Лекция 3

Риманова кривизна. Преобразования тензорных полей

В этой лекции мы рассмотрим два важных вопроса дифференциальной геометрии: вопрос об инвариантном описании связности и вопрос о преобразованиях тензорных полей, порождаемых заменами координат.

Первый вопрос сформулируем так: нельзя ли подходящей заменой координат вообще обратить символы Кристоффеля в нуль на всем многообразии или хотя бы на каком-то открытом подмножестве? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно ввести тензорную величину, которая выражалась бы через связность и равнялась нулю для нулевых символов Кристоффеля. Мы построим такую величину — риманову кривизну. Если риманова кривизна не равна нулю, невозможно обратить символы Кристоффеля в нуль заменой координат. Верна и обратная теорема: если риманова кривизна равна нулю на некоторой карте, на ней существует такая система координат (плоские координаты), в которой символы Кристоффеля равны нулю.

Чтобы ввести риманову кривизну, рассмотрим параллельный перенос вдоль замкнутого контура $\varphi(\tau)$, $\varphi(1)=\varphi(0)$. Если $a(\tau)$ — ковариантно постоянный вдоль контура вектор, то, тем не менее, нет никакой гарантии, что $a(1)$ окажется равным $a(0)$. Будем в координатах решать уравнение (2.8) на маленькой петле размера порядка ε (в данной системе координат) во втором порядке по ε. При этом важно понимать, что символы Кристоффеля и компоненты вектора $a(\tau)$ меняются вдоль петли медленно, в то время как компоненты вектора $\dot\varphi(\tau)$ малы ($\sim\varepsilon$), но меняются быстро. Будем решать уравнение (2.8) итерациями, получая результат в виде суммы

$$a^\mu(\tau)=a^\mu_0(\tau)+a^\mu_1(\tau)+a^\mu_2(\tau)+o(\varepsilon^2).$$

В нулевом порядке $a^\mu_0(\tau)=a^\lambda$. В первой итерации имеем:

$$\begin{aligned}
a^\kappa_1(\tau)&=-\int_0^\tau d\tau_1\,\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}(x^\bullet+\delta\varphi^\bullet(\tau_1))\dot\varphi^\nu(\tau_1)a^\lambda\\
&=-\int_0^\tau d\tau_1\left(\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}(x)+\partial_\mu\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}(x)\,\delta\varphi^\mu(\tau_1)+o(\varepsilon)\right)\dot\varphi^\nu(\tau_1)a^\lambda\\
&=-\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}\delta\varphi^\nu(\tau)a^\lambda-\partial_\mu\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}\int_0^\tau d\tau_1\,\delta\varphi^\mu(\tau_1)\dot\varphi^\nu(\tau_1)a^\lambda+o(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

где $\delta\varphi^\mu(\tau)=\varphi^\mu(\tau)-\varphi^\mu(0)=\varphi^\mu(\tau)-x^\mu$, $\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}=\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}(x)$. Правая часть содержит как член первого порядка по ε, так и член второго порядка. Вторые производные от символов Кристоффеля дадут уже члены порядка выше второго, которыми мы пренебрегаем. Во второй итерации имеем

$$\begin{aligned}
a^\kappa_2(\tau)&=-a^\kappa_1(\tau)-\int_0^\tau d\tau_1\,\Gamma^\kappa_{\rho\nu}(x^\bullet+\delta\varphi^\bullet(\tau_1))\dot\varphi^\nu(\tau_1)(a^\rho+a^\rho_1(\tau_1))\\
&=-\Gamma^\kappa_{\rho\nu}\int_0^\tau d\tau_1\,\dot\varphi^\nu(\tau_1)a^\rho_1(\tau_1)+o(\varepsilon^2)\\
&=\Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu}\int_0^\tau d\tau_1\,\dot\varphi^\nu(\tau_1)\,\delta\varphi^\mu(\tau_1)a^\lambda+o(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Собирая вместе, с точностью $o(\varepsilon^2)$ получаем

$$\delta a^\kappa\equiv a^\kappa(1)-a^\kappa(0)=a^\kappa_1(1)+a^\kappa_2(1)=-(\partial_\mu\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}-\Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu})a^\lambda f^{\mu\nu},\tag{3.1}$$

