Лекция 4

Частицы в искривленном пространстве-времени

Общая теория относительности отличается от специальной, во-первых, тем, что пространство-время общей теории относительности представляет собой псевдориманово многообразие общего вида M сигнатуры $(1, d-1)$, а, во-вторых, тем, что сама структура многообразия имеет динамику, зависящую от движения вещества. Разберемся сначала с первой частью — движением *пробных* частиц в заданном искривленном пространстве-времени. Под пробной частицей мы будем понимать частицу настолько легкую, что влиянием ее собственного гравитационного поля на пространство-время и через него на ее собственное движение можно пренебречь.

Прежде всего, метрика в пространстве-времени, также как и в специальной теории относительности, определяет собственное время частицы. Элемент собственного времени ds не зависит от системы координат и определяется как

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu. \tag{4.1}$$

Можно предположить, что действие свободной частицы выражается через собственное время так же, как и в специальной теории относительности:

$$S[x] = -m \int_A^B ds = -m \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}. \tag{4.2}$$

Параметр τ, параметризующий кривую $x(\tau)$, вообще говоря, произволен. Достоинство лагранжева формализма состоит в том, что с его помощью нетрудно получить уравнение движения в произвольной параметризации. Действие (4.2) *репараметризационно-инвариантно*, то есть инвариантно относительно преобразований

$$\tau = \alpha(\tau'), \tag{4.3}$$

где α произвольная гладкая взаимно-однозначная вещественная функция. Физический смысл этой инвариантности состоит в том, что физическим объектом является не функция $x(\tau)$, а мировая линия, то есть кривая на многообразии M. Репараметризации (4.3) являются примером так называемых *калибровочных преобразований*, связывающих математически разные функции, описывающие одну и ту же физическую реальность. Чтобы выбрать какое-нибудь одно решение $x(\tau)$ из бесконечного количества решений, отвечающих одной и той же мировой линии, нужно наложить на эту функцию какое-то условие или, как говорят физики, *зафиксировать калибровку*. Удобно наложить следующее условие:

$$\frac{d}{d\tau}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right) = 0 \tag{4.4}$$

Полагая

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = C^2, \tag{4.5}$$

получим, что этой калибровке $s = C\tau + C_1$, то есть параметр τ и есть, с точностью до множителя и выбора начального момента, собственное время. Оставшиеся свободными две константы C и C_1 связаны с *остаточной калибровочной симметрией* после фиксации калибровки.

Общее лагранжево уравнение для $x(\tau)$ довольно сложное, но в калибровке (4.4) оно упрощается и совпадает с приведенным в Лекции 2 *уравнением геодезической*

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \tag{4.6}$$

где $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ суть символы Кристоффеля для связности Леви-Чивиты (2.19). То есть мировой линией частицы, свободно падающей в гравитационном поле, является геодезическая. Теперь важно проверить согласованность условия фиксации калибровки (4.4) с решением (4.6). Иными словами, надо проверить, что (4.4) выполняется на *каждом* решении (4.6). Это нетрудно сделать.

Сохранение $g(\dot{x}, \dot{x})$ имеет важное следствие для геометрии геодезических. Из него немедленно следует следующая теорема. Все геодезические делятся на три класса:

1) времениподобные геодезические, для которых $g(\dot{x}, \dot{x}) > 0$ на всем протяжении;

2) светоподобные (*изотропные*) геодезические, для которых $g(\dot{x}, \dot{x}) = 0$;

3) пространственноподобные геодезические, для которых $g(\dot{x}, \dot{x}) < 0$.

