Лекция 6

Уравнения гравитационного поля и законы сохранения

До сих пор мы считали геометрию пространства-времени заданной. Теперь мы хотим ответить на вопрос, как эта геометрия зависит от материи, которая в ней живет. Согласно общей теории относительности, геометрия пространства-времени определяется плотностью энергии, плотностью импульса и плотностью потока импульса в системе, то есть *тензором энергии-импульса*. Как мы видели, в общей теории относительности удобно определять тензор энергии-импульса как вариационную производную от действия по метрике. Такое определение совпадает с каноническим в случаях моделей с минимальной связью материи и гравитации, но обладает универсальностью и не связано с однородностью и изотропией пространства-времени. Мы могли бы определять тензор энергии-импульса, используя другую симметрию — инвариантность действия относительно замен координат в пространстве-времени. Преобразования координат, как мы говорили, являются симметриями действия. С симметриями обычно связаны законы сохранения (теорема Нётер). Однако, как мы увидим ниже, связанные с этой симметрией токи тождественно обращаются в нуль на уравнениях движения, что означает, что данная симметрия является *калибровочной*. Собственно, требование обращение в нуль таких токов и составляет систему уравнений движения гравитационного поля — уравнения Эйнштейна. В первой половине лекции мы выведем уравнения Эйнштейна из некоторой гипотезы для действия гравитационного поля. Во второй половине лекции мы разберемся, как определить энергию, импульс и момент импульса в асимптотически плоском пространстве-времени.

С этого момента мы будем рассматривать метрику как динамическую переменную. Для этого в действии вида (5.20) не хватает членов. Действительно, обращение в нуль вариации действия материальных полей по метрике означало бы обращение в нуль тензора энергии-импульса материи, что явно нефизично. Давайте посмотрим, какого рода члены можно добавить. Мы будем обсуждать простейший случай, когда действие разбивается в сумму

$$S_{\text{общ}}[\phi, g] = S_{\text{мат}}[\phi|g] + S_{\text{грав}}[g], \tag{6.1}$$

где $S_{\text{мат}}$ — действие материи, минимально связанной с гравитацией, а вся динамика гравитационного поля содержится в гравитационном действии $S_{\text{грав}}$,[1] не содержащем полей материи. Уравнение движения для метрики при этом будет иметь вид

$$\frac{\delta S_{\text{общ}}}{\delta g_{\mu\nu}} \equiv \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathscr{L}_{\text{общ}})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathscr{L}_{\text{общ}}}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} + \dots = 0, \tag{6.2}$$

что эквивалентно тому, что на решениях уравнений движения суммарный тензор энергии-импульса материи и гравитации в точности равен нулю:

$$T^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = 0. \tag{6.3}$$

То есть формально энергия и импульс не могут распространяться в пространстве, а только переходят их гравитационной формы в «материальную» и обратно. Это противоречит физической интуиции, и говорит о том, что энергию и импульс гравитационного поля следует определить как-то по-другому. Мы обсудим этот вопрос в конце лекции.

Теперь найдем вид действия $S_{\text{грав}}$. Соответствующий лагранжиан $\mathscr{L}_{\text{грав}}$ должен быть скалярной величиной. Мы предположим, что он содержит первые производные метрики не более чем во второй степени, а вторые производные — не более чем в первой степени. Это значит, что компоненты метрики являются правильными динамическими переменными (обобщенными координатами), а набор компонент метрики и их первых производных по времени определяет начальные условия в задаче Коши. Из известных нам величин только единица и скаляр Риччи R удовлетворяют этому условию. Скаляры более общего вида $f(R, R_{\mathbf{12}}R^{\mathbf{12}}, R_{\mathbf{1234}}R^{\mathbf{1234}}, R_{\mathbf{12}}R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{3}}R^{\mathbf{23}}, \dots)$ будут содержать высшие производные, что означало бы появление дополнительных степеней свободы. Поэтому действие запишем в виде

$$S_{\text{грав}} = -\frac{1}{16\pi G}\int d^dx\,\sqrt{|g|}(R + 2\Lambda), \tag{6.4}$$

[1] Можно рассматривать и более сложный вид действия материи, содержащий неминимальные вклады вроде $RV(\phi)$, но в этом случае могут возникнуть дополнительные степени свободы, связанные с гравитацией. Модели такого рода требуют отдельного рассмотрения, и мы будем считать их выходящими за рамки собственно общей теории относительности.