где

$$f^{\mu\nu}=\int_0^1 d\tau\,\delta\varphi^\mu(\tau)\dot\varphi^\nu(\tau)=\int_0^1 d\tau\,\delta\varphi^\mu(\tau)\delta\dot\varphi^\nu(\tau).$$

Легко убедиться, что тензор $f^{\mu\nu}$ антисимметричен. Действительно,

$$f^{\mu\nu}+f^{\nu\mu}=\int_0^1 d\tau\,(\delta\varphi^\mu\delta\dot\varphi^\nu+\delta\dot\varphi^\mu\delta\varphi^\nu)=\int_0^1 d\tau\,\frac{d}{d\tau}(\delta\varphi^\mu\delta\varphi^\nu)=0,$$

так как $\delta\varphi^\mu(1) = \delta\varphi^\mu(0) = 0$. Отсюда заключаем, что

$$f^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int d\tau\,(\delta\varphi^\mu\delta\dot\varphi^\nu - \delta\dot\varphi^\mu\delta\varphi^\nu). \tag{3.2}$$

Если мы выберем контур в виде «параллелограмма» на карте со сторонами εb^μ и εc^μ, то нетрудно проверить, что

$$f^{\mu\nu} = \varepsilon^2(b^\mu c^\nu - b^\nu c^\mu), \tag{3.3}$$

что представляет собой координатный элемент площади «параллелограмма». Антисимметризованное выражение в скобках в (3.1) представляет собой *тензор кривизны Римана* $R \in C(T^1_3 M)$:

$$R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu}. \tag{3.4}$$

С его помощью выражение (3.1) может быть записано как

$$\delta a^\kappa = -\frac{1}{2}R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}a^\lambda f^{\mu\nu}. \tag{3.5}$$

В случае бесконечно малого контура площадка $f^{\mu\nu}$ превращается в форму

$$df^{\mu\nu} = dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu.$$

Мы видим, что тензор R можно рассматривать как форму по двум последним индексам и оператор на TM_x по двум первым:

$$R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{2}} = \frac{1}{2}R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{2}\mu\nu}\,dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{3.6}$$

Определение (3.4) имеет один недостаток: это определение дано в координатном базисе. Используя закон преобразования символов Кристоффеля (2.15), можно показать, что это выражение действительно определяет тензор. Хотелось бы иметь какое-нибудь безындексное определение, не зависящее от базиса или системы координат. Будем обозначать через $R(a,b)$ оператор на TM_x, получаемый как действие формы кривизны на пару векторов. Тогда тензор кривизны можно записать прямо через ковариантную производную:

$$R(b,c)a = [\nabla_b, \nabla_c]a - \nabla_{[b,c]}a. \tag{3.7}$$

Квадратные скобки здесь обозначают коммутатор соответствующих операторов (векторные поля тоже понимаются как операторы). Операторы в правой части действуют на векторные поля a, b, c, однако замечательное свойство этого выражения состоит в том, что действие дифференциальных операторов сокращается, так что результат зависит только от значений векторов в точке x.

Поскольку в координатном базисе базисные векторы коммутируют: $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$, это определение имеет простой вид в компонентах[1]

$$R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}a^\lambda = (\nabla_\mu\nabla_\nu a)^\kappa - (\nabla_\nu\nabla_\mu a)^\kappa. \tag{3.8}$$

Тем не менее надо отметить, что обратный вывод, то есть (3.7) из (3.8), не так очевиден.

