Лекция 2

Основные понятия дифференциальной геометрии и пространство-время

В специальной теории относительности мир представлял собой плоское (аффинное) пространство, и у нас не было принципиальной необходимости вводить криволинейные координаты на нем. Законы физики удобно было связывать с плоскими координатами, причем временна́я координата отвечала некоторой инерциальной системе отсчета, а пространственные координаты были произвольными координатами в одновременном слое. В общей теории относительности инерциальные системы отсчета никак не выделены. Более того, мир описывается как некоторое многообразие с (псевдоримановой) метрикой, и законы физики должны быть сформулированы так, чтобы их можно было записать в произвольных координатах. В этой и следующей лекции я введу основные геометрические понятия, которые нам будут нужны на протяжении всего курса.

Дадим сначала определения. Пусть на множестве M задано множество его подмножеств $\mathscr{T}$, удовлетворяющее трем условиям:

1. Объединение элементов произвольного подмножества множества $\mathscr{T}$ принадлежит $\mathscr{T}$.

2. Пересечение элементов произвольного *конечного* подмножества $\mathscr{T}$ принадлежит $\mathscr{T}$.

3. $\varnothing, M \in \mathscr{T}$.

Тогда $\mathscr{T}$ называется *топологией* на множестве M, элементы $U \in \mathscr{T}$ — *открытыми* множествами, а пара $(M, \mathscr{T})$ — *топологическим пространством.*

Для пары топологических пространств $(M, \mathscr{T})$ и $(M', \mathscr{T}')$ отображение $f : M \to M'$ называется *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества открыт: $U \in \mathscr{T}' \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathscr{T}$.

Отображение $f : M \to M'$ называется *гомеоморфизмом* топологических пространств, если оно взаимно-однозначно и оба отображения f и f^{-1} непрерывны.

Если любой элемент множества $\mathscr{T}$ можно получить объединением элементов некоторого его подмножества $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$, то такое подмножество называется *базой топологии.*

Открытое множество U, содержащее точку x, называют *открытой окрестностью* точки x. Топологическое пространство $(M, \mathscr{T})$ (для простоты будем писать M) называется *хаусдорфовым* если топология удовлетворяет *сильной аксиоме отделимости*: для любой пары точек имеются непересекающиеся окрестности:

$$\forall x, y \in M,\ x \neq y :\ \exists U, V \in \mathscr{T},\ x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \varnothing.$$

Примером хаусдорфова топологического пространства является пространство $\mathbb{R}^d$, база топологии которого состоит из всех открытых шаров $B_r(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, |x - y| < r \right\}$ $(\forall x, r)$. На самом деле можно построить базу из счетного множества открытых шаров, так что это топологическое пространство со счетной базой.

Если у каждой точки $x_0 \in M$ хаусдорфова топологического пространства M со счетной базой топологии имеется окрестность U, гомеоморфная пространству $\mathbb{R}^d$, то есть существует непрерывное вместе со своим обратным взаимно-однозначное отображение $\phi : U \to \mathbb{R}^d$, то топологическое пространство M будем называть *топологическим многообразием* размерности d. Пару (U, ϕ) называют *картой* на многообразии M. Совокупность функций $\phi^\mu(x)$ дает *систему координат* на открытом множестве U. Если мы изучаем многообразие только в окрестности точки x, то вместо $\phi^\mu(x)$ часто пишут просто x^μ. Мы тоже будем так часто делать, а если у нас будут две системы координат в одной области, то будем различать их какими-нибудь дополнительными значками, например, штрихом: $x^\mu = \phi^\mu(x)$, $x'^\mu = \phi'^\mu(x)$.

Предположим, что на M имеется множество карт (U_α, ϕ_α), $\alpha \in A$, удовлетворяющее условиям:

1. Карты U_α покрывают все многообразие: $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.

2. Для любых $\alpha, \beta \in A$, таких что $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, отображение *склейки* $\phi_\alpha^\beta = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ является C^k-гладким во всей области его определения.