Действие (4.2) дает времениподобные геодезические, так что мы можем положить $C = 1$ в (4.5) и отождествить параметр τ с собственным временем s. Светоподобные геодезические не могут быть получены из действия (4.2). Однако физически их можно рассматривать как предел времениподобных мировых линий при $m \to 0$. Это следует из того, что в любых процессах взаимодействия частиц частицы малой массы будут чаще всего вылетать с большими скоростями dx^i/dx^0, так что в пределе нулевой массы они будут всегда вылетать со скоростью света, что соответствует $g(\dot{x}, \dot{x}) = 0$. Пространственноподобные геодезические могут быть формально получены из действия $\mu \int d\tau \sqrt{-g(\dot{x}, \dot{x})}$, но исключаются как мировые линии частиц из соображений причинности.[1]

Чтобы прояснить связь с ньютоновской механикой, запишем действие нерелятивистской частицы в виде

$$S = \int dt \left(-m + \frac{mv^2}{2} - m\phi(t, \boldsymbol{r}) \right), \tag{4.7}$$

где первый член $-m$ добавлен просто для согласованности с релятивистским действием, а $\phi(t, \boldsymbol{r})$ — ньютоновский гравитационный потенциал. Сравнивая с (4.2), мы получим

$$ds = \left(1 - \frac{v^2}{2} + \phi \right) dt.$$

Считая второе и третье слагаемое малым и учитывая, что $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\, dt$, получаем

$$ds^2 = (1 + 2\phi) dt^2 - d\boldsymbol{r}^2. \tag{4.8}$$

Мы видим, что в данном приближении

$$g_{00} = 1 + 2\phi, \qquad g_{0i} = 0, \qquad g_{ij} = -\delta_{ij}. \tag{4.9}$$

Это связывает гравитационный потенциал с метрическим тензором. В дальнейшем, изучая нерелятивистский предел уравнений Эйнштейна (лекция 7), мы увидим, как получить ньютоновскую форму гравитационного потенциала $\phi(t, \boldsymbol{r}) = -G \sum_i m_i / |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i(t)|$ для системы медленно движущихся тел с массами m_i в точках $\boldsymbol{r}_i(t)$. Мы увидим также, что приближение (4.9) не согласуется с уравнениями Эйнштейна, поскольку при выводе мы пренебрегли в g_{ij} членами, дающими малый (порядка ϕv^2) вклад в действие для частицы, но сравнимый с g_{00} (порядка $\partial_i \partial_j \phi$) вклад в кривизну. Тем не менее, важно запомнить, что мировая линия нерелятивистской частицы откланяется от прямой не в силу искривления пространства, а в силу *изменения скорости течения времени.*

Рассмотрим теперь лагранжеву формулировку уравнений движения частицы в чуть более общем виде — в присутствии электромагнитного поля:

$$S[x] = \int_A^B (-m\, ds - eA_\mu\, dx^\mu) = \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau\, (-m\sqrt{g(\dot{x}, \dot{x})} - eA(\dot{x})). \tag{4.10}$$

Если мы наложим калибровочное условие (4.5) с $C = 1$ (то есть $\tau = s$), мы получим уравнение движения

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{e}{m} F^\lambda{}_\kappa \dot{x}^\kappa, \qquad F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \tag{4.11}$$

Рассмотрим теперь гамильтоново описание движения частиц в гравитационном поле. Забудем о фиксации калибровки и будем считать «время» τ произвольным параметром. Этот произвол ведет в гамильтоновом подходе к возникновению *связи*. Это значит, что фазовая траектория частицы всегда лежит в некотором подмногообразии пространства канонических переменных. Действительно, нетрудно проверить, что матрица $\partial^2 L / \partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu$ вырождена и имеет ранг 3. Следовательно, имеется по крайней

[1] В квантовой теории поля частицы с мнимой массой $m = \mathrm{i}\mu$ исключаются по другой причине. Таким частицам отвечают конфигурации полей вблизи максимума, а не минимума потенциальной энергии, так что появление мнимой массы означает абсолютную неустойчивость «вакуумной» конфигурации. Решения же с вещественной массой не допускают распространения возмущений вне светового конуса.