где $G > 0$ и Λ — две постоянные. Действие такого вида называется *действием Эйнштейна—Гильберта*. Второе слагаемое (так называемый *лямбда-член*) не содержит производных и может быть отнесено к материи. Действительно, положим

$$T_\Lambda^{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{4\pi G\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\Lambda}{8\pi G}\, g^{\mu\nu}. \tag{6.5}$$

Тогда лямбда-член можно интерпретировать как действие для вещества с уравнением состояния $p = -\varepsilon = -\Lambda/8\pi G$. Если $\Lambda > 0$ плотность энергии положительна, а давление отрицательно. Если же $\Lambda < 0$, все наоборот. Мы не знаем такого рода материи, однако в некоторых модельных теориях поля имеются метастабильные состояния с такими свойствами.[2] Экспериментально лямбда-член слишком мал, чтобы играть роль во взаимодействиях даже на галактических масштабах, и его следует принимать во внимание только в космологических задачах, когда речь идет об эволюции Вселенной в целом. Итак, в дальнейшем лямбда-член мы будем опускать.

Действие (6.4) содержит вторые производные от компонент метрики. Обычно высшие производные в лагранжиане означают наличие дополнительных степеней свободы в системе. Однако в общей теории относительности таких дополнительных степеней свободы нет. Дело в том, что добавлением члена с полной дивергенцией действие можно привести к виду

$$S_{\text{грав}}[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^dx\,\sqrt{|g|}\,\mathscr{R}(g,\partial_\bullet g), \tag{6.6}$$

где $\mathscr{R}$ является функцией метрики и ее первых производных:

$$\mathscr{R} = g^{\mu\nu}(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\lambda}). \tag{6.7}$$

Более явно,

$$\mathscr{R} = \frac{1}{4}g_{\mu\nu,\rho}g_{\kappa\lambda,\sigma}\left(g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\kappa}g^{\nu\sigma}g^{\rho\lambda} - 2g^{\mu\nu}g^{\kappa\rho}g^{\lambda\sigma}\right). \tag{6.8}$$

Важно отметить, что величина $\mathscr{R}$, в отличие от скалярной кривизны R, зависит от системы координат, то есть не задает однозначно скалярную функцию на многообразии.

Найдем теперь уравнение движения для метрики. Проварьируем гравитационное действие:

$$\begin{aligned}\delta\int d^dx\,\sqrt{|g|}R = \delta\int d^dx\,\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} &= \int d^dx\,\left(\delta\sqrt{|g|}\,R + \sqrt{|g|}\,\delta g^{\mu\nu}\,R_{\mu\nu} + \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu}\right)\\ &= \int d^dx\,\left(\sqrt{|g|}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu}\right).\end{aligned}$$

Оказывается, последний член под интегралом является полной дивергенцией,

$$\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda(\sqrt{|g|}w^\lambda) = \sqrt{|g|}w^\lambda{}_{;\lambda}, \qquad w^\lambda = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\lambda\mu}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}, \tag{6.9}$$

и, таким образом, дает нулевой вклад, если вариация равна нулю на поверхности. Отсюда получаем *уравнения Эйнштейна* для метрики

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}. \tag{6.10}$$

Таким образом, роль источника гравитационного поля в общей теории относительности играет тензор энергии-импульса материи. Следует обратить внимание на два отличия от ньютоновской теории. Во-первых, источником гравитации является не только плотность массы (или плотность энергии), но и плотность импульса (или плотность потока энергии) и даже плотность потока импульса (тензор напряжений). Конечно, в солнечной системе вклады потоков энергии и импульса ничтожно малы. Однако в случае объектов, состоящих из быстро движущихся тел, либо в случае полей их надо учитывать. Во-вторых, гравитационное поле в ОТО обладает динамическими степенями свободы, так что источники

[2] Кроме того, таким свойством должно обладать основное состояние (вакуум) в квантовой теории поля. Однако найти плотность энергии вакуума удается только для интегрируемых моделей в двумерном плоском пространстве-времени.