Тогда мы будем говорить, что (U_α, ϕ_α) образуют *C^k-гладкий атлас* на M. Два C^k-гладких атласа считаются *эквивалентными*, если их объединение тоже является C^k-гладким атласом. Класс эквивалентности C^k-гладких атласов образует *C^k-гладкую структуру.* Многообразие M с заданной на ней C^k-гладкой структурой называется *C^k-гладким многообразием.* Функцию $f : M \to \mathbb{R}$ мы будем называть *C^l-гладкой* ($l \le k$) если функции $f \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ являются C^l-гладкими.

В дальнейшим мы будем считать k достаточно большим для того, чтобы все выражения, которые мы будем писать, были хорошо определены, и просто говорить о «гладком многообразии». Обычно нам будет достаточно $k = 2$.

Отметим, что систему координат ϕ можно определить не как взаимно-однозначное отображение на все пространства $\mathbb{R}^d$, а как взаимно-однозначное отображение на какое-нибудь его открытое (в смысле $\mathbb{R}^d$) подмножество, гомеоморфное $\mathbb{R}^d$. Это удобно в практических вычислениях, потому что позволяет брать более «естественные» функции ϕ^μ. Мы всегда будем понимать карты и системы координат в таком более общем виде.

Понятие многообразия фундаментальное, но само по себе слишком бедное. В сущности, можно сказать, что это топологическое пространство, локально гомеоморфное пространству $\mathbb{R}^d$. В этой лекции мы введем две дополнительные структуры, которые мы будем использовать во всем курсе — аффинную связность и метрику.

Для начала давайте вспомним понятие касательного пространства. Рассмотрим гладкое многообразие M. Нас будут интересовать только локальные свойства многообразия, поэтому мы ограничимся одной картой $U \subset M$ с координатами $x^\mu = \phi^\mu(x)$. Пусть $x_0 \in U$. Рассмотрим пространство $C^1(U)$ гладких вещественнозначных функций на U. Рассмотрим гладкую параметрическую кривую $x = \varphi(\tau)$, такую что $x_0 = \varphi(0)$. Гладкость кривой означает, что функции $\varphi^\mu(\tau) \equiv \phi^\mu(\varphi(\tau))$ параметра кривой являются гладкими. Тогда дифференцирование $\dot\varphi(0)$ вдоль кривой в точке $\tau = 0$ представляет собой оператор из $C^1(U)$ в $\mathbb{R}$:

$$\forall f \in C^1(U) :\ \dot\varphi(0) f \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left.\frac{df(\varphi(\tau))}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}\right|_{x=\varphi(0)} \left.\frac{d\varphi^\mu(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0}.$$

Легко понять, что совокупность всех операторов $\dot\varphi$, связанных со всеми возможными кривыми, проходящими через точку x_0, образуют векторное пространство. Действительно, для двух кривых φ и χ операторы $\dot\varphi(0)$ и $\dot\chi(0)$ совпадают, если $(\varphi^\mu)'(0) = (\chi^\mu)'(0)$, так что любой оператор $\dot\varphi(0)$ может быть однозначно записан в виде $a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, где $a^\mu = (\varphi^\mu)'(0)$. И наоборот, для любого оператора $a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ существует кривая $\varphi(\tau)$ с координатами $\varphi^\mu(\tau) = x^\mu + a^\mu \tau$, для которой это уравнение выполняется. Для любого набора чисел a^μ определим оператор $a = a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Структура линейного пространства задается очевидным равенством

$$\alpha a + \beta b = (\alpha a^\mu + \beta b^\mu) \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Легко проверить, что оно не зависит от выбора координат. Линейное пространство $TM_{x_0} = T^1 M_{x_0}$ таких операторов называется *касательным пространством* к многообразию M в точке x_0. Совокупность касательных пространств со структурой многообразия на них образует *касательное расслоение* $TM = T^1 M$. На языке расслоений векторные поля представляют собой гладкие сечения касательного расслоения. Мы будем говорить, что сечение a C^k-гладкое, если соответствующие функции $a^\mu(x)$ являются C^k-гладкими на каждой карте. Пространство таких сечений мы будем обозначать $C^k(TM)$. Векторные поля $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ на карте U задают *координатные базисы* в касательных пространствах TM_x, $x \in U$.