мере одна связь между обобщенными координатами x^μ и импульсами $P_\mu = \partial L/\partial \dot{x}^\mu$. Это отражает тот факт, что на самом деле частица имеет три степени свободы, а не четыре. Действительно, имеем[2]

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = -\frac{m g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{g(\dot{x},\dot{x})}} - eA_\mu. \tag{4.12}$$

Отсюда немедленно получаем *связь* между каноническими переменными

$$\chi(x,P) \equiv g^{\mu\nu}(P_\mu + eA_\mu)(P_\nu + eA_\nu) - m^2 = 0 \tag{4.13}$$

Для гамильтониана имеем

$$H_0(x,P) = P_\mu \dot{x}^\mu - L(x,\dot{x}) = 0 \tag{4.14}$$

Как показал Дирак, наличие связи означает, что мы имеем право модифицировать гамильтониан, добавив связь χ:

$$H_\alpha(x,P) = H_0(x,P) + \alpha(x,P)\chi(x,P) = \alpha(x,P)\left(g^{\mu\nu}(P_\mu + eA_\mu)(P_\nu + eA_\nu) - m^2\right). \tag{4.15}$$

где $\alpha(x,P)$ — произвольная гладкая функция канонических переменных без особенностей. Очевидно,

$$\dot{\chi} = \{H_\alpha, \chi\} = \alpha\{\chi,\chi\} + \{\alpha,\chi\}\chi = 0$$

на уравнении связи $\chi = 0$. Это значит, что условие согласованности связи с эволюцией системы не накладывает никаких дополнительных связей на систему. Стандартным образом получаем уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{P}_\mu &= -\frac{\partial H_\alpha}{\partial x^\mu} = -\alpha\left(\partial_\mu g^{\lambda\nu}(P_\lambda + eA_\lambda) + 2eg^{\lambda\nu}\partial_\mu A_\lambda\right)(P_\nu + eA_\nu), \\ \dot{x}^\mu &= \frac{\partial H_\alpha}{\partial P_\mu} = 2\alpha g^{\mu\nu}(P_\nu + eA_\nu). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Если мы наложим условие $\alpha = \text{const}$, мы (после подходящего перемасштабирования параметра τ) опять получим уравнение движения (4.11).

Связь (4.13) дает возможность немедленно получить уравнение Гамильтона—Якоби для частицы в гравитационном поле. Рассмотрим действие S на решении $x(\tau)$ уравнений движения как функцию конечного значения «времени» $\tau = \tau_B$ и конечного положения частицы $x = x_B$ при постоянном начальном «времени» τ_A и начальном положении x_A частицы

$$S(\tau_B, x_B) = \int_A^B d\tau\, L(x^\bullet, \dot{x}^\bullet) = \int_A^B d\tau\,(P_\mu \dot{x}^\mu - H_0) = \int_A^B (P_\mu\, dx^\mu - H_0\, d\tau). \tag{4.17}$$

Отсюда имеем

$$dS(\tau, x) = P_\mu\, dx^\mu - H_0\, d\tau. \tag{4.18}$$

Поскольку $H_0 = 0$, действие вообще не зависит от τ, как и должно быть в силу репараметризационной инвариантности. Имеем

$$dS(x) = P_\mu\, dx^\mu \quad \Leftrightarrow \quad P_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}. \tag{4.19}$$

Подставляя это в уравнение связи (4.13), получаем

$$g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} + eA_\mu\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} + eA_\nu\right) - m^2 = 0. \tag{4.20}$$

Полученное *уравнение Га́мильтона—Яко́би* не зависит от параметризации кривой и в этом смысле калибровочно-инвариантно. Это уравнение имеет очевидный предел при $m \to 0$, и дает в этом пределе уравнение для действия на светоподобных кривых. Если также $A = 0$, эти кривые являются светоподобными геодезическими, а действие представляет собой аффинный параметр на этих кривых.

[2]Обращу ваше внимание, что при таком определении пространственные компоненты P_i имеют правильный знак, а временная компонента — противоположный: $P_0 = -E$. В литературе по квантовой теории поля и теории элементарных частиц чаще всего выбирают противоположный знак.