На *римановом многообразии*, то есть на многообразии с метрикой и связностью Леви-Чивиты, мы можем использовать метрический тензор g и обратный к нему тензор g^* (точнее, соответствующие отображения $\overline{g}, \overline{g}^*$) чтобы опускать и поднимать индексы. Например, мы можем описывать кривизну тензором с четырьмя нижними индексами

$$R_{\mathbf{1234}} = g_{\mathbf{11'}}R^{\mathbf{1'}}{}_{\mathbf{234}}. \tag{3.9}$$

Введем еще три важных объекта, связанных с тензором кривизны. Во-первых, свертка тензора Римана по первому и третьему индексам дает *тензор Риччи*:

$$R_{\mathbf{12}} = R^{\mathbf{3}}{}_{\mathbf{132}}. \tag{3.10}$$

[1]Для связности без кручения эта формула может быть записана еще компактней: $R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}a^\lambda = a^\kappa{}_{;\nu\mu} - a^\kappa{}_{;\mu\nu}$. См. Пояснение А.

Во-вторых, на римановом многообразии тензор Риччи можно свернуть по оставшимся индексам с помощью обратного метрического тензора. В результате получается *скаляр Риччи*:

$$R = R(g^*) = R_{\mathbf{12}} g^{\mathbf{12}}. \tag{3.11}$$

Наконец, *тензор Вейля*

$$W_{\mathbf{1234}} = R_{\mathbf{1234}} - \frac{2}{d-2}(g_{\mathbf{1}[\mathbf{3}} R_{\mathbf{4}]\mathbf{2}} - g_{\mathbf{2}[\mathbf{3}} R_{\mathbf{4}]\mathbf{1}}) + \frac{2}{(d-1)(d-2)} R g_{\mathbf{1}[\mathbf{3}} g_{\mathbf{4}]\mathbf{2}} \tag{3.12}$$

представляет собой такую комбинацию тензора Римана, тензора Риччи и скаляра Риччи, которая преобразуется при *преобразовании Вейля* $g(x) = \Omega(x) g'(x)$ по простому правилу:

$$W_{\mathbf{1234}}(x) = \Omega(x) W'_{\mathbf{1234}}(x) \tag{3.13}$$

Квадратные скобки здесь обозначают антисимметризацию:

$$t_{[\mu_1 \ldots \mu_k]\nu_1 \ldots} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma t_{\mu_{\sigma_1} \ldots \mu_{\sigma_k} \nu_1 \ldots}.$$

При $d \leq 3$ тензор Вейля тождественно обращается в нуль, и потому тензор Римана однозначно определяется тензором Риччи. При $d = 2$ тензор Римана полностью определяется скаляром Риччи:

$$R_{\mathbf{1234}} = \frac{R}{2}(g_{\mathbf{13}} g_{\mathbf{24}} - g_{\mathbf{14}} g_{\mathbf{23}}), \tag{3.14}$$

причем величина $R/2$ совпадает с гауссовой кривизной.

Перечислим основные свойства тензора кривизны. Во-первых, это чисто алгебраические свойства симметрии. Кроме простого свойства

$$R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{234}} = -R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{243}}, \tag{3.15}$$

в случае связности без кручения тензор Римана удовлетворяет также *алгебраическому тождеству Бья́нки*:

$$R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{234}} + R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{342}} + R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{423}} = 0. \tag{3.16}$$

На римановом многообразии добавляется еще одно свойство:

$$R_{\mathbf{1234}} = R_{\mathbf{3412}}. \tag{3.17}$$

Во-вторых, это *дифференциальное тождество Бья́нки*:

$$R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{234;5}} + R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{245;3}} + R^{\mathbf{1}}{}_{\mathbf{253;4}} = 0, \tag{3.18}$$

которому также удовлетворяет тензор Римана для связности без кручения.