не могут однозначно задавать конфигурацию поля. Это видно хотя бы из того, что при $d > 3$ тензор Римана не определяется однозначно тензором Риччи. Конечно, в отличие от электромагнитного поля, уравнения гравитационного поля нелинейны, так что решение нельзя разбить в сумму вынужденного и свободного поля. Тем не менее, задача Коши должна содержать не только начальное состояние материи, но и начальное состояние гравитационного поля, а малые возмущения гравитационного поля распространяются как волны. Чуть ниже мы обсудим это свойство.

Теперь свернем уравнение (6.10) с обратной метрикой $g^{\mu\nu}$. Мы легко находим

$$\frac{d-2}{2}R = -8\pi G T, \qquad T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}. \tag{6.11}$$

Подставляя это в (6.10), получаем альтернативный вид уравнений Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{d-2}T\right). \tag{6.12}$$

В частности, в отсутствие материи уравнения Эйнштейна записываются как

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{6.13}$$

Рассмотрим уравнения Эйнштейна как уравнения эволюции гравитационного поля. Для этого выделим члены со вторыми производные по времени (x^0) в тензоре Риччи. Нетрудно проверить, что

$$R_{00} = -\frac{1}{2}g^{ij}\ddot{g}_{ij} + \overline{R}_{00}, \qquad R_{0i} = \frac{1}{2}g^{0j}\ddot{g}_{ij} + \overline{R}_{0i}, \qquad R_{ij} = -\frac{1}{2}g^{00}\ddot{g}_{ij} + \overline{R}_{ij}. \tag{6.14}$$

Точки над буквами здесь означают производные по времени. Через $\overline{R}_{\mu\nu}$ обозначены члены, содержащие не более чем первые производные по времени. Мы видим, что компоненты тензора Риччи вообще не содержат вторых производных по времени от компонент $g_{0\mu}$. Этот результат будет еще выразительнее, если мы поднимем первый индекс и вычтем след:

$$\begin{gathered} R^0_0 - \frac{1}{2}R = \overline{R}^0_0 - \frac{1}{2}\overline{R}, \qquad R^0_i = \overline{R}^0_i, \\ R^i_j - \frac{\delta^i_j}{2}R = \frac{1}{2}(g^{0k}g^{0l} - g^{00}g^{kl})(\delta^i_k\ddot{g}_{jl} - \delta^i_j\ddot{g}_{kl}) + \overline{R}^i_j - \frac{\delta^i_j}{2}\overline{R}. \end{gathered} \tag{6.15}$$

То есть, мы видим, что d уравнений, в левую часть которых входит R^0_μ, являются *связями*, а не динамическими уравнениями. Динамическими являются $\frac{d(d-1)}{2}$ уравнений для пространственных компонент. Формально это означает, что, чтобы задать эволюцию метрики, мы должны задать на пространственно-подобной поверхности S_0 начальные значения $g_{ij}, \dot{g}_{ij}, g_{0\mu}$ — всего d^2 переменных. На самом деле число переменных меньше. Мы забыли о том, что все физические величины должны быть инвариантны по отношению к общим заменам координат. Формально замены координат описываются d функциями переменных x^0, x^i. Однако с динамической точки зрения ситуация сложнее. Чтобы ее описать, давайте для любого решения выберем синхронную систему координат, что будет соответствовать некоторой фиксации калибровки. Синхронная система координат, вообще говоря, не может быть определена во всем пространстве, но нам будет достаточно, что ее можно выбрать в окрестностях любой регулярной точки пространства-времени. В синхронной системе компоненты $g_{0\mu} = \delta_{0\mu}$ фиксированы. Остается $V = d(d-1)$ начальных данных на пространственно-подобной поверхности. Уравнения, содержащие R^0_μ, дают $C = d$ связей на эти величины. Кроме того, синхронная система координат не фиксирует калибровку полностью. Она сохраняет свойство синхронности при преобразованиях вида (3.23), если $\delta_\xi g_{0\mu} = 0$, то есть

$$\xi_{0;0} = 0, \qquad \xi_{i;0} = -\xi_{0;i}.$$

Это значит, что временные производные величин ξ_μ полностью определяются их значениями и пространственными производными на какой-нибудь пространственноподобной гиперповерхности. Таким образом, «остаточная» калибровочная свобода на начальной поверхности S_0 описывается $G = d$ функциями пространственных координат. Значит, начальные данные гравитационного поля описываются

$$V - C - G = d(d-1) - d - d = d(d-3) \tag{6.16}$$

функциями координат. Немного вольно можно сказать, что число собственных степеней свободы (половина размерности фазового пространства) гравитационного поля составляет $\frac{d(d-3)}{2}$ в каждой точке. Мы это установим более строго, когда будем изучать гравитационные волны.