Как с помощью уравнения Гамильтона—Якоби можно решить задачу о движении частицы? Предположим, что нам удалось найти семейство решений $S(x,\alpha)$, зависящих от параметра α. Рассмотрим эволюцию во «времени» производной $\partial S(x,\alpha)/\partial\alpha$:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial S(x(\tau),\alpha)}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\dot x^\mu\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha}(P_\mu\dot x^\mu)=\frac{\partial}{\partial\alpha}(P_\mu\dot x^\mu-H_0)=\frac{\partial L(x,\dot x)}{\partial\alpha}=0.$$

Значит,

$$\frac{\partial S(x(\tau),\alpha)}{\partial\alpha}=\beta,$$

где β — новая константа. Это — *алгебраическое* уравнение на x^μ. Теперь, если нам удалось найти решение, зависящее от $d-1$ параметров $\alpha_1,\dots,\alpha_{d-1}$, такое что всюду

$$\det\frac{\partial^2 S}{\partial x^i\,\partial\alpha_j}\ne 0,$$

мы имеем $d-1$ алгебраических уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_i}=\beta^i,\qquad i=1,\dots,d-1,\tag{4.21}$$

позволяющих найти $d-1$ переменных $x^1,\dots x^{d-1}$ как функции времени x^0. Такое решение называется *полным интегралом* уравнения Гамильтона—Якоби. $2(d-1)$ констант α_i,β^i являются параметрами решения. Переменные α_i и β^i представляют собой особые (стационарные) канонические переменные в фазовом пространстве системы, а формулы (4.19) и (4.21) задают каноническое преобразование от переменных P_i,x^i к переменным α_i,β^i.

Заметим, что статических переменных ровно столько, сколько должно быть начальных данных в задаче $(x^i,\frac{dx^i}{dx^0})$. В самом деле, мы можем получать семейства решений, меняя начальную точку. Если мы положим $\alpha_i=x^i_A$, то немедленно получим $\beta^i=-P_{Ai}$. Это доказывает существование полного интеграла движения в окрестности точки x_A. Так как точка x_A произвольна, можно утверждать, что полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби существует в некоторой окрестности любой точки.

Описанный способ построения полного интеграла удобен при численных расчетах. Однако для аналитического решения задач использовать начальные данные в качестве параметров решения затруднительно. В аналитических вычислениях используется метод разделения переменных, который мы обсудим на семинаре. Если все переменные разделяются, и разделенные переменные хорошо определены, решение существует глобально. В таком случае механическую систему называют *интегрируемой.* Хотя большинство задач не являются интегрируемыми, интегрируемые системы играют большую роль в качестве нулевого приближения. Мы продемонстрируем мощь метода разделения переменных в конкретных задачах движения частиц в гравитационном поле в следующих лекциях.

Задачи

1. Получите (4.11) из действия (4.10) при условии (4.4). В обратную сторону покажите, что на любых решениях уравнения (4.11) выполняется условие (4.4).

2. Найдите матрицу $A_{\mu\nu}=(\partial^2L/\partial\dot x^\mu\partial\dot x^\nu)$ для действия (4.10) и покажите, что она вырождена в направлении вектора $\dot x$: $A_{\mu\nu}\dot x^\nu=0$.

3. Покажите, что при $\alpha=\mathrm{const}$ из (4.16) следует уравнение (4.11).

4. Рассмотрим двумерную поверхность в пространстве-времени, заданную гладкой функцией $x=\varphi(\tau,\sigma)$ двух вещественных параметров. При каждом данном значении σ функция φ задает кривую $\varphi(\cdot,\sigma)$, а при каждом значении τ — кривую $\varphi(\tau,\cdot)$. Обозначим через $\dot\varphi(\tau,\sigma)=\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi^\mu(\tau,\sigma)\,\partial_\mu$, $\varphi'(\tau,\sigma)=\frac{\partial}{\partial\sigma}\varphi^\mu(\tau,\sigma)\,\partial_\mu$ касательные к двум семействам кривых — при данных σ и при данных τ. Покажите, что для связности Леви-Чивиты

$$\nabla_{\dot\varphi}\varphi'=\nabla_{\varphi'}\dot\varphi.$$

5*. Приливные силы. В условиях предыдущей задачи предположим, что кривые первого сорта являются геодезическими с собственным временем τ: $\nabla_{\dot\varphi}\dot\varphi=0$. Можно сказать, что вектор $\varphi'(\tau,\sigma)\,d\sigma$ соединяет две соседние геодезические в данный момент собственного времени τ. Таким образом, вторая ковариантная производная по τ будет давать относительное ускорение соответствующих материальных точек. Докажите, что

$$\nabla^2_{\dot\varphi}\varphi' = R(\dot\varphi, \varphi')\dot\varphi. \tag{4.22}$$

