

Лекция 7

Слабое гравитационное поле

В этой лекции мы рассмотрим предел слабого гравитационного поля, то есть теорию гравитации в почти плоском пространстве. Такая задача возникает в двух случаях:

1. Когда компоненты тензора энергии-импульса малы, то есть, грубо говоря, в системах с малой плотностью вещества. К этому случаю относится и нерелятивистский предел, когда, помимо малости кривизны, еще и скорости частиц достаточно малы.
2. Когда мы изучаем гравитационное поле достаточно далеко от гравитирующих тел. В этом случае представляют интерес асимптотические разложения для метрики и кривизны. Мы увидим, как с их помощью можно узнать общую массу и момент импульса источника гравитации.

Кроме того, мы увидим, что уравнения слабого гравитационного поля содержат свободную динамическую часть, которая приводит к новому по сравнению с ньютоновской теорией эффекту — гравитационным волнам.

Приближение слабого гравитационного поля, вообще говоря, не предполагает малых скоростей движения частиц и наблюдателей. Под приближением слабого гравитационного поля мы будем понимать предел

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (7.1)$$

Тогда в первом приближении уравнения Эйнштейна можно считать линейными. Иными словами, гравитационное поле настолько слабо, что его самодействие пренебрежимо мало. Для этого, разумеется, тензор энергии-импульса материи должен быть достаточно мал

$$G|T^{\mu\nu}|l^2 \ll 1, \quad (7.2)$$

где l — характерные масштабы, на которых меняется метрика. На самом деле это не значит, что компоненты тензора энергии-импульса должны удовлетворять этому условию во всем пространстве. Линеаризованные уравнения мы можем использовать достаточно далеко от областей с большой концентрацией масс, рассматривая области больших масс и сильного поля как «черные ящики», создающие определенное поле на своих границах.

Есть еще один важный момент. Если вещество имеет низкую плотность, но занимает область большого размера L , отклонения метрики от плоской будут расти к границам области. Так что мы должны потребовать

$$G|T^{\mu\nu}|L^2 \ll 1. \quad (7.3)$$

Что делать, если масштаб L не удовлетворяет этому условию? Тогда надо разбить пространство-время на области, в которых это условие удовлетворено, и на каждой из этих областей выбрать карту так, чтобы компоненты метрики на ней мало отклонялись от $\eta_{\mu\nu}$.

В линейном приближении удобно поднимать и опускать индексы с помощью фоновой метрики $\eta_{\mu\nu}$. Чтобы избежать путаницы, мы будем рисовать черточку над соответствующими индексами: $h_{\nu}^{\bar{\mu}} = \eta^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu}$ и т.д. В первом порядке по $h_{\mu\nu}$ имеем

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\bar{\mu}\bar{\nu}}, \quad |g| = 1 + h, \quad h = h_{\mu}^{\bar{\mu}}. \quad (7.4)$$

Для тензора Риччи в первом порядке получаем

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(-\eta^{\lambda\kappa} h_{\mu\nu,\lambda\kappa} + 2h_{(\mu,\nu)\lambda}^{\bar{\lambda}} - h_{,\mu\nu} \right), \quad (7.5)$$

где скобки означают симметризацию: $a_{(\mu_1 \dots \mu_n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S^n} a_{\mu_{\sigma_1} \dots \mu_{\sigma_n}}$.

Линеаризованные уравнения Эйнштейна

$$\eta^{\lambda\kappa} h_{\mu\nu,\lambda\kappa} - 2h_{(\mu,\nu)\lambda}^{\bar{\lambda}} + h_{,\mu\nu} = -16\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2} T \right) \quad (7.6)$$

выглядят пока еще довольно устрашающе. Дело не столько в его сложности, сколько в том, что он содержит существенную проблему. Представим выражение (7.5) в виде

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} h_{\lambda\kappa}, \quad (7.7)$$

где K — дифференциальный оператор вида

$$K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} = \frac{1}{2} \left(-\delta_{\mu}^{\lambda} \delta_{\nu}^{\kappa} \square + \delta_{\mu}^{\lambda} \eta^{\kappa\alpha} \partial_{\alpha} \partial_{\nu} + \delta_{\nu}^{\kappa} \eta^{\lambda\alpha} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} - \eta^{\lambda\kappa} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \right), \quad (7.8)$$