До сих пор мы дифференцировали тензорные поля, используя некоторую дополнительную структуру: связность. На самом деле есть способ дифференцировать поля без помощи дополнительных структур, если только мы зададим направление дифференцирования некоторым вектором. Это так называемая *производная Ли*. Мы введем производную Ли естественным для физиков способом: изучая преобразование полей при малом преобразовании координат $x^\mu = x'^\mu + \xi^\mu(x'^\bullet)$, которое задается векторным полем $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$. Отличие производной Ли от преобразований компонент тензоров, таких как (2.20) и (2.21), состоит в том, что мы будем сравнивать значения компонент в *разных точках многообразия*, отвечающих *одинаковым значениям координат*.

Рассмотрим для начала скалярное поле $\varphi(x)$. Пусть $\varphi(x^\bullet)$ обозначает соответствующее поле на области в $\mathbb{R}^d$ с использованием координат x^μ. Определим новое поле $\varphi'(x'^\bullet) = \varphi(x^\bullet)$. Нас будет интересовать разность этих полей, если мы подставили в них одни и те же значения координат. Имеем

$$\delta_\xi \varphi(x) = \varphi'(x'^\bullet) - \varphi(x'^\bullet) = \varphi(x^\bullet) - \varphi(x'^\bullet) = \partial_\mu \varphi(x)\, \xi^\mu = \nabla_\xi \varphi(x).$$

Операция δ_ξ «малого изменения» тензора и есть производная Ли.[2] Важно, что для любых тензоров она может быть выражена непосредственно через действие вектора ξ и не зависит от связности на многообразии. Тем не менее, нам понадобится ее выражение через ковариантные производные для связности без кручения.

Для векторного поля a мы должны положить $a'^\mu(x'^\bullet)\partial'_\mu = a^\mu(x^\bullet)\partial_\mu$, то есть $a'^\mu(x'^\bullet) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} a^\lambda(x^\bullet)$. Находим

$$\begin{aligned}\delta_\xi a^\mu &= a'^\mu(x'^\bullet) - a^\mu(x'^\bullet) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} a^\lambda(x^\bullet) - a^\mu(x'^\bullet) = \partial_\lambda a^\mu\,\xi^\lambda - a^\lambda\,\partial_\lambda \xi^\mu \\ &= \nabla_\lambda a^\mu\,\xi^\lambda - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} a^\nu \xi^\lambda - a^\lambda\,\partial_\lambda\xi^\mu = (\nabla_\xi a)^\mu - (\nabla_a \xi)^\mu\end{aligned}$$

или

$$\delta_\xi a = \nabla_\xi a - \nabla_a \xi, \qquad a \in C(TM). \tag{3.19}$$

Здесь мы воспользовались симметрией символов Кристоффеля, то есть отсутствием кручения. Заметим, что первая строчка выражает производную Ли через уже известный нам коммутатор векторных полей:

$$\delta_\xi a = [\xi, a]. \tag{3.20}$$

Аналогично для формы a_μ находим

$$\begin{aligned}\delta_\xi a_\mu &= a'_\mu(x'^\bullet) - a_\mu(x'^\bullet) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} a_\lambda(x^\bullet) - a_\mu(x'^\bullet) = \partial_\lambda a_\mu\,\xi^\lambda + a_\lambda\,\partial_\mu \xi^\lambda \\ &= \nabla_\lambda a_\mu\,\xi^\lambda + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} a_\nu \xi^\lambda + a_\lambda\,\partial_\mu\xi^\lambda = (\nabla_\xi a)_\mu + a(\nabla_\mu \xi).\end{aligned}$$

Правую часть не очень удобно писать в безындексных обозначениях, но мы все же хотим записать ее как утверждение о тензорах, а не о компонентах. Поэтому воспользуемся формальными индексами:

$$\delta_\xi a_{\mathbf{1}} = \nabla_\xi a_{\mathbf{1}} + a_{\mathbf{1}'} \nabla_{\mathbf{1}} \xi^{\mathbf{1}'}, \qquad a \in C(T^*M) \tag{3.21}$$