Семинар 4

Уравнение Гамильтона—Якоби

Рассмотрим систему с действием $S[q] = \int_{t_A}^{t_B} dt\, L(q, \dot q, t)$, где $q = (q^1, \ldots, q^n)$. Обобщенные импульсы и гамильтониан равны

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial q^a}, \qquad H(q,p,t) = p_a \dot q^a - L(q, \dot q, t).$$

Задача состоит в решении уравнений движения

$$\dot q^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \qquad \dot p_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a}.$$

Рассмотрим действие как функцию $S = S(q,t)$ конечного времени $t = t_B$ и значений координат $q^a = q^a(t_B)$ на решениях уравнений движения с некоторыми начальными условиями $t_0 = t_A$, $q_0^a = q^a(t_A)$. Тогда

$$dS = d\int dt\, L = d\int dt(p_a\dot q^a - H) = p_a\, dq^a - H(q,p,t)\, dt.$$

Следовательно,

$$p_a = \frac{\partial S}{\partial q^a}, \qquad H = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Отсюда находим *уравнение Гамильтона—Якоби*:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0.$$

1. Метод разделения переменных и интегрируемость.

   Предположим, что заменой переменных мы смогли найти такие переменные q, p, что уравнение Гамильтона—Якоби приняло вид

   $$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^1, \ldots, q^{n-1}, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_{n-1}}, f\left(q^n, \frac{\partial S}{\partial q^n}\right)\right) = 0.$$

   Решим уравнение

   $$f\left(q^n, \frac{\partial S}{\partial q^n}\right) = \alpha_n \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial S}{\partial q^n} = g_n(\alpha_n, q^n, t),$$

   где α_n — константа. Это уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка и решается в квадратурах:

   $$S(q,t) = \int^{q_n} dx\, g_n(\alpha_n, x, t) + S_{n-1}(q_1, \ldots, q_{n-1}, \alpha_n, t).$$

   Легко показать, что величина

   $$\beta^n = \frac{\partial S}{\partial \alpha_n} \tag{4.23}$$

   сохраняется, то есть (4.23) является алгебраическим уравнением на переменную q_n.

   Если процедуру можно продолжить n раз, то мы получаем систему алгебраических уравнений

   $$\beta^a = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_a},$$

   выражающую q через t. В этом случае систему называют *интегрируемой*.

Теорема Лиувилля об интегрируемости относится к консервативным системам, в которых лагранжиан (и гамильтониан) явно не зависит от времени t. Если в такой системе имеется n независимых интегралов движения *в инволюции*, то есть

$$\{I_a, I_b\} = 0 \quad (\forall a, b = 1, \dots, n),$$

то при некоторых условиях невырожденности система допускает разделение переменных. При этом на многообразии $M_\alpha = \{(q,p) \mid I_a(q,p) = \alpha_a\}$ можно ввести переменные φ^a, уравнения движения на которых имеет вид

$$\dot{\varphi}^a = \omega^a(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Если многообразие M_α компактно, то оно является тором, причем можно выбрать переменные так, чтобы $\varphi_a + 2\pi \sim \varphi_a$, а I_a были канонически сопряженными им переменными. Тогда переменные I_a называются *переменными действия*, а φ^a — *переменными угла*.

Далее мы разберем несколько примеров.

2. Свободная частица в плоском пространстве-времени: декартовы, цилиндрические и сферические координаты.

3. Частица в ньютоновском потенциале.