действующий на симметричных тензорах в пространстве Минковского. Здесь

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \quad (7.9)$$

— лапласиан в пространстве-времени Минковского (иногда его называют *даламбертианом*). Проблема состоит в том, что оператор K вырожден. Легко видеть, что любой тензор вида $\varphi_{\mu,\nu} + \varphi_{\nu,\mu}$ является его собственной функцией с нулевым собственным значением (*нулевой модой*). Это означает, что оператор K необратим, и метрика не определяется однозначно тензором Риччи или, в силу уравнений Эйнштейна, тензором энергии-импульса материи. На самом деле в этом нет ничего удивительного. Как мы уже не раз говорили, геометрия пространства-времени не меняется при произвольном преобразовании координат. Рассмотрим малое преобразование: $x^{\mu} = x'^{\mu} + \xi^{\mu}$. Метрика при таком преобразовании меняется как $\delta_{\xi} g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$. Близость метрики к плоской не фиксирует однозначно систему координат: остается свобода относительно преобразований той же малости, что и тензор h . В первом порядке имеем

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \xi_{\bar{\mu},\nu} + \xi_{\bar{\nu},\mu}. \quad (7.10)$$

Полагая $\varphi_{\mu} = \xi_{\bar{\mu}}$, мы видим, что именно малые преобразования координат и вырождают оператор K . Чтобы снять это вырождение, нужно как-то ограничить класс допустимых решений или, как говорят физики, зафиксировать калибровку. Для этого нужно наложить дополнительные условия таким образом, чтобы общее решение получалось из решений, удовлетворяющих этим условиям, преобразованием (7.10). Наложим d условий

$$\psi_{\bar{\nu},\mu}^{\bar{\mu}} = 0, \quad \psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} h. \quad (7.11)$$

Обратно,

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2} \psi, \quad \psi = \psi_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}} = -\frac{d-2}{2} h. \quad (7.12)$$

При этих условиях все слагаемые в (7.5), кроме первого, сокращаются, и тензор Риччи приобретает вид

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu}. \quad (7.13)$$

Соответственно, уравнения Эйнштейна в калибровке (7.11) имеют вид волнового уравнения с распределенным источником:

$$\square \psi_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (7.14)$$

Условия согласованности калибровки с этим уравнением

$$0 = \square \psi_{\bar{\nu},\mu}^{\bar{\mu}} = -16\pi G T_{\bar{\nu},\mu}^{\bar{\mu}}$$

совпадает с уравнением непрерывности для тензора энергии-импульса в лидирующем порядке. Это значит, что эффекты обмена энергией и импульсом между гравитационным полем и материей являются эффектами второго порядка по $h_{\mu\nu}$ и лежат за пределами линейного приближения.

Рассмотрим теперь в рамках приближения слабого поля нерелятивистский предел, определяемый условиями:

- 1) скорости частиц много меньше единицы, а поле мы усредняем по временам, большим чем характерные масштабы рассматриваемых областей;
- 2) плотность энергии совпадает с плотностью массы: $T^{00} = \rho$, а плотности импульса и напряжения малы: $|T^{0i}|, |T^{ij}| \ll \rho$.

Первое условие означает также, что мы можем пренебречь производными по времени от метрики и решать задачу как статическую:

$$\begin{aligned}\Delta\psi_{00}(t, \mathbf{r}) &= 16\pi G\rho(t, \mathbf{r}), \\ \Delta\psi_{0i}(t, \mathbf{r}) &= \Delta\psi_{ij}(t, \mathbf{r}) = 0.\end{aligned}\tag{7.15}$$

Здесь $\Delta = \sum_{i=1}^{d-1} \partial_i^2$ — пространственный лапласиан. Время t в этом уравнении играет роль параметра. Решение уравнения Лапласа, стремящееся к нулю на бесконечности, хорошо известно:

$$\psi_{00}(t, \mathbf{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-3)S_{d-1}} \int d^{d-1}x' \frac{\rho(t, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{d-3}}, \quad \psi_{0i}(t, \mathbf{r}) = \psi_{ij}(t, \mathbf{r}) = 0,\tag{7.16}$$

где $S_n = n\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2} + 1)$ — площадь поверхности единичной гиперболы в n -мерном евклидовом пространстве. Это решение, очевидно, удовлетворяет калибровочному условию (7.11) с той же точностью, с какой мы можем пренебречь плотностью потока массы. Из (7.12) получаем $h_{00} = \frac{d-3}{d-2}\psi_{00}$ и $h_{ij} = \frac{\psi_{00}}{d-2}\delta_{ij}$. Следовательно,

$$h_{00}(t, \mathbf{r}) = (d-3)h_{ii}(t, \mathbf{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-2)S_{d-1}} \int d^{d-1}x' \frac{\rho(t, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{d-3}}.\tag{7.17}$$