Векторы в касательном пространстве можно представлять себе как бесконечно малые сдвиги. Действительно, пусть $a \in TM_x$, а $f \in C^1(M)$. В любой системе координат мы можем написать

$$f(x^\bullet + \varepsilon a^\bullet) = f(x) + \varepsilon a^\mu \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} + o(\varepsilon) = f(x) + \varepsilon a f(x) + o(\varepsilon).$$

Рассмотрим пространство двойственное к TM_{x_0}, то есть пространство линейных форм на TM_{x_0}. Если у нас выбраны координаты x^μ, то с каждой координатой связана форма dx^μ, определенная уравнением

$$dx^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \delta^\mu_\nu,$$

то есть базис $\{dx^\mu\}$ представляет собой базис в пространстве форм, двойственный к базису $\left\{\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right\}$ в касательном пространстве. Это пространство называется *кокасательным пространством* $T^*M_{x_0} = T_1M_{x_0}$, а совокупность кокасательных пространств образует *кокасательное расслоение* $T^*M = T_1M$. Поля 1-форм представляют собой гладкие сечения кокасательного расслоения, образующие пространство $C^k(T_1M)$. Более общо, тензорное произведение $T^m_nM_{x_0} = TM_{x_0}^{\otimes m} \otimes T^*M_{x_0}^{\otimes n}$ представляет собой пространство тензоров с m верхними и n нижними индексами (у компонент) в точке x_0. Соответствующие тензорные поля определяются как сечения расслоения T^m_nM.

Вместо символа $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ мы часто будем использовать символ ∂_μ. Оба этих символа мы будем применять как для обозначения базисного вектора в касательном пространстве (то есть оператора на пространстве функций на многообразии), так и для обозначения дифференцирования функции нескольких переменных (оператора на пространстве функций в $\mathbb{R}^d$), в том числе отвечающих функциям на многообразии в системе координат $\{x^\bullet\}$. Кроме того, для функции d переменных $f(x^\bullet) = f(x^0, x^1, \ldots, x^{d-1})$ мы будем писать $f_{,\mu} = \partial_\mu f$.

Теперь возникает вопрос о том, как «склеить» слои касательного расслоения TM друг с другом. В аффинном пространстве все слои касательного расслоения естественным образом отождествляются с «подлежащим» векторным пространством V и, таким образом, между собой. На произвольном многообразии такого естественного способа не существует. Если мы проведем на многообразии некоторую C^1-гладкую незамкнутую и несамопересекающуюся кривую, можно отождествить касательные пространства (т.е. построить взаимно-однозначные отображения между ними) в точках кривой каким-нибудь способом. Мы хотим, чтобы

- этот способ был локален, то есть правило было задано в каждой точке многообразия M и зависело только от направления $\dot\varphi(\tau)$, в котором кривая проходит через эту точку;
- этот способ уважал структуру линейного пространства на TM_x, то есть задавал линейное отображение одного слоя в другой;
- этот способ был гладким, то есть компоненты «постоянного» вектора вдоль гладкой кривой являлись гладкими функциями параметра кривой.