Мы говорили, что уравнения Эйнштейна формально означают обращение в нуль суммарного тензора энергии-импульса материи и гравитации (уравнение (6.3)). Это, разумеется, не нарушает законов сохранения энергии, импульса и момента импульса, но делает их бессодержательными: все эти величины для любой области пространства просто равны нулю. Гравитационная (да и любая другая) волна в такой картине не переносит энергию и импульс, а просто передает сигнал: превратить такое-то количество энергии, импульса и момента гравитации в такой-то точке пространства в энергию, импульс и момент материи. Хотелось бы переопределить гравитационные энергию и импульс таким образом, чтобы вернуть смысл обычной физической интуиции.

Первым этим вопросом озаботился Эйнштейн. Он предложил вычислять тензор энергии-импульса гравитационного поля по стандартной формуле для канонического тензора энергии-импульса (5.9) в теории поля через усеченный лагранжиан $-\frac{1}{16\pi G}\mathscr{R}$, рассматривая метрику как поле в пространстве-времени, отвечающем некоторой выделенной системе координат:

$$\sqrt{|g|}\tilde{t}_\mu{}^\nu = -\frac{1}{16\pi G}\left(g_{\alpha\beta,\mu}\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathscr{R})}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} - \delta^\nu_\mu\sqrt{|g|}\mathscr{R}\right). \tag{6.17}$$

Этот объект не совпадает с тензором энергии-импульса $T^{\mu\nu}_{\text{грав}}$. Более того, он не является тензором. Действительно, величина $\mathscr{R}$ не является скаляром — она зависит от системы координат, да и величины $g_{\alpha\beta,\mu}$ не являются компонентами тензора. Величина $\tilde{t}_\mu{}^\nu$ называется *псевдотензором энергии-импульса Эйнштейна*.

Повторяя стандартный вывод (5.7)–(5.11), из инвариантности действия относительно сдвигов координат получаем

$$\left(\sqrt{|g|}(\tilde{\tilde{T}}_\mu{}^\nu + \tilde{t}_\mu{}^\nu)\right)_{,\nu} = 0, \qquad \tilde{\tilde{T}}_\mu{}^\nu = \phi_{,\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{,\nu}} - \delta^\nu_\mu\mathscr{L}, \tag{6.18}$$

так что вектор

$$\tilde{P}_\mu = \int d^{d-1}x\,\sqrt{|g|}(\tilde{\tilde{T}}_\mu{}^0 + \tilde{t}_\mu{}^0) \tag{6.19}$$

сохраняется: $\tilde{P}_{\mu,0} = 0$. Чтобы избежать проблем с $\tilde{\tilde{T}}$, будем считать, что поля ϕ скалярные, так что $\tilde{\tilde{T}}^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}$.

Неинвариантность псевдотензора $\tilde{t}_\mu{}^\nu$ означает, что понятие энергии и импульса гравитационного поля зависит от системы отсчета. По сути, определение (6.17) привязано к «фоновой» плоской метрике. Покажем, что если массы сосредоточены в конечной области и настоящая метрика $g_{\mu\nu}$ достаточно быстро стремится к плоской на больших расстояниях от этой области, энергия и импульс системы определены однозначно. Действительно, равенство нулю дивергенции суммарного псевдотензора энергии-импульса в односвязном пространстве эквивалентно существованию так называемого *суперпотенциала* $\tilde{\tau}_\mu{}^{\nu\lambda}$, такого что

$$\sqrt{|g|}(T_\mu{}^\nu + \tilde{t}_\mu{}^\nu) = \sqrt{|g|}(-(T_{\text{грав}})_\mu{}^\nu + \tilde{t}_\mu{}^\nu) = \partial_\lambda\tilde{\tau}_\mu{}^{\nu\lambda}, \qquad \tilde{\tau}_\mu{}^{\nu\lambda} = -\tilde{\tau}_\mu{}^{\lambda\nu}. \tag{6.20}$$