Из формулы (4.8) мы знаем, что ньютоновский гравитационный потенциал равен $\phi = \frac{1}{2}h_{00}$. Однако пространственная часть метрики (7.17) не согласуется с (4.8), поскольку согласно этой формуле компоненты h_{ii} должны равняться нулю. На самом деле для нерелятивистской пробной частицы ($v^2 \ll 1$), движущейся в слабом гравитационном поле ($\phi \ll 1$), вклад $h_{ii} = 2\phi/(d-3)$ в действие является превышением точности. Действительно, для нерелятивистского действия частицы в гравитационном поле имеем

$$S = \int dt \left(-m + \left(1 - \frac{2\phi(t, \mathbf{r})}{d-3} \right) \frac{mv^2}{2} - m\phi(t, \mathbf{r}) \right).$$

Очевидно, поправка к лагранжиану — порядка $m\phi v^2 \ll m\phi, mv^2$, то есть мала по сравнению с остальными членами. Иными словами, вклад h_{ii} пренебрежимо мал, поскольку в нерелятивистском пределе вклад в квадрат собственного времени, пропорциональный $d\mathbf{r}^2$, сам по себе мал по сравнению с dt^2 . Если же мы хотим изучать движение релятивистской частицы в слабом гравитационном поле (даже созданном нерелятивистскими объектами), этим вкладом пренебрегать нельзя.

Итак, нерелятивистский потенциал системы масс m_i в точках \mathbf{r}_i равен

$$\phi(t, \mathbf{r}) = -\frac{8\pi G}{(d-2)S_{d-1}} \sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)|^{d-3}}.\tag{7.18}$$

При $d = 4$ мы получаем закон всемирного тяготения Ньютона:

$$U(t, \{\mathbf{r}_a\}) = \frac{1}{2} \sum_a \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_a} m_a \left(\phi(t, \mathbf{r}') + G \frac{m_a}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a(t)|} \right) = -\sum_{a < b} G \frac{m_a m_b}{|\mathbf{r}_a(t) - \mathbf{r}_b(t)|}.\tag{7.19}$$

Отсюда заключаем, что константа G в действии Эйнштейна—Гильберта равна гравитационной постоянной Ньютона.

Изучим теперь стационарные (не зависящие от времени) решения вне гравитирующих масс.¹ Мы не будем предполагать малости масс или нерелятивистских скоростей их движения, но будем считать, что гравитационное поле слабо в силу удаленности от источника. Кроме того, мы будем предполагать источник автономным, не находящимся под действием внешних по отношению к системе полей. В этом случае тензор $\psi_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнениям

$$\Delta\psi_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_i\psi_{0i} = 0, \quad \partial_i\psi_{ij} = 0.\tag{7.20}$$

Чтобы найти связь между решениями этих уравнений и свойствами гравитирующих тел, выразим суперпотенциалы псевдотензора энергии-импульса $\tau^{\mu\nu\lambda}$ и $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$ через асимптотики решений. Отметим,

¹Нестационарные решения мы будем изучать в следующих двух лекциях.

что условие $\psi_{\mu,\nu}^{\bar{\nu}} = 0$ не фиксирует калибровку до конца. Преобразование (7.10) не нарушает это условие, если

$$\square \xi^\mu = 0, \quad (7.21)$$

что в случае не зависящих от времени преобразований означает

$$\Delta \xi^\mu = 0. \quad (7.22)$$

Такие преобразования мы будем называть *остаточными* калибровочными преобразованиями.

Будем искать решение уравнения Лапласа двух лидирующих порядков по r^{-1} . Функция r^{3-d} сама является решением уравнения Лапласа. Решения, которые спадают быстрее, даются просто производными этого решения. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \psi_{00} &= Ar^{3-d} + B^k \partial_k r^{3-d} + O(r^{1-d}), \\ \psi_{0i} &= A^i r^{3-d} + B^{ik} \partial_k r^{3-d} + O(r^{1-d}), \\ \psi_{ij} &= A^{ij} r^{3-d} + B^{ijk} \partial_k r^{3-d} + O(r^{1-d}), \quad A^{ij} = A^{ji}, \quad B^{ijk} = B^{jik}. \end{aligned}$$

Калибровочное условие сводится к равенствам

$$\begin{aligned} A^i \partial_i r^{3-d} &= A^{ij} \partial_j r^{3-d} = 0, \\ B^{ik} \partial_i \partial_k r^{3-d} &= B^{ijk} \partial_j \partial_k r^{3-d} = 0. \end{aligned}$$

Первая строчка немедленно дает $A^i = A^{ij} = 0$. Из второй строчки получаем, что²

$$B^{ik} = B^{[ik]} + C \delta^{ik}, \quad B^{ijk} = B^{i[jk]} + C^i \delta^{jk} = B^{j[ik]} + C^j \delta^{ik}.$$

Члены с символами Кронекера разрешены потому, что соответствующий вклад в левую часть калибровочного условия пропорционален функции $\Delta r^{3-d} = 0$.