Предположим, мы хотим перенести вектор a из точки x_0 вдоль кривой $\varphi(\tau)$, $\varphi(0) = x_0$. Пусть $a(\tau)$ есть результат такого переноса. Иными словами, $a(\tau)$ есть постоянный по отношению к переносу вектор. Пусть также $b(\tau) = \dot\varphi(\tau)$. Мы хотим построить такой оператор ∇_b, что

$$\nabla_{b(\tau)}a(\tau) = 0. \tag{2.1}$$

Этот оператор мы будем называть *ковариантной производной*, а вектор $a(\tau)$, удовлетворяющий этому условию, — *ковариантно-постоянным* вдоль кривой $\varphi(\tau)$. В силу условия локальности оператор может зависеть только от точки $x = \varphi(\tau)$, но не от самого параметра τ. В частности, это значит, что репараметризация $\tau = p(\lambda)$ не изменит этого условия. Направляющий вектор к кривой $\varphi(p(\lambda))$ равен $p'(\lambda)b(p(\lambda))$. Отсюда следует, что условие $\nabla_{\alpha(\tau)b(\tau)}a(\tau) = 0$ должно выполняться для любой функции $\alpha(\tau)$. Очевидно, что для аффинного пространства за оператор ∇_b можно принять действие вектора b на компоненты a^μ в линейных координатах. Поэтому постулируем, что оператор ∇_b линеен по b и является дифференциальным оператором первого порядка:

$$\nabla_{fb}a = f\nabla_b a, \tag{2.2}$$

$$\nabla_b(fa) = (bf)a + f\nabla_b a \qquad (\forall f \in C^1(M),\ a \in C^1(TM),\ b \in C^0(TM)). \tag{2.3}$$

Последнее условие представляет собой правило Лейбница. Оно связывает параллельный перенос вектора с параллельным переносом скаляра и нормирует его. Первое условие означает, что существует оператор (*ковариантный дифференциал*) $\nabla : C^k(TM) \to C^{k-1}(T^1_1M)$, такой что $\nabla_b a = b^{\mathbf{1}}\nabla_{\mathbf{1}}a = b^\mu\nabla_\mu a$, где $\nabla_\mu \equiv \nabla_{\partial_\mu}$. Иными словами, $\nabla = dx^\mu \otimes \nabla_\mu$. Мы будем говорить, что ковариантный дифференциал задает *аффинную связность* на многообразии M.[1] Найдем общий вид оператора ∇ в координатах.

[1] Вообще говоря, связность задается на *расслоении*. Аффинная связность является связностью на *касательном* расслоении TM, и индуцирует согласованные с ней связности на всех тензорных расслоениях T^m_nM, которые также называют аффинными (см. ниже).

Условие (2.3) переписывается в виде

$$\nabla(fa) = df\, a + f\nabla a \tag{2.3a}$$

или, в компонентах,

$$\nabla_\mu(fa) = \partial_\mu f\, a + f\nabla_\mu a. \tag{2.3b}$$

Применим эту формулу к $\nabla_\mu a = \nabla_\mu(a^\nu\partial_\nu)$, подставив вместо f компоненту a^ν, а вместо a базисный вектор ∂_ν:

$$\nabla_\mu(a^\nu\partial_\nu) = (\partial_\mu a^\nu)\partial_\nu + a^\nu\nabla_\mu\partial_\nu. \tag{2.4}$$

Левую часть разложим по базису

$$\nabla_\mu(a^\nu\partial_\nu) = (\nabla_\mu a)^\lambda\partial_\lambda, \tag{2.5}$$

В правой части (2.4) первый член уже разложен по базису, а для второго члена имеем

$$\nabla_\mu\partial_\nu = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\partial_\lambda. \tag{2.6}$$

Коэффициенты разложения $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ называются *символами Кристоффеля*. Подставляя (2.5) и (2.6) в (2.4), получаем

$$(\nabla_\mu a)^\lambda = \partial_\mu a^\lambda + \Gamma^\lambda_{\nu\mu}a^\nu. \tag{2.7}$$

Набор символов Кристоффеля (как функций точки) однозначно задает связность на данном многообразии. Заметим, что для краткости часто пишут $\partial_\mu a^\lambda = a^\lambda{}_{,\mu}$, $(\nabla_\mu a)^\lambda = a^\lambda{}_{;\mu}$.

