_{ab}) = \det(\delta_{ab} - h_{ab}) \simeq 1 - \mathrm{tr}(h_{ab}) = 1$.

Важно, что эта $(d-2)$-мерная сфера может быть физически реализована как система частиц. Именно, свободные пробные частицы, неподвижные в системе координат, в которой реализуется поперечная калибровка, остаются неподвижными в этой системе координат в течение всего времени прохождения волны. Действительно, в силу калибровки $h_{0\mu} = 0$ имеем $\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(2h_{0\nu,0} - h_{00,\nu}) = 0$. Это значит, что уравнение движения свободной частицы имеет вид

$$\ddot{x}^\mu = -2\Gamma^\mu_{i0}\dot{x}^i\dot{x}^0 - \Gamma^\mu_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j,$$

То есть, если частица имеет нулевую скорость $(\dot{x}^i = 0)$ в какой-то момент времени, то она имеет и нулевое ускорение $(\ddot{x}^i = 0)$. Значит, она будет оставаться неподвижной в поле волны сколь угодно долго.

Рассмотрим подробно случай $d = 4$. Имеется две независимые компоненты

$$h_+ = h_{22} = -h_{33}, \qquad h_\times = h_{23}. \tag{8.17}$$

В плоскости, поперечной к направлению движения волны имеем

$$dl_\perp^2 = (1 - h_+)(dx^2)^2 + (1 + h_+)(dx^3)^2 - 2h_\times\, dx^2\, dx^3. \tag{8.18}$$

Рассмотрим маленькую окружность радиуса dr в плоскости $x^2 x^3$ (точнее, в соответствующем касательном пространстве), перпендикулярной волновому вектору. Будем задавать точку на окружности углом θ, отсчитываемым от оси x^2. Тогда координаты этой точки отличаются от координат центра окружности на величины

$$dx^2 = dr\cos\theta, \qquad dx^3 = dr\sin\theta.$$

Отсюда имеем

$$dl_\perp = dr\left(1 - \frac{h_+}{2}\cos 2\theta - \frac{h_\times}{2}\sin 2\theta\right) = dr\left(1 - \frac{h_*}{2}\cos 2(\theta - \varphi)\right), \tag{8.19}$$

где

$$h_+ = h_*\cos 2\varphi, \qquad h_\times = h_*\sin 2\varphi.$$

Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Предположим, у нашей волны h_+ и $h_\times$ пропорциональны (в случае монохромной волны это значит, что отношение A_{22}/A_{23} вещественно), то есть $\varphi = \mathrm{const}$. Тогда кольцо в плоскости $x^2 x^3$, будет сжиматься и растягиваться вдоль прямой, повернутой под углом φ к оси x^2, и одновременно растягиваться и сжиматься вдоль перпендикулярной ей прямой. Мы будем называть такую волну волной с линейной (или плоской) поляризацией. В отличие от линейной поляризации электромагнитных волн угол φ наклона плоскости поляризации определен не по модулю π, а по модулю $\frac{\pi}{2}$. Действительно, правая часть (8.19) не меняется при замене $\varphi \to \varphi + \frac{\pi}{2}$, $h_* \to -h_*$. Иными словами, плоская поляризация определяется двумя перпендикулярными плоскостями, параллельным лучу.

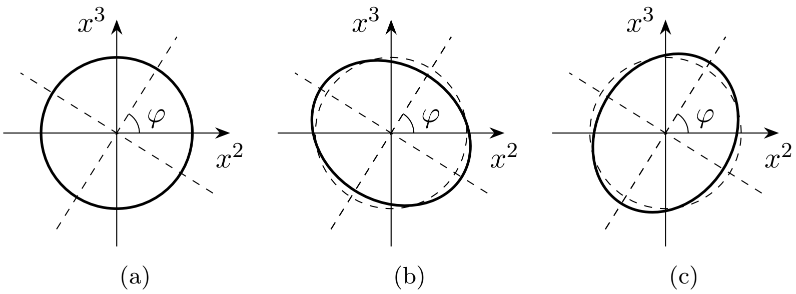

Рис. 8.1. Изменение формы пространственной окружности в линейно поляризованной гравитационной волне в поперечной плоскости: (a) исходная окружность до того, как ее достигла волна; (b) фаза $h_* > 0$; фаза $h_* < 0$ (в случае монохромной волны, например, через полупериод после фазы (b)).