Суперпотенциал определен неоднозначно. Его можно найти явно, например, в виде

$$\tilde{\tau}_\mu{}^{\nu\lambda} = |g|^{-1/2}g_{\mu\kappa}\chi^{\kappa\nu\lambda\rho}{}_{,\rho}, \tag{6.21}$$

где

$$\chi^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda} - g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda}). \tag{6.22}$$

Отсюда получаем, что вектор импульса равен[3]

$$\tilde{P}_\mu = \int df_\nu\,\partial_\lambda\tilde{\tau}_\mu{}^{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\oint df_{\nu\lambda}\,\tilde{\tau}_\mu{}^{\nu\lambda}. \tag{6.23}$$

[3]Элемент $(d-k)$-мерной поверхности определяется как $df_{\mu_1\dots\mu_k} = \frac{1}{(d-k)!}\epsilon_{\mu_1\dots\mu_d}\,dx^{\mu_{k+1}}\wedge\dots\wedge dx^{\mu_d}$. Подробно теорема Остроградского—Гаусса на многообразии разбирается в Пояснении В.

Первый интеграл представляет собой интеграл по пространственноподобной гиперповерхности, а второй — по ее $(d-2)$-мерной границе. Таким образом, энергия и импульс системы оказываются не зависящими от систем координат вблизи гравитирующих масс, но зависят только от асимптотик метрики на больших расстояниях, в асимптотически плоской области. В этой области мы можем выбрать ортогональные координаты с метрикой Минковского $\eta_{\mu\nu}$, и тогда числа $\tilde{P}^\mu = \eta^{\mu\nu}\tilde{P}_\nu$ будут вести себя как компоненты вектора по отношению к преобразованиям Лоренца.

Недостаток псевдотензора энергии-импульса Эйнштейна состоит в том, что он несимметричен, и это не позволяет определить момент импульса и центр инерции системы. Этот недостаток был исправлен Ландау и Лифшицем в работе 1947 года. Они предложили свой псевдотензор энергии-импульса, основываясь на следующем рассуждении. Давайте рассмотрим окрестность точки x в «свободно падающей» системе отсчета, то есть в системе координат, в которой символы Кристоффеля в данной точке обращаются в нуль: $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x) = 0$. Это значит, что первые производные метрики тоже равны нулю: $g_{\mu\nu,\lambda}(x) = 0$. В этой системе отсчета гравитационное поле локально (в данной точке) отсутствует, поэтому естественно считать, что в ней энергия и импульс гравитационного поля равны нулю. Это согласуется с тем, что в данной точке тензор энергии-импульса в этой системе координат удовлетворяет уравнению непрерывности: $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$. Псевдотензор энергии-импульса Эйнштейна в этой точке тоже равен нулю. Поэтому

$$|g|T^{\mu\nu}(x) = -|g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}}(x) = \partial_\lambda \tau^{\mu\nu\lambda}(x), \tag{6.24}$$

где $\tau^{\mu\nu\lambda}$ — *суперпотенциал Ландау—Лифшица*:

$$\tau^{\mu\nu\lambda} = -\tau^{\mu\lambda\nu} = \chi^{\mu\nu\lambda\rho}{}_{,\rho}. \tag{6.25}$$

Здесь мы использовали тот факт, что первые производные метрики в точке x равны нулю, и мы можем выносить компоненты метрики из-под однократной производной ∂_λ. В правой и левой частях второго равенства в (6.24) остаются только члены с двукратными производными метрики.

В произвольной системе координат *псевдотензор энергии-импульса Ландау—Лифшица* определяется равенством

$$|g|t^{\mu\nu} = |g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}} + \tau^{\mu\nu\lambda}{}_{,\lambda}. \tag{6.26}$$

Соответственно, на решениях уравнений Эйнштейна имеем

$$|g|(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = \tau^{\mu\nu\lambda}{}_{,\lambda}. \tag{6.27}$$

В силу антисимметричности суперпотенциала по второй паре индексов имеет место закон сохранения

$$(|g|(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}))_{,\nu} = 0. \tag{6.28}$$

Энергия и импульс системы в конечном объеме даются выражением

$$P^\mu = \int df_\nu \, |g|(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\oint df_{\nu\lambda}\, \tau^{\mu\nu\lambda}. \tag{6.29}$$

В бесконечной асимптотически плоской системе они образуют вектор по отношению к (асимптотическим) преобразованиям Лоренца. Не совсем правильно говорить, что энергия и импульс гравитационного поля не локализованы. В конце концов, мы можем их определить в любом конечном объеме и определить их потоки через поверхность. Точнее будет сказать, что локализация энергии и импульса зависит от выбора пространственноподобной поверхности и совокупности систем отсчета в каждой ее точке.