Из последнего равенства нетрудно доказать, что $B^{ijk} = 0$, $C^i = 0$ и, таким образом, $\psi_{ij} = 0$. Выражения для ψ_{00} и ψ_{0i} можно упростить, используя преобразование координат, удовлетворяющее (7.22). Действительно, преобразованием³ $\xi^i = -B^i/A$, $\xi^0 = 0$ можно устранить второй член в выражении для ψ_{00} , а преобразованием $\xi^i = 0$, $\xi^0 = -Cr^{3-d}$ устранить симметричную часть в B^{ik} .

Итак, мы можем записать решение в виде

$$\psi_{00} = Ar^{3-d}, \quad \psi_{0i} = B^{ik} \partial_k r^{3-d} \quad (B^{ki} = -B^{ik}), \quad \psi_{ij} = 0. \quad (7.23)$$

Осталось связать константы A и B^{ik} с данными об источнике гравитации. Для этого вычислим величины $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$, входящие в псевдотензор энергии-импульса. Все компоненты нас интересовать не будут. Мы ограничимся компонентами $\chi^{\mu 0kl}$.

В компоненту χ^{00kl} вносит вклад как ψ_{00} , так и ψ_{0i} , но, поскольку на больших расстояниях $|\psi_{00}| \gg |\psi_{0i}|$, достаточно сохранить только вклад ψ_{00} . Действительно,

$$\chi^{00kl} = \frac{|g|}{16\pi G} (g^{00} g^{kl} - g^{0k} g^{0l}).$$

Первый член в скобках имеет в качестве первой поправки ψ_{00} , а второй — только ψ_{0i} . Поэтому вторым слагаемым можно пренебречь. Первая поправка в $|g|$ также содержит ψ_{00} , так что членами, содержащими ψ_{0i} пренебрегаем. В результате получаем

$$\chi^{00kl} = -\frac{\delta_{kl}}{16\pi G} (1 - Ar^{3-d}), \quad \tau^{00k} = -\frac{(d-3)A}{16\pi G} r^{1-d} x^k. \quad (7.24)$$

Подставляя в (6.29) получаем полную массу гравитирующей системы

$$M = P^0 = \oint df_{0i} \tau^{00i} = -\frac{(d-3)A}{16\pi G} \oint \frac{df_{0i} x^i}{r^{d-1}} = -\frac{(d-3)S_{d-1}A}{16\pi G}. \quad (7.25)$$

²Квадратные скобки означают антисимметризацию: $a_{[\mu_1 \dots \mu_n]} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S^n} (-1)^\sigma a_{\mu_{\sigma_1} \dots \mu_{\sigma_n}}$.

³Обратим внимание, что это преобразование не является малым в указанном выше смысле.

Вклад ψ_{0i} в массу, очевидно, будет стремиться к нулю при $r \rightarrow \infty$, что оправдывает сделанное приближение. Итак,

$$A = -\frac{16\pi GM}{(d-3)S_{d-1}} \quad (7.26)$$

в полном согласии с нерелятивистской формулой (7.16). В четырехмерном случае имеем

$$A = -4GM \quad (d=4). \quad (7.27)$$

Теперь вычислим χ^{i0kl} :

$$\chi^{i0kl} = \frac{|g|}{16\pi G} (g^{0i} g^{kl} - g^{ik} g^{0l}).$$

Оба слагаемых содержат множитель вида $g^{0i} = -h^{\bar{0}i} = h_{0i} = \psi_{0i}$, поэтому мы можем положить $|g| = 1$, $g^{ik} = -\delta^{ik}$. Находим

$$\begin{aligned} \chi^{i0kl} &= \frac{d-3}{16\pi G} \frac{(\delta^{kl} B^{im} - \delta^{ik} B^{lm}) x^m}{r^{d-1}}, \\ \tau^{i0k} &= \frac{d-3}{16\pi G} \frac{B^{im} (\delta^{km} r^2 - (d-1)x^k x^m)}{r^{d+1}}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Так как $\tau^{i0k} \sim r^{1-d}$ интеграл по поверхности для P^i обращается в нуль и мы получаем