Этот результат легко обобщить на произвольные тензорные поля:

$$\delta_\xi t^{\mathbf{1}\ldots\mathbf{k}}{}_{\mathbf{k+1}\ldots\mathbf{l}} = \nabla_\xi t^{\mathbf{1}\ldots\mathbf{k}}{}_{\mathbf{k+1}\ldots\mathbf{l}} - \sum_{i=1}^{k} t^{\mathbf{1}\ldots\mathbf{i}'\ldots\mathbf{k}}{}_{\mathbf{k+1}\ldots\mathbf{l}}\,\nabla_{\mathbf{i}'}\xi^{\mathbf{i}} + \sum_{i=k+1}^{l} t^{\mathbf{1}\ldots\mathbf{k}}{}_{\mathbf{k+1}\ldots\mathbf{i}'\ldots\mathbf{l}}\,\nabla_{\mathbf{i}}\xi^{\mathbf{i}'}. \tag{3.22}$$

Хотелось бы еще раз подчеркнуть, что производная Ли — объект, более фундаментальный, чем связность. Он определен на любом гладком многообразии без всяких дополнительных структур.

Производная Ли метрического тензора особенно просто выражается через связность Леви-Чивиты. Из ковариантного постоянства метрического тензора получаем

$$\delta_\xi g_{\mathbf{12}} = g_{\mathbf{11}'} \nabla_{\mathbf{2}} \xi^{\mathbf{1}'} + g_{\mathbf{22}'} \nabla_{\mathbf{1}} \xi^{\mathbf{2}'} = \nabla_{\mathbf{2}} \xi_{\mathbf{1}} + \nabla_{\mathbf{1}} \xi_{\mathbf{2}} = \xi_{\mathbf{1};\mathbf{2}} + \xi_{\mathbf{2};\mathbf{1}}, \tag{3.23}$$

где $\xi_{\mathbf{1}} = g_{\mathbf{12}}\xi^{\mathbf{2}}$ — форма, получаемая «опусканием индексов» из вектора ξ. В координатах имеем

$$\delta_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}. \tag{3.24}$$

Производная Ли обладает двумя важными свойствами. Во-первых, производная Ли от тензорного произведения удовлетворяет правилу Лейбница по отношению к тензорному произведению:

$$\delta_\xi (t \otimes s) = \delta_\xi t \otimes s + t \otimes \delta_\xi s. \tag{3.25}$$

Во-вторых, коммутатор производных Ли является производной Ли коммутатора

$$[\delta_\xi, \delta_\eta] t = \delta_{[\xi,\eta]} t. \tag{3.26}$$

Наконец, последний важный математический вопрос. В будущем нам понадобится интегрировать различные величины (например, плотность лагранжиана) по всему многообразию. Такой интеграл должен быть инвариантен по отношению к преобразованиям координат общего вида (*общековариантен*).

[2] Строго математически производная Ли $\mathscr{L}_\xi$ определяется как предел $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}\delta_{\varepsilon\xi}$. Но нам удобно будет думать о ней в более «физических» терминах, рассматривая «малые» векторы ξ.

Для этого, прежде всего, нам нужно иметь инвариантную форму объема. Хорошо известно, что форма $d^d x = \bigwedge_\mu dx^\mu$, определенная в координатах $x^\bullet$, связана с формой $d^d x' = \bigwedge_\mu dx'^\mu$, определенной в координатах $x'^\bullet$, согласно

$$d^d x = J\, d^d x', \qquad J = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} = \det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right). \tag{3.27}$$

Множитель J называется *якобианом* преобразования. С другой стороны, метрический тензор преобразуется по правилу

$$g_{\mu\nu} = g'_{\kappa\lambda}\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu}.$$