Говоря о существовании оператора ∇, я сделал небольшую подмену. Дело в том, что оператор ∇_b в (2.1) не требует, чтобы векторное поле a было определено в некоторой области пространства. Достаточно, чтобы оно было определено на кривой $\varphi(\tau)$. Поэтому следует оговориться, что условие (2.1) может быть определено через ковариантную производную ∇ для произвольного гладкого продолжения $a(\tau)$ на окрестность кривой. В силу того, что $\dot\varphi^\mu\partial_\mu = d/d\tau$, мы можем записать его в виде

$$\dot a^\lambda(\tau) + \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\dot\varphi^\mu(\tau)a^\nu(\tau) = 0. \tag{2.8}$$

Аффинная связность может быть легко обобщена на общее тензорное расслоение $T^m_n M$. Действительно, для функций на многообразии ковариантная производная совпадает с обычной:

$$\nabla_b f = bf, \qquad f\in C^1(M). \tag{2.9}$$

Тогда легко определить связность на кокасательном расслоении через правило Лейбница:

$$(\nabla_b\,\omega)(a) + \omega(\nabla_b a) = b\omega(a), \qquad \omega\in C^1(T^*M),\ a\in C^1(TM). \tag{2.10}$$

Явно получаем

$$(\nabla_\mu\omega)_\kappa = \partial_\mu\omega_\kappa - \Gamma^\nu_{\kappa\mu}\omega_\nu. \tag{2.11}$$

Наконец, для общего тензорного поля $t\in C^1(T^m_n M)$ ковариантная производная определяется через правило Лейбница для свертки $t^{\mathbf{1}\ldots\mathbf{m}}{}_{\mathbf{m+1},\ldots,\mathbf{m+n}}\omega^{(1)}_{\mathbf{1}}\cdots\omega^{(m)}_{\mathbf{m}}a^{\mathbf{m+1}}_{(1)}\cdots a^{\mathbf{m+n}}_{(n)}$ тензорного поля с m 1-формами $\omega^{(i)}$ и n векторами $a_{(j)}$. В координатном базисе ковариантная производная тензора t выглядит так

$$(\nabla_\mu t)^{\lambda_1\ldots\lambda_m}{}_{\kappa_1\ldots\kappa_n} = \partial_\mu t^{\lambda_1\ldots\lambda_m}{}_{\kappa_1\ldots\kappa_n} + \sum_{i=1}^m \Gamma^{\lambda_i}_{\nu_i\mu}t^{\lambda_1\ldots\nu_i\ldots\lambda_m}{}_{\kappa_1\ldots\kappa_n} - \sum_{j=1}^n \Gamma^{\nu_j}_{\kappa_j\mu}t^{\lambda_1\ldots\lambda_m}{}_{\kappa_1\ldots\nu_j\ldots\kappa_n}. \tag{2.12}$$

Теперь зададимся вопросом: как переносится касательный к кривой вектор? Вообще говоря, после переноса он перестает быть касательным. C^2-Гладкая кривая, касательный вектор к которой ковариантно-постоянен вдоль нее в некоторой параметризации, называется *геодезической*. Иными словами, геодезическая удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{\dot\varphi(\tau)}\dot\varphi(\tau) = 0. \tag{2.13}$$

В силу (2.8) в координатах это уравнение имеет вид

$$\ddot\varphi^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot\varphi^\mu\dot\varphi^\nu = 0. \tag{2.14}$$

Обратим внимание, что это уравнение фиксирует не только саму кривую, но и специальную параметризацию на ней. Параметр, определенный этим уравнением называется *аффинным параметром* геодезической. Уравнение (2.14) является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, так что геодезическая однозначно задается начальной точкой $\varphi(0)$ и направляющим вектором $\dot\varphi(0)$ в ней. При этом достаточно задать направляющий вектор с точностью до множителя: замена $\dot\varphi(0) \to \lambda\dot\varphi(0)$ эквивалентна репараметризации $\tau \to \lambda^{-1}\tau$ с постоянным λ.