$$P^i = 0, \quad (7.29)$$

как и следовало ожидать в статической задаче. А вот интеграл для момента импульса имеет степень на единицу больше и, вообще говоря, не равен нулю. Прямое вычисление с помощью (6.31) дает

$$B^{ij} = \frac{8\pi G}{(d-3)S_{d-1}} J^{ij}. \quad (7.30)$$

В четырехмерном случае имеем

$$B^{ij} = 2GJ^{ij} \quad (d=4). \quad (7.31)$$

Итак, по ведущим асимптотикам «гравитационных потенциалов» $h_{\mu\nu}$ на больших расстояниях мы можем узнать общие массу и момент импульса системы гравитирующих тел.

Задачи

1. Покажите, что для оператора K , определенного в (7.8), $Kh = 0$, если $h_{\mu\nu} = \varphi_{\mu,\nu} + \varphi_{\nu,\mu}$.
2. Выведите формулы (7.24), (7.28).
3. Найдите усредненную по времени асимптотику метрики на большом расстоянии от системы двух тел масс m_1 и m_2 , вращающихся вокруг общего центра масс, если дана относительная скорость тел $v_{\text{II}} \ll 1$ в точке наибольшего сближения и расстояние r_{II} между ними в этой точке.
4. Выведите формулу (7.30).

5*. Рассмотрим сферически симметричную тонкую сферу массы M и радиуса R , вращающуюся как твердое тело с постоянной угловой скоростью Ω , $\Omega R \ll 1$. В предположении применимости линейного приближения ($GM \ll l \ll R$, где l — толщина сферы) найдите создаваемое сферой гравитационное поле (метрику) в линейном приближении в первом порядке по ΩR и покажите, что метрика внутри сферы может быть описана как плоская метрика, вращающаяся с угловой скоростью

$$\omega = \frac{4}{3} \frac{GM\Omega}{R}.$$

(Для этого вам надо будет в сферических координатах сделать замену координат $\varphi = \varphi' + \omega t$ и подобрать ω так, чтобы метрика приобрела плоский вид $ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi'^2)$.)

Семинар 7

Полная энергия стационарной системы

Пусть псевдориманово пространство имеет времениподобное векторное поле Киллинга ξ , то есть векторное поле, удовлетворяющего условию $\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0$, времениподобное во всех точках. Мы можем выбрать координаты так, чтобы время текло вдоль этого вектора Киллинга: $\xi = \partial_0$ (т.е. $\xi^0 = 1, \xi^i = 0$). В этой системе координат метрика стационарна: $g_{\mu\nu,0} = 0$.

Для стационарной метрики можно показать, что

$$\sqrt{|g|}R_0^0 = \partial_i(\sqrt{|g|}g^{0\mu}\Gamma_{\mu 0}^i). \quad (7.32)$$

Предположим, что поле создается массами, расположенными в конечном объеме, так что на достаточно большом расстоянии поле становится слабым. Из (7.32) следует, что пространственный интеграл $\int d^{d-1}x \sqrt{|g|}R_0^0$ сводится к поверхностному интегралу. Подставляя в него асимптотическое выражение (7.23) и учитывая (7.26), получаем, что этот интеграл выражается через массу. Согласно уравнениям Эйнштейна, R_0^0 выражается через тензор энергии-импульса. Окончательно получаем, что полная энергия (=масса) вещества и гравитационного поля может быть выражена через интеграл от тензора энергии-импульса материи по пространственному объему:

$$M = \int d^{d-1}x \sqrt{|g|} \left(T_0^0 - \frac{1}{d-3} T_i^i \right). \quad (7.33)$$

В частности, в системе координат в которой $g_{0i} = 0$ в четырехмерном пространстве-времени для неподвижной (в данной системе координат) газообразной среды имеем

$$M = \int d^3x \sqrt{|g|}(\rho + 3p),$$

где ρ — плотность энергии, а p — давление.

Все это верно, конечно, только в том случае, если гиперповерхность $x^0 = \text{const}$ является гладким многообразием, гладко вложенным в пространство-время и топологически изоморфным \mathbb{R}^{d-1} . Как мы увидим ниже, это условие не выполняется в случае черной дыры, где эта поверхность имеет полость, из-за чего нельзя воспользоваться теоремой Гаусса. Черная дыра может быть даже полностью вакуумным решением, которое, тем не менее, ведет себя как объект конечной массы.