В силу того что детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов, имеем

$$\det(g_{\mu\nu}) = \det(g'_{\mu\nu})J^{-2}. \tag{3.28}$$

Мы будем пользоваться общепринятым обозначением

$$g = \det(g_{\mu\nu}). \tag{3.29}$$

Мы видим, что величина

$$dV = \sqrt{|g|}\, d^d x \tag{3.30}$$

инвариантна относительно преобразований координат. Точнее говоря, она инвариантна относительно преобразований координат, сохраняющих ориентацию. В случае преобразований, меняющих ориентацию, формально говоря, $dV = -dV'$. Тем не менее, коль скоро мы интересуемся интегралами, вместе с изменением знака элементом объема меняет ориентацию и область, по которой ведется интегрирование, так что $\int d^d x\, f(x) = \int |J|\, d^d x'\, f(x(x'))$ и мы можем рассматривать элемент объема dV как инвариантную величину.

Инвариантность dV значит, что величина $\sqrt{|g|}$ является не скаляром, а общим множителем компонент тензора, называемого *формой объема*:

$$dV = \sqrt{|g|}\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_d}\, dx^{\mu_1}\otimes\dots\otimes dx^{\mu_d} = \sqrt{|g|}\, dx^0\wedge\dots\wedge dx^{d-1},$$

где $\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_d}$ — единственный полностью антисимметричный символ степени d, нормированный равенством $\varepsilon_{01\dots d-1} = 1$. Легко проверить, что

$$(\sqrt{|g|}\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_d})_{;\lambda} = \left(\partial_\lambda\sqrt{|g|} - \sqrt{|g|}\Gamma^\mu_{\mu\lambda}\right)\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_d}$$

Из матричного тождества $\operatorname{tr}(G^{-1}\partial G) = \partial\log\det G$ немедленно находим

$$\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda\log\sqrt{|g|} \tag{3.31}$$

и

$$(\sqrt{|g|}\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_d})_{;\lambda} = 0. \tag{3.32}$$

Из (3.31) следует соотношение, которое понадобится нам ниже:

$$\sqrt{|g|}a^\lambda{}_{;\lambda} = (\sqrt{|g|}a^\lambda)_{,\lambda}. \tag{3.33}$$

Для производной Ли формы объема имеется простая формула

$$\delta_\xi\log|g| = g^{\mu\nu}\delta_\xi g_{\mu\nu} = 2\xi^\mu{}_{;\mu}. \tag{3.34}$$

Задачи

1. Выведите (3.3) и покажите, что тензор $f^{\mu\nu}$ определяет площадь этого параллелограмма.

2. Получите (3.4) из (3.7). Покажите, что риманов тензор кривизны действительно является тензором.

3. Выведите алгебраические тождества (3.15), (3.16). Докажите, что для связности Леви-Чивиты выполняется тождество (3.17).

4. Покажите, что в случае связности без кручения в окрестности любой точки x_0 многообразия можно выбрать систему координат, в которой все символы Кристоффеля в этой точке обращаются в нуль: $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x_0) = 0$. Затем докажите, что в точке x_0 выполняется дифференциальное тождество Бьянки (3.18).

5*. Докажите тождества (3.25) и (3.26).

Семинар 3

Симметрии и векторные поля Киллинга

Важный вопрос состоит в том, как инвариантным образом описать симметрии метрических пространств, не прибегая к конкретному виду метрики. На этом семинаре мы рассмотрим *векторные поля Киллинга*, то есть векторные поля ξ, удовлетворяющие уравнению

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0. \tag{3.35}$$

Эти векторные поля реализуют потоки, отвечающие действию групп симметрии метрических пространств. Мы покажем, что векторные поля Киллинга образуют алгебры Ли. Соответствующие потоки образуют группы Ли. Мы изучим несколько примеров симметрических пространств и векторных полей Киллинга в них:

1) эвклидово пространство и пространство Минковского;

2) сферы и пространства де Си́ттера;

3) стационарные метрики в ОТО;

4) сферически симметричные метрики в ОТО.