В силу симметрии символов $\chi^{\mu\nu\kappa\lambda}{}_{,\kappa\lambda}$ по отношению к перестановке μ и ν псевдотензор Ландау—Лифшица симметричен и позволяет определить сохраняющийся момент импульса

$$J^{\mu\nu} = \int df_\lambda \, |g| \left(x^\mu (T^{\nu\lambda} + t^{\nu\lambda}) - x^\nu (T^{\mu\lambda} + t^{\mu\lambda}) \right). \tag{6.30}$$

Момент импульса тоже можно определить через метрику системы на границе пространственно-подобной поверхности:

$$J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\oint df_{\alpha\beta}\, (x^\mu \tau^{\nu\alpha\beta} - x^\nu \tau^{\mu\alpha\beta} + \chi^{\mu\alpha\beta\nu}). \tag{6.31}$$

Центр инерции системы в данной системе координат определяется формулой

$$X^i = \frac{\int d^{d-1}x\,|g|(T^{00}+t^{00})x^i}{\int d^{d-1}x\,|g|(T^{00}+t^{00})} \tag{6.32}$$

В асимптотически плоском пространстве центр инерции движется с постоянной скоростью $V^i = P^i/P^0$ в любой системе координат, однако само его определение зависит от системы координат.

Определяя энергию, импульс и момент импульса системы, мы предполагали, что на больших расстояниях от гравитирующих масс пространство-время является асимптотически плоским. Хотя при изучении отдельных массивных объектов такое приближение довольно хорошо работает, в целом это предположение находится в противоречии с наблюдательными данными. В силу относительной равномерности распределения массы во Вселенной, а также плохо изученного фактора, называемого темной энергией (вклад которой напоминает вклад космологической постоянной), пространство-время не является асимптотически плоским. В связи с этим изучаются модификации данной конструкции, в которых вместо плоского пространства рассматривается произвольная «фоновая» метрика, а энергия и импульс приписываются только отклонениям геометрии пространства-времени от «фона».

Задачи

1. Докажите (6.9).

2. Проверьте формулы (6.14), (6.15).

3. Покажите, что в асимптотически плоском пространстве, где метрика ведет себя как $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(r^{3-d})$ вдали от гравитирующих тел (r — пространственное расстояние от источника гравитации), векторы энергии-импульса Эйнштейна и Ландау—Лифшица совпадают. Покажите, что при преобразованиях Лоренца в асимптотической области величины P^μ преобразуются как компоненты вектора.

4. Выведите выражение (6.31) для момента импульса через интеграл по поверхности.

5*. Покажите, что действие Эйнштейна—Гильберта (6.4) (с $\Lambda = 0$, как мы условились) можно привести к виду (6.6) с лагранжианом (6.7)

Семинар 6

Синхронная система отсчета

В лекции уже упоминалась *синхронная система отсчета*, то есть система координат, в которой

$$g_{00} = 1, \qquad g_{0i} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij}\,dx^i dx^j. \tag{6.33}$$

Это значит, что также $g^{00} = 1$. В этой системе координат время является собственным временем некоторой времениподобной геодезической. Действительно, символы Кристоффеля в такой системе координат равны

$$\Gamma^0_{0\mu} = \Gamma^\mu_{00} = 0, \qquad \Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij,0}, \qquad \Gamma^i_{j0} = \frac{1}{2}\gamma^{ik}\gamma_{kj,0}, \qquad \Gamma^i_{jk} = \tilde\Gamma^i_{jk},$$