Геодезические будут играть большую роль. Как мы увидим ниже, они дают мировые линии легких (пробных) частиц, свободно падающих в гравитационном поле, причем в случае массивных частиц аффинный параметр τ пропорционален собственному времени частицы.

Важно заметить, что символы Кристоффеля $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ не являются компонентами какого-либо тензорного поля. Это легко понять хотя бы из того, что символы Кристоффеля естественной связности в аффинном пространстве тождественно равны нулю в плоских координатах и не равны нулю в криволинейных координатах, в то время как полный набор компонент тензор не может обращаться или не обращаться в нуль в зависимости от базиса. Нетрудно показать, что при преобразовании координат $x^\mu = x^\mu(x'^\bullet)$ символы Кристоффеля преобразуются по закону

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma'^\kappa_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa}. \tag{2.15}$$

В то же время *разность* двух связностей является тензором. Пусть $\nabla, \tilde\nabla$ — две связности, а $\Gamma, \tilde\Gamma$ — соответствующие символы Кристоффеля. Тогда, очевидно, разности $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \tilde\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ преобразуются как компоненты тензора. По-другому: из определения (2.2), (2.3) немедленно следует, что

$$(\nabla_{fb} - \tilde\nabla_{fb})a = f(\nabla_b - \tilde\nabla_b)a,$$
$$(\nabla_b - \tilde\nabla_b)(fa) = f(\nabla_b - \tilde\nabla_b)a.$$

Это значит, что разность связностей в точке x является линейным отображением $TM_x \otimes TM_x \to TM_x$, то есть тензором из $T^1_2M_x$.

Другая тензорная величина, связанная со связностью, это *кручение*:

$$T(a,b) = \nabla_a b - \nabla_b a - [a,b] \quad (\forall a, b \in C^1(TM)) \quad \Leftrightarrow \quad T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \tag{2.16}$$

Легко видеть, что для $T^\lambda_{\mu\nu}$ второе слагаемое в (2.15) сокращается и, таким образом, кручение является тензором.

До сих пор мы вводили аффинную связность аксиоматически, как самостоятельный объект. В общей теории относительности возникает связность специального вида: связность, определяемая метрикой. Чтобы ее определить, введем метрику на многообразии M. Многообразие M называется *псевдоримановым многообразием*, если на нем задано поле симметричной невырожденной формы $g \in C^2(T_2M)$, $g_x(a,b) = g_x(b,a)$. Такая форма называется *метрикой*. В силу непрерывности и невырожденности сигнатура метрики на связном псевдоримановом многообразии постоянна. В рамках ОТО нас будут интересовать многообразия с сигнатурой $(1,3)$ (или, более общо, $(1, d-1)$).

Связность ∇ называется *согласованной с метрикой*, если в ней метрика ковариантно-постоянна:

$$\nabla_c g = 0 \ (\forall c \in C^0(TM)) \quad \Leftrightarrow \quad g_{\mu\nu;\lambda} = 0. \tag{2.17}$$

Связность ∇ называется *связностью без кручения*, если она удовлетворяет условию

$$T^{\bullet}_{\bullet\bullet} = 0. \tag{2.18}$$

Имеется единственная связность без кручения, согласованная с метрикой. Такая связность называется *связностью Ле́ви-Чиви́ты.* Явно символы Кристоффеля для связности Леви-Чивиты записываются как

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}). \tag{2.19}$$

Метрика позволяет связывать объекты разной тензорной природы, попросту говоря, поднимать и опускать индексы. Например, вектору $a = a^\mu\partial_\mu$ можно сопоставить форму $\overline{g}(a) = g_{\mu\nu}a^\nu\,dx^\mu = a_\mu\,dx^\mu$. Наоборот, форме $\omega = \omega_\mu\,dx^\mu$ можно сопоставить вектор $\overline{g}^*(\omega) = g^{\mu\nu}\omega_\nu\partial_\mu = \omega^\mu\partial_\mu$.