Наличие двух независимых коэффициентов h_+ и $h_\times$ означает, что любую поляризацию волны (в том числе, любую плоскую поляризацию) можно представить как линейную комбинацию двух линейно независимых поляризаций, например, поляризаций с $\varphi = 0$ (определяемой функцией h_+) и с $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (определяемой функцией $h_\times$).

Теперь выясним, какие энергию и импульс переносят гравитационные волны. Рассмотрим плоскую гравитационную волну в виде (8.15). Наша цель состоит в том, чтобы вычислить псевдотензор энергии-импульса. Согласно определению

$$|g|t^{\mu\nu} = |g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}} + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa} = -\frac{|g|}{8\pi G}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}. \tag{8.20}$$

Казалось бы, можно положить $T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = -T^{\mu\nu} = 0$, но это не так. Дело в том, что мы рассматриваем гравитационные волны в линейном приближении, а плотности и потоки энергии и импульса — величины *второго порядка* по $h_{\mu\nu}$. Наше решение обращает в нуль только вклад первого порядка в $T^{\mu\nu}_{\text{грав}}$, а вклад второго порядка оказывается ненулевым. Есть два способа решить эту проблему. Первый способ состоит в том, чтобы получить явную формулу для $t^{\mu\nu}$ и увидеть, что она представляет собой линейную комбинацию членов, содержащих произведения вида $g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}g^{\rho\sigma}{}_{,\kappa}$. В первом порядке $g^{\mu\nu}{}_{,\lambda} = -h^{\mu\nu}{}_{,\lambda}$, поэтому все эти произведения — второго порядка, а, значит, во всех коэффициентах можно заменить $g_{\mu\nu}$ на $\eta_{\mu\nu}$. Этот метод дает правильный ответ, но требует дополнительного обоснования. Поэтому мы используем другой, более последовательный метод. Мы получим уравнения для поправок второго порядка в гравитационной волне и, подставив их в выражение для $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$, покажем что в выражении для псевдотензора энергии-импульса $t^{\mu\nu} = |g|^{-1}\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}$ соответствующие вклады можно выразить через решения линейного уравнения (8.1).

Давайте рассмотрим разложение:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h^{(1)}_{\mu\nu} + h^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots . \tag{8.21}$$

Здесь $h^{(1)}_{\mu\nu}$ — решение линеаризованных уравнений Эйнштейна, в нашей задаче — (8.1), а $h^{(k)}_{\mu\nu}$ — поправка k-го порядка. Мы немного изменим обозначения: буквы h, ψ без индексов теперь будут обозначать матрицы, отвечающие соответствующим тензорам, а следы будут обозначаться значком tr: $\operatorname{tr} a = a^{\bar\mu}_{\mu} = \eta^{\mu\nu}a_{\mu\nu}$, $(ab)_{\mu\nu} = a_\mu{}^{\bar\lambda}b_{\lambda\nu}$ и т.п. Отсюда легко находим:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - h^{(1)\overline{\mu\nu}} - h^{(2)\overline{\mu\nu}} + (h^{(1)2})^{\overline{\mu\nu}} + \cdots , \\ |g| &= 1 + \operatorname{tr} h^{(1)} + \operatorname{tr} h^{(2)} + \frac{1}{2}\left((\operatorname{tr} h^{(1)})^2 - \operatorname{tr} h^{(1)2}\right) + \cdots . \end{aligned} \tag{8.22}$$

В нашей задаче в силу калибровочных условий $h^{(1)}_{\alpha\nu} = 0$, $\operatorname{tr} h^{(1)} = 0$. Отсюда получаем во втором порядке

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= \eta^{\alpha\beta} - h^{(2)\overline{\alpha\beta}}, \\ g^{\alpha b} &= -h^{(2)\overline{\alpha b}}, \\ g^{ab} &= \eta^{ab} - h^{(1)\overline{ab}} - h^{(2)\overline{ab}} + (h^{(1)2})^{\overline{ab}}, \\ |g| &= 1 + \operatorname{tr} h^{(2)} - \frac{1}{2}\operatorname{tr} h^{(1)2}. \end{aligned} \tag{8.23}$$

Теперь вычислим символы Кристоффеля. При этом на поправки второго порядка наложим такое же калибровочное условие, как и на поправки первого порядка:

$$\psi^{(2)\overline{\mu\nu}}{}_{,\nu} = 0, \qquad \psi^{(2)}_{\mu\nu} = h^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\operatorname{tr} h^{(2)}. \tag{8.24}$$

Вклады $h^{(2)}$ входят в выражения до второго порядка только линейно и отдельно от $h^{(1)}$. Для символов Кристоффеля имеем

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\kappa}(h^{(2)}_{\mu\kappa,\nu} + h^{(2)}_{\nu\kappa,\mu} - h^{(2)}_{\mu\nu,\kappa}) + \tilde\Gamma^\lambda_{\mu\nu}, \tag{8.25}$$

где $\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ содержат только вклады $h^{(1)}_{\mu\nu}$. Нетрудно проверить, что

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - h^{(1)\overline{\lambda\kappa}})h^{(1)}_{\kappa\nu,\alpha}, \qquad \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{ab} = -\frac{1}{2}h^{(1),\lambda}_{ab}, \tag{8.26}$$

Отсюда следует, что единственные ненулевые компоненты равны

$$\tilde{\Gamma}^{c}_{\alpha b} = \frac{1}{2}(\eta^{cd} - h^{(1)\overline{cd}})h^{(1)}_{bd,\alpha}, \qquad \tilde{\Gamma}^{\gamma}_{ab} = -\frac{1}{2}h^{(1),\gamma}_{ab}. \tag{8.27}$$

Кроме того, для следа символов Кристоффеля имеем

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr} h^{(2)} - \frac{1}{2}\operatorname{tr} h^{(1)2}\right)_{,\alpha}, \qquad \Gamma^{\lambda}_{a\lambda} = 0. \tag{8.28}$$

Отсюда во втором порядке немедленно получаем

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h^{(2)}_{\mu\nu} + \tilde{R}_{\mu\nu}, \tag{8.29}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(h^{(1)}h^{(1)}{}_{,\alpha\beta}) + \frac{1}{4}\operatorname{tr}(h^{(1)}{}_{,\alpha}h^{(1)}{}_{,\beta}), \qquad \tilde{R}_{\alpha b} = 0, \qquad \tilde{R}_{ab} = \frac{1}{2}(h^{(1),\bar{\alpha}}h^{(1)}{}_{,\alpha})_{ab}, \\ \tilde{R} = \frac{3}{4}\operatorname{tr}(h^{(1),\bar{\alpha}}h^{(1)}{}_{,\alpha}).\end{gathered} \tag{8.30}$$

Так как это уже выражения второго порядка, мы можем здесь поднимать индексы с помощью $\eta^{\mu\nu}$, а $|g|$ в коэффициентах при тензоре Риччи положить равным единице.

Из уравнений Эйнштейна в вакууме $R_{\mu\nu} = 0$ мы немедленно получаем уравнение для поправки второго порядка к метрике:

$$\Box h^{(2)}_{\mu\nu} = 2\tilde{R}_{\mu\nu}. \tag{8.31}$$

Для плоской волны имеем

$$\Box h^{(2)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(h^{(1)2})_{,\alpha\beta} - \operatorname{tr} h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta}\right), \tag{8.32a}$$

$$\Box h^{(2)}_{\alpha b} = 0, \tag{8.32b}$$

$$\Box h^{(2)}_{ab} = \frac{1}{2}\Box(h^{(1)2})_{ab}. \tag{8.32c}$$

Также имеем

$$\Box \operatorname{tr} h^{(2)} = \frac{3}{4}\Box \operatorname{tr} h^{(1)2}. \tag{8.33}$$

Мы всюду учитывали уравнение движения для вклада первого порядка $\Box h^{(1)}_{ab} = 0$. Подняв индексы в (8.32a) и вычислив дивергенцию нетрудно привести ее к виду половины градиента правой части (8.33) и, тем самым, убедиться, что условие калибровки (8.24) согласовано с уравнениями движения.

Найдем величины $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$. Подставляя (8.23) в определение (6.22), получаем

$$\begin{aligned}16\pi G\chi^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \left(1 + \operatorname{tr} h^{(2)} - \frac{1}{2}\operatorname{tr} h^{(1)2}\right)(\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta} - \eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}) \\ &\quad - h^{(2)\overline{\alpha\beta}}\eta^{\gamma\delta} - \eta^{\alpha\beta}h^{(2)\overline{\gamma\delta}} + h^{(2)\overline{\alpha\gamma}}\eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\gamma}h^{(2)\overline{\beta\delta}},\end{aligned} \tag{8.34a}$$

$$16\pi G\chi^{\alpha b\gamma\delta} = -h^{(2)\overline{\alpha b}}\eta^{\gamma\delta} + \eta^{\alpha\gamma}h^{(2)\overline{b\delta}}, \tag{8.34b}$$

$$16\pi G\chi^{ab\gamma\delta} = \left(1 + \operatorname{tr} h^{(2)} - \frac{1}{2}\operatorname{tr} h^{(1)2}\right)\eta^{ab}\eta^{\gamma\delta} - \left(h^{(1)\overline{ab}} + h^{(2)\overline{ab}} - (h^{(1)2})^{\overline{ab}}\right)\eta^{\gamma\delta} - \eta^{ab}h^{(2)\gamma\delta}. \tag{8.34c}$$

Чтобы получить $t^{\mu\nu}$, надо продифференцировать это по x^{γ}, x^{δ}. Явно выполним вычисление для второй строчки:

$$16\pi G\chi^{\alpha b\gamma\delta}{}_{,\gamma\delta} = -\Box h^{(2)\overline{\alpha b}} + (h^{(2)\overline{b\delta}}{}_{,\delta})^{,\bar{\alpha}} = 0$$

Первое слагаемое обращается в нуль в силу уравнения движения (8.32b), а второе слагаемое — в силу калибровочного условия (8.24). Мы получили естественный результат, что плотность импульса (= плотность потока энергии) в направлении, перпендикулярном к направлению распространения волны, равна нулю. Аналогично, применяя уравнения движения (8.32) и калибровочное условие (8.24) к производным от правых частей (8.34a) и (8.34c) и опуская индекс (1) и черточки над индексами, получаем

$$t^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G}\left(\operatorname{tr} h^{,\alpha} h^{,\beta} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\,\Box \operatorname{tr} h^2\right), \tag{8.35a}$$

$$t^{\alpha b} = 0, \tag{8.35b}$$

$$t^{ab} = \frac{1}{32\pi G}\left(\Box (h^2)^{ab} - \frac{1}{4}\eta^{ab}\,\Box \operatorname{tr} h^2\right). \tag{8.35c}$$

Немного удивляют ненулевые поперечные компоненты напряжений t^{ab}, однако вспомним, что этот результат получен для произвольного двумерного решения уравнения (8.1), состоящего из двух встречных волн:

$$h_{\mu\nu}(x) = h^R_{\mu\nu}(x^0 - x^1) + h^L_{\mu\nu}(x^0 + x^1),$$

Если мы положим $h^L_{\mu\nu} = 0$ (волна распространяется только вправо), все члены, содержащие даламбертиан $\Box$ в правых частях, обратятся в нуль, так как будут выражаться даламбертианом от функций одной световой координаты $x^- = x^0 - x^1$. Таким образом, для распространяющейся вправо волны получим

$$t^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G} h^{a,\alpha}_b h^{b,\beta}_a, \qquad t^{\alpha b} = 0, \qquad t^{ab} = 0. \tag{8.36}$$

В лоренц-инвариантном виде можно написать

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G}\operatorname{tr} h^{,\mu} h^{,\nu} = \frac{1}{32\pi G} h^{\lambda,\mu}_\kappa h^{\kappa,\nu}_\lambda. \tag{8.37}$$

Эту формулу мы используем на следующей лекции, чтобы узнать потери энергии движущегося тела на излучение гравитационных волн.

Задачи

1. Покажите, что «остаточным» калибровочным преобразованием вида (8.8) решение (8.13) с калибровочным условием (8.14) можно привести к виду (8.15). (N.B.! При решении задачи не надо использовать преобразование Фурье.)

2. Для монохромной волны (8.6) найдите такое соотношение на A_{22}, A_{23}, при котором угол φ меняется линейно со временем (*круговая поляризация*). Сколько имеется таких круговых поляризаций?

3. Выведите формулы (8.25), (8.26), (8.29), (8.30), со всеми подробностями. Покажите, что уравнения (8.32) совместны с калибровочным условием (8.24).

4. Из формулы (8.34) выведите (8.36) в предположении $h^L_{\mu\nu} = 0$.

5*. Покажите, что, если подставить в правую часть (8.20) вместо $R_{\mu\nu}$ величины $\tilde{R}_{\mu\nu}$, а вместо $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$ величины $\tilde{\chi}^{\mu\nu\lambda\kappa}$, отличающиеся тем, что в них $h^{(2)}$ положено равным нулю, ответ будет совпадать с (8.35). Объясните, почему ответы совпали.

Семинар 8

Сильная гравитационная волна

Рассмотрим решение уравнений гравитационного поля в вакууме, которое зависит лишь от одной координаты, которую обозначим x^-:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^-) \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i g_{\mu\nu} = 0 \quad (i \neq -). \tag{8.38}$$

Такое решение допускает замену координат вида

$$x^i = x'^i + \varphi^i(x'^-), \qquad x^- = \varphi^-(x'^-), \tag{8.39}$$

где буква i пробегает все остальные значения, кроме $-$. При этом метрика преобразуется по правилу

$$g'_{--} = (\dot\varphi^- g_{--} + 2\dot\varphi^i g_{-i})\dot\varphi^- + g_{ij}\dot\varphi^i\dot\varphi^j, \qquad g'_{-i} = \dot\varphi^- g_{-i} + \dot\varphi^j g_{ij}, \qquad g'_{ij} = g_{ij}, \tag{8.40}$$

где точкой мы обозначили производную по x'^-. Если $\det(g_{ij}) \neq 0$, можно преобразованием (8.39) добиться того, чтобы $g'_{-i} = 0$. После этого мы можем применить такое же преобразование с $\varphi'^i = 0$, чтобы добиться $g''_{--} = 1$. Тогда координата x''^- есть временная координата в синхронной системе координат. Нас этот случай интересовать не будет.

Пусть $\det(g_{ij}) = 0$. Пусть (g^i) есть такой вектор, что $g_{ij}g^j = 0$. Выберем одну из координат (обозначим ее x^+), для которой $g^+ \neq 0$. Изменяя норму (g^i) мы можем положить $g^+ = -1$. Полагая $a, b = 2, \ldots, d-1$, получаем

$$g_{a+} = g_{ab}g^b, \qquad g_{++} = g_{ab}g^a g^b. \tag{8.41}$$

Более высокого вырождения не может быть, поэтому $\det(g_{ab}) \neq 0$. С помощью преобразования (8.39) с любыми функциями $\varphi^\pm$ можно добиться того, чтобы $g'_{-a} = 0$, а затем, подобрав подходящим образом $\dot\varphi'^+$ и φ'^- при условии $\dot\varphi'^a = -g^a\dot\varphi'^+$, можно добиться, чтобы $g''_{--} = 0$, а $g''_{-+} = \frac{1}{2}$. Опуская штрихи, получаем

$$g_{--} = 0, \qquad g_{-+} = \frac{1}{2}, \qquad g_{-a} = 0, \qquad a = 2, \ldots, d-1. \tag{8.42}$$

Тогда метрику можно записать в виде

$$ds^2 = dx^-\,dx^+ + g_{ab}(dx^a + g^a\,dx^+)(dx^b + g^b\,dx^+). \tag{8.43}$$

Вычислим тензор Риччи вдоль направлений ∂_a:

$$R_{ab} = -g_{ac}\dot g^c g_{bd}\dot g^d. \tag{8.44}$$

Так как согласно вакуумным уравнениям движения $R_{ab} = 0$, мы немедленно находим, что $\dot g^a = 0$, то есть $g^a = \mathrm{const}$. Поэтому линейным преобразованием $x^a + g^a x^+ \to x^a$ мы можем привести метрику к виду

$$ds^2 = dx^-\,dx^+ + g_{ab}(x^-)\,dx^a\,dx^b. \tag{8.45}$$

Ненулевые символы Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma^a_{b-} = \frac{1}{2}\kappa^a_b = \frac{1}{2}g^{ac}\dot g_{cb}, \qquad \Gamma^+_{ab} = -\kappa_{ab} = -\dot g_{ab}. \tag{8.46}$$

Тогда $(--)$-компонента уравнения Эйнштейна имеет вид

$$R_{--} = -\frac{1}{2}\dot\kappa^a_a - \frac{1}{4}\kappa^b_a\kappa^a_b = -\frac{1}{2}g^{ab}\ddot g_{ab} + \frac{1}{4}g^{ab}\dot g_{bc}g^{cd}\dot g_{da} = 0. \tag{8.47}$$

Это — единственное уравнение на компоненты g_{ab}. Поэтому $d(d-3)/2$ из них можно выбрать произвольно, и только на оставшуюся компоненту писать уравнение. Удобно это сделать в виде:

$$g_{ab} = -\chi^2\gamma_{ab}, \qquad \det(\gamma_{ab}) = 1. \tag{8.48}$$

Из последнего условия следует, что $\gamma^{ab}\dot\gamma_{ab} = 0$, где γ^{ab} — матрица обратная к γ_{ab}. Для χ получается замкнутое уравнение второго порядка:

$$\ddot\chi = \frac{1}{4(d-2)}\dot\gamma^{ab}\dot\gamma_{ab}\chi. \tag{8.49}$$

Теперь введем переменные

$$x^0 = \frac{x^+ + x^-}{2}, \qquad x^1 = \frac{x^+ - x^-}{2}.$$

Это значит, что если мы задали произвольные функции $\gamma_{ab}(x^0 = 0, x^1, \ldots, x^{d-1}) = \gamma_{ab}(x^- = -x^1)$ с условием $\det(\gamma_{ab}) = 1$, то есть всего $d(d-3)/2$ произвольные функции, и два числа $\chi(0)$, $\dot\chi(0)$, то мы полностью задали эволюцию системы. Калибровочным преобразованием (8.39) всегда можно добиться того, чтобы $\chi(0) = 1$, $\dot{\chi}(0) = 0$. Поэтому достаточно задать $d(d-3)/2$ функций. Другие $d(d-3)/2$ функций уже «съедены» условием того, что волна движется в одну сторону (зависит только от x^-).

Рассмотрим опять слабую волну $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ тогда $\chi(x^-) \simeq 1$ и

$$\dot{\chi} \simeq -\frac{1}{4(d-2)} \int_0^t dt \, (\dot{\gamma}_{ab})^2.$$

Величина под интегралом, усредненная по времени, есть, в сущности, интенсивность волны. Если эта интенсивность не меняется, χ по мере движения волны буде убывать по закону $\chi \simeq 1 - \mathrm{const} \cdot t^2$. Хотя этот закон будет меняться, наступит момент t_0, когда $\chi(t_0) = 0$. В окрестности этой области имеем

$$ds^2 = dx^- \, dx^+ - A^2 (x^- - t_0)^2 \delta_{ab} \, dx^a \, dx^b. \tag{8.50}$$

Казалось бы, мы имеем особенность. Однако замена переменных

$$x^- = y^- + t_0, \qquad x^a = \frac{y^a}{Ay^-}, \qquad x^+ = y^+ - \frac{\delta_{ab} y^a y^b}{y^-} \tag{8.51}$$

разрешает эту особенность:

$$ds^2 = dy^- \, dy^+ - \delta_{ab} \, dy^a \, dy^b. \tag{8.52}$$

Поэтому на самом деле распространение гравитационной волны не приводит к особенности метрики пространства-времени.