где $\tilde\Gamma^i_{jk}$ — пространственные символы Кристоффеля, вычисленные по метрике γ_{ij}. Отсюда уравнения геодезических имеют вид

$$\ddot x^0 + \Gamma^0_{ij}\dot x^i \dot x^j = 0, \qquad \ddot x^i + 2\Gamma^i_{j0}\dot x^i \dot x^0 + \Gamma^i_{jk}\dot x^i \dot x^k = 0. \tag{6.34}$$

Поэтому, если $\dot x^i = 0$, а $\dot x^0 = 1$ в некоторый момент времени, то это условие выполняется и во все остальные моменты времени на карте, покрываемой этой системой координат. Это означает, что кривые $x^i = \mathrm{const}$ образуют конгруэнцию времениподобных геодезических, параметризованную пространственными координатами x^i. Значит такая система координат ограничена точками пересечения кривых конгруэнции. Сужая область значений x^i можно продлить интервал времени, на котором определена система координат, но не дальше чем до *каустик* или *фокальных гиперповерхностей*, то есть гиперповерхностей, образованных фокальными точками конгруэнции. Фокальные точки дают абсолютный предел продолжения синхронной системы координат и являются препятствием к интегрируемости уравнений геодезических. Внутри синхронной системы координат фокальные точки находятся из условия

$$\det(\gamma_{ij}) = 0. \tag{6.35}$$

Каустики являются гиперповерхностями, огибающими семейство кривых.

Покажем теперь, что в окрестности любой точки пространственно-временного многообразия можно построить синхронную систему координат. Пусть $\{x^\mu\}$ — произвольная система координат в некоторой достаточно малой области пространства-времени U. Тогда собственное время τ, которое связано с действием S свободно падающей частицы соотношением $\tau = -S/m$, как функция конечной точки x удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби

$$g^{\mu\nu}\tau_{,\mu}\tau_{,\nu} = 1. \tag{6.36}$$

При этом

$$\tau_{,\mu} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu. \tag{6.37}$$

Уравнение (6.36) имеет полный интеграл, зависящий от d параметров, причем один из этих параметров можно выбрать аддитивной константой, которую можно исключить. Поэтому оставим только $d-1$ параметр $y^1, \ldots, y^{d-1}$:

$$\tau = f(y^1, \ldots, y^{d-1}; x). \tag{6.38}$$

Геодезические определяются теперь системой уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = z_i, \tag{6.39}$$

где $z_1, \ldots, z_{d-1}$ — новые константы. Давайте *выберем* эти константы равными нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = 0. \tag{6.40}$$

Этого всегда можно добиться, взяв решение уравнений (6.39) с произвольными z_i и переопределив функцию $f \to f + z_i y^i$ (суммирование подразумевается). Такое переопределение переводит решение уравнения (6.36) в решение и эквивалентно сдвигу начального значения аффинного параметра τ по-отдельности для каждой геодезической.

Тогда равенства (6.38), (6.40) дают систему d уравнений, позволяющих выразить x^μ через $y^0 = \tau, y^1, \ldots, y^{d-1}$ и наоборот. Рассмотрим бесконечно малый интервал dx^μ и соответствующий ему интервал dy^μ. Продифференцировав (6.38) и использовав (6.40), получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu}dx^\mu = dy^0.$$

Выражая дифференциал dx^μ через частные производные по y_i при постоянных y^0, y^j $(j \neq i)$, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} = 0. \tag{6.41}$$

Далее с помощью (6.37) получаем

$$\begin{aligned}
ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^0}dy^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}dy^i\right)\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^0}dy^0 + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^i}dy^i\right) \\
&= g_{\mu\nu}\left(g^{\mu\kappa}\frac{\partial f}{\partial x^\kappa}dy^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}dy^i\right)\left(g^{\nu\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}dy^0 + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^i}dy^i\right) \\
&= (dy^0)^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}dy^0 dy^i + g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}\,dy^i dy^j.
\end{aligned}$$

Второе слагаемое обращается в нуль в силу (6.41), и мы получаем

$$ds^2 = (dy^0)^2 - \gamma_{ij}\,dy^i dy^j, \qquad \gamma_{ij} = -g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}. \tag{6.42}$$

То есть действительно $\{y^\mu\}$ дает синхронную систему отсчета, а система (6.38), (6.40) погружает ее в систему координат $\{x^\mu\}$ общего вида.