Задачи

1. Рассмотрим две системы координат $\{x^\bullet\}$ и $\{x'^\bullet = f^\bullet(x^\bullet)\}$ в некоторой области многообразия M. Пусть $a = a^\mu \partial_\mu = a'^\mu \partial'_\mu \in TM_{x_0}$. Получите закон преобразования компонент вектора

$$a'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} a^\nu. \tag{2.20}$$

Частные производные здесь понимаются в следующем смысле: $\partial_\nu x'^\mu = f^\mu{}_{,\nu}(x^\bullet)|_{x^\bullet = x_0^\bullet}$.
Пусть $\omega = \omega_\mu \, dx^\mu = \omega'_\mu \, dx'^\mu \in T^*M_{x_0}$. Получите закон преобразования компонент формы

$$\omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega_\nu. \tag{2.21}$$

Частные производные здесь понимаются в смысле $\partial'_\mu x^\nu = (f^{-1})^\nu{}_{,\mu}(f^\bullet(x^\bullet))|_{x^\bullet = x_0^\bullet}$. Наконец, напишите закон преобразования компонент произвольного тензора $a \in T^m_n M_{x_0}$.

2. Рассмотрим двумерное аффинное пространство. На этом пространстве имеется естественная связность, в которой $(\nabla_\mu a)^\lambda = \partial_\mu a^\lambda$ в линейных координатах. Найдите символы Кристоффеля этой связности в полярных координатах r, φ: $x^1 = r\cos\varphi$, $x^2 = r\sin\varphi$.

3. Проверьте эквивалентность определений в (2.16).

4. Получите символы Кристоффеля для связности Леви-Чивиты (2.19).

5*. Выведите закон преобразования символов Кристоффеля (2.15).

Семинар 2

Физическая интерпретация метрики

Системы отсчета в общей теории относительности существуют только локально, поэтому каждой системе координат соответствует семейство систем отсчета в каждой точке пространства-времени. Мы разберем физическую интерпретацию геометрических данных.

Измерить расстояние между двумя близко расположенными неподвижными в данной системе координат частицами можно следующим образом. На одной частице (с координатами $x^i + dx^i$) расположим источник сигнала, распространяющегося со скоростью света, а на другой (с координатами x^i) — зеркало. Испустим из первой частицы сигнал в сторону второй частицы. Сигнал отразится от второй частицы и вернется к первой. На первой частице произведем измерение времени испускания t_1 и приема t_2 сигнала, а на второй — момента отражения t'_0. Также будем считать, что моменту координатного времени t_i отвечает момент собственного времени τ_i, то есть физического времени, измеренного наблюдателем, находящимся на первой частице. Тогда за расстояние между частицами примем величину $l = \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1)$, а за момент времени на первой частице, синхронный с t'_0 на второй частице — момент $t_0 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$.

Мы покажем, что:

1. Интервалы времени в системе отсчета, связанной с данной системой координат, даются формулой $d\tau = \sqrt{g_{00}}\, dt$.

2. Пространственные расстояния между близкими точками даются метрикой

$$dl^2 = \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k, \qquad \gamma_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^{ik} = -g^{ik}. \tag{2.22}$$

3. События в расположенных поблизости точках одновременны в локальной системе отсчета, связанной с данной системой координат, если

$$dx^0 = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}\, dx^i. \tag{2.23}$$

Отметим, что на римановом многообразии на достаточно малой карте можно ввести *синхронную систему координат* с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k. \tag{2.24}$$

Временные линии в этой системе координат являются геодезическими, а пространственные слои ортогональны им в каждой точке. Локальную систему координат можно построить, решая некоторое уравнение Гамильтона—Якоби. Это мы изучим подробнее на другом